Eda, Yoshikazu
Osaka Math. J.
12 (1960), 39–60.

Einige Sätze über λ-freie Zahlen

Professor Dr. Zyoiti Suetuna zum 60. Geburtstag

Von Yoshikazu EDA

Es sei $N_{s,\lambda}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von Quadraten von λ-freien Zahlen.

Eine natürliche Zahl n heisst eine *λ-freie konditionale Zahl*, kurz *λ-konditional*, wenn es s ganze Zahlen, $m_1, m_2, \cdots, m_s$ gibt, so dass

$$m_1^2+m_2^2+\cdots+m_s^2 \equiv n \pmod{2^{2\lambda+1}} \tag{1}$$

mit

$$2^\lambda \nmid m_i,\ i=1,2,\cdots,s,\quad \lambda \geqq 2.$$

Unter einem Quadrat sei hier das Quadrat einer positiven ganzen Zahl verstanden, und unter einer λ-freien Zahl eine positive ganze Zahl, die durch kein λ-Potenz ausser 1 teilbar ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Estermannschen Sätze $T_{2,1}$ und $T_{2,2}$ für $\lambda \geqq 3$ zu beweisen. Das gelingt uns mit der gleichen Methode, wie sie Professor Estermann damit bewies.

Satz $T_{\lambda 1}$. *Es sei* $s \geqq 5$. *Dann gilt: Jede genügend grosse λ-konditionale Zahl n lässt sich als Summe von s Quadraten λ-freier Zahlen darstellen.*

Satz $T_{\lambda 2}$. *Es sei* $s \geqq 2^{\lambda+1}$. *Dann gilt: Jede genügend grosse Zahl n lässt sich als Summe von s Quadraten λ-freier Zahlen darstellen.*

Bezeichnungen. Für reelles γ bezeichne $[\gamma]$ die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als γ ist. Es sei $\lambda \geqq 3$ (ganz), und

$$B=\left[\frac{1}{5(\lambda-1)}(10\lambda^2-6\lambda-5)\right]+1. \tag{2}$$

Die Buchstaben a, b, l bezeichnen ganze Zahlen; h, k, m, q, s, j positive ganze Zahlen; u, v nicht negative Zahlen; p Primzahlen; x, y, θ, reelle Zahlen; ε positive Zahlen; $e(x)=e^{2\pi i x}$.

In der Summenzeichen $\sum_{h \bmod q}$ durchläuft h ein vollständiges Restsystem mod q. In allen übrigen Summen ist die untere Summationsgrenze, falls sie nicht ausdrücklich angegeben wird, gleich Eins. Leere Summen sind gleich Null zu setzen.

Herrn Dr. T. Tatuzawa habe ich für kritische Durchsicht des druckfertigen Manuskripts zu danken.

§1. Die Singuläre Reihe.

Die Gaussschen Summen $S(h, q)$ sind durch

$$S(h, q) = \sum_{m \bmod q} e\left(\frac{m^2 h}{q}\right) \tag{3}$$

definiert. Für $(l, q)=1$ ist

$$S(l^2 h, q) = S(h, q), \tag{4}$$

und

$$S(kh, kq) = kS(h, q). \tag{5}$$

Hilfssatz 1. *Sei* $(h, q)=1$. *Dann ist*

$$|S(h, q)| = \begin{cases} q^{1/2} & \text{für } q \equiv 1 \pmod 2, \\ 0 & \text{für } q \equiv 2 \pmod 4, \\ (2q)^{1/2} & \text{für } q \equiv 0 \pmod 4) \end{cases} \tag{6}$$

Beweis. [3], S. 10, Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2. *Für* $(q_1, q_2)=1$ *ist*

$$S(h, q_1 q_2) = S(hq_2, q_1) S(hq_1, q_2). \tag{7}$$

Beweis. [3], S. 13, Hilfssatz 5.

Hilfssatz 3. *Bei ungeradem* h *ist*

$$S(h, 2^r) = \begin{cases} 2^{(r-2)/2} S(h, 4) & \textit{für gerade } r, \\ 2^{(r-3)/2} S(h, 8) & \textit{für ungerade } r > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Bei $p \nmid h$ $(p>2)$ *ist*

$$S(h, p^r) = \begin{cases} p^{r/2} & \textit{für gerade } r, \\ p^{(r-1)/2} S(h, p) & \textit{für ungerade } r. \end{cases} \tag{9}$$

Beweis. [3], S. 11.

Jetzt setzen wir

$$T(h, q) = q^{-1} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^\lambda}\right) \sum_{m|q} \mu(m) \frac{1}{m^\lambda} S(m^{2\lambda} h, q), \tag{10}$$

$$A(q, n) = \sum_{\substack{h \leqq q \\ (h,q)=1}} T^s(h, q) e\left(-n \frac{h}{q}\right), \tag{11}$$

wobei $a|b$ bedeutet, dass a in b aufgeht, und $\mu(n)$ ist die Möbiussche Funktion.

Hilfssatz 4. *Für* $(h, q)=1$ *ist*

$$T(h, q) = (q^{-1/2+\varepsilon}). \tag{12}$$

Beweis. Nach (5) und (6) ist

$$S(h, q) = O(\sqrt{q}\sqrt{(h, q)}), \tag{13}$$

Folglich

$$\begin{aligned} T(h, q) &= O\left(q^{-1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}\sum_{m|q}\frac{1}{m^\lambda}q^{1/2}m^\lambda\right) \\ &= O\left(q^{-1/2}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}\sum_{m|q}1\right) = O(q^{-1/2+\varepsilon}),\ \varepsilon>0. \end{aligned} \tag{14}$$

Hilfssatz 5. *Für* $(q_1, q_2)=1$ *ist*

$$T(h, q_1q_2) = T(hq_1, q_2)T(hq_2, q_1). \tag{15}$$

Beweis. Setzt man zur Abkürzung

$$T_1(q) = q^{-1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}, \tag{16}$$

und

$$T_2(h, q) = \sum_{m|q}\mu(m)\frac{1}{m^\lambda}S(m^{2\lambda}h, q), \tag{17}$$

so folgt aus (10)

$$T(h, q) = T_1(q)T_2(h, q). \tag{18}$$

In Verbindung mit (4) und (7) ergibt sich folgendes

$$\begin{aligned} T_2(h, q_1q_2) &= \sum_{m_1|q_1}\sum_{m_2|q_2}\mu(m_1m_2)(m_1m_2)^{-\lambda}S(m_1^{2\lambda}m_1^{2\lambda}h, q_1q_2) \\ &= \sum_{m_1|q_1}\mu(m_1)m_1^{-\lambda}\sum_{m_2|q_2}(m_2)m_2^{-\lambda}S(m_1^{2\lambda}m_2^{2\lambda}hq_2, q_1)S(m_1^{2\lambda}m_2^{2\lambda}hq_1, q_2) \\ &= \sum_{m_1|q_1}\mu(m_1)m_1^{-\lambda}S(m_1^{2\lambda}hq_2, q_1)\sum_{m_2|q_2}\mu(m_2)m_2^{-\lambda}S(m_2^{2\lambda}hq_1, q_2) \\ &= T_2(hq_2, q_1)T(hq_1, q_2), \end{aligned} \tag{19}$$

und ausserdem ist

$$T_1(q_1q_2) = T_1(q_1)T_1(q_2),\ (q_1, q_2) = 1. \tag{20}$$

Dann folgt die Behauptung des Hilfssatzes aus (16)–(20).

Hilfssatz 6. *Für* $h\equiv h'$ *(mod* q*) ist*

$$T(h, q) = T(h', q), \tag{21}$$

und für $(k, q)=1$ *ist*

$$T(k^2h, q) = T(h, q). \tag{22}$$

Hilfssatz 7. *Für* $(q_1, q_2)=1$ *ist*

$$A(q_1q_2, n) = A(q_1, n)A(q_2, n). \tag{23}$$

Beweis. Wegen (11) und (21) ist die linke Seite von (23) gleich

$$\begin{aligned} A(q_1q_2, n) &= \sum_{\substack{h \leqq q_1q_2 \\ (h_1, q_1q_2)=1}} T^s(h, q_1q_2)e\left(-\frac{nh}{q_1q_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{h_1 \leqq q_1 \\ (h_1, q_1)=1}} \sum_{\substack{h_2 \leqq q_2 \\ (h_2, q_2)=1}} T^s(h_1q_2+h_2q_1, q_1q_2)e\left(-\frac{n(h_1q_2+h_2q_1)}{q_1q_2}\right) \end{aligned}$$

Hier ist nach (21), (22) und Hilfssatz 5

$$\begin{aligned} T(h_1q_2+h_2q_1, q_1q_2) &= T(h_1q_2^2+h_2q_1q_2, q_1)T(h_1q_2q_1+h_2q_1^2, q_2) \\ &= T(h_1, q_1)T(h_2, q_2). \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} A(q_1q_2, n) &= \sum_{\substack{h_1 \leqq q_1 \\ (h_1, q_1)=1}} T^s(h_1, q_1)e\left(-\frac{nh_1}{q_1}\right) \sum_{\substack{h_2 \leqq q_2 \\ (h_2, q_2)=1}} T^s(h_2, q_2)e\left(-\frac{nh_2}{q_2}\right) \\ &= A(q_1, n)A(q_2, n). \end{aligned}$$

Hilfssatz 8. *Setzt man*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q, n), \tag{24}$$

so konvergiert $\mathfrak{S}$ *absolut. Setzt man*

$$\chi(p) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} A(p^l, n), \tag{25}$$

so ist $\chi(p)$ *reell und*

$$\mathfrak{S} = \prod_p \chi(p)\,. \tag{26}$$

Beweis. Die Richtigkeit des Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz 4, 7 und (11).

Hilfssatz 9. *Es gilt*

$$\chi(p)=\sum_{l=0}^{2\lambda-1}A(p^l,n) \quad \textit{für} \quad p>2\,, \tag{27}$$

und

$$\chi(2)=\sum_{l=0}^{2\lambda+1}A(2^l,n). \tag{28}$$

Beweis. Nach Definition von $T(h, q)$, ist es

$$T(h,p^k)=\frac{1}{p^k}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}(S(h,p^k)-p^{-\lambda}S(p^{2\lambda}h,p^k)), \tag{29}$$

Dann hat man nach (5)

$$T(h,p^k)=p^{-k}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}(S(h,p^k)-p^\lambda S(h,p^{k-2\lambda})),\ (k\geqq 2\lambda). \tag{30}$$

Benutzt man hier die beiden Identitäten (8) und (9), so folgt

$$T(h,p^k)=0 \quad \text{für} \quad p>2,\ k\geqq 2\lambda,\ p\not| h,$$

und

$$T(h,2^k)=0 \quad \text{für} \quad k\geqq 2\lambda+2,\ 2\not| h.$$

Hieraus ergibt sich der Hilfssatz.

Aus Hilfssatz 1 und (29) ergibt sich $(p\not| 2h)$,

$$\begin{aligned}|T(h.\ p^k)|&\leqq p^{-k}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-1}(p^{k/2}+p^{-\lambda}p^k)\\&\leqq\left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{-1}(p^{-k/2}+p^{-\lambda})\\&\leqq\frac{27}{26}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3}\right)<1\,.\end{aligned} \tag{31}$$

Wegen (31), (11) und $s\geqq 5$ ist augenscheinlich

$$|\chi(p)-1|\leqq\xi(p)\ \ (p>2), \tag{32}$$

wobei

$$\xi(p)=\sum_{k\leqq 2\lambda-1}(p-1)p^{k-1}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-5}(p^{-5/2}+p^{-\lambda})^5\,. \tag{33}$$

Hilfssatz 10. *Für* $p>2$ *und* $\lambda\geqq 3$ *ist*

$$0<\xi(p)<1\,. \tag{34}$$

Beweis. Nach Definition von $\xi(p)$ ist es

$$\xi(p)=\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}(p-1)p^{k-1}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-5}(p^{-k/2}+p^{-\lambda})^5$$

$$=\frac{p-1}{p}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-5}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^k(p^{-k/2}+p^{-\lambda})^5$$

$$=\frac{p-1}{p}\left(1-\frac{1}{p^\lambda}\right)^{-5}\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^k\frac{1}{p^{kj/2}}\frac{1}{p^{\lambda(s-j)}}$$

$$=\frac{p-1}{p}\frac{1}{(p^\lambda-1)^5}\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}p^{\lambda j}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{-(j/2-1)k}.$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\xi_j=\frac{p-1}{p}\binom{5}{j}p^{\lambda j}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{-(j/2-1)k},\quad (j=0,\cdots,5),$$

so folgt

$$\xi(p)=\frac{1}{(p^\lambda-1)^5}\sum_{0\leqq j\leqq 5}\xi_j,$$

wo ist

$$\xi_0=\frac{p-1}{p}\binom{5}{0}p^0\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^k=\frac{p-1}{p}p\frac{p^{2\lambda-1}-1}{p-1}<p^{2\lambda-1},$$

$$\xi_1=\frac{p-1}{p}\binom{5}{1}p^\lambda\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{k/2}=5\frac{p-1}{p}\cdot p^\lambda\cdot p^{1/2}\frac{p^{(2\lambda-1)/2}-1}{p^{1/2}-1}$$

$$=5p^{\lambda-1}(p^\lambda-p^{1/2})(p^{1/2}+1)$$

$$<5p^{\lambda-1}\cdot p^\lambda\cdot p=5p^{2\lambda},$$

$$\xi_2=\frac{p-1}{p}\binom{5}{2}p^{2\lambda}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^0=10(2\lambda-1)(p-1)p^{2\lambda-1}$$

$$<10(2\lambda-1)p^{2\lambda}$$

$$\xi_3=\frac{p-1}{p}\binom{5}{3}p^{3\lambda}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{-k/2}$$

$$=10\frac{p-1}{p}p^{3\lambda}\cdot\frac{p^{(2\lambda-1)/2}-1}{p^{1/2}-1}p^{-(2\lambda-1)/2}$$

$$=10p^{2\lambda-1/2}(p^{\lambda-1/2}-1)(p^{1/2}+1)$$

$$<10\cdot p^{2\lambda-1/2}\cdot p^{\lambda-1/2}\cdot p=10p^{3\lambda}$$

$$\xi_4=\frac{p-1}{p}\binom{5}{4}p^{4\lambda}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{-k}<\frac{p-1}{p}\binom{5}{4}p^{4\lambda}\sum_{1\leqq k\leqq 2\lambda-1}p^{-k}$$

$$<5\frac{p-1}{p}p^{4\lambda}\cdot\frac{1}{p-1}=5p^{4\lambda-1},$$

und

$$\xi_5 = \frac{p-1}{p}\binom{5}{5} p^{5\lambda} \sum_{1 \leqq k \leqq 2\lambda-1} p^{-3k/2} < \frac{p-1}{p} p^{5\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} p^{-3k/2}$$

$$< \frac{p-1}{p} p^{5\lambda} \frac{1}{p^{3/2}-1}$$

$$< \frac{p^{5\lambda}}{p^{3/2}-1}.$$

Nun nehmen wir an, es sei $\lambda \geqq 3$. Dann folgt

$$p^\lambda - 1 \geqq \frac{26}{27} p^\lambda$$

und

$$p^{3/2} - 1 > \frac{4}{5} p.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \xi(p) &= \frac{1}{(p^\lambda-1)^5} \sum_{0 \leqq j \leqq 5} \xi_j \\ &< \left(\frac{27}{26}\right)^5 p^{-5\lambda} \left\{ p^{2\lambda-1} + 5p^{2\lambda} + 10(2\lambda-1)p^{2\lambda} + 10p^{3\lambda} + 5p^{4\lambda-1} + p^{5\lambda} \cdot \frac{5}{4} \cdot p^{-3/2} \right\} \\ &= \left(\frac{27}{26}\right)^5 \left\{ \frac{1}{p^{3\lambda+1}} + \frac{5}{p^{3\lambda}} + \frac{10(2\lambda-1)}{p^{3\lambda}} + \frac{10}{p^{2\lambda}} + \frac{5}{p^{\lambda+1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{p^{3/2}} \right\} \\ &< \left(\frac{27}{26}\right)^5 \left(\frac{1}{3^{10}} + \frac{10}{3^6} + \frac{5}{3^4} + \frac{5}{4}\frac{1}{3^{3/2}} + \frac{20\lambda-5}{3^{3\lambda}} \right) \\ &= \left(\frac{27}{26}\right)^5 \left(\frac{1}{3^{10}} + \frac{10}{3^6} + \frac{5}{3^4} + \frac{5}{4}\frac{1}{3^{3/2}} \right) + \left(\frac{27}{26}\right)^5 \frac{20\lambda-5}{3^{3\lambda}} \\ &= 0.38 \ldots + \left(\frac{27}{26}\right)^5 \frac{20\lambda-5}{3^{3\lambda}}. \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$f(\lambda) = \frac{20\lambda-5}{3^{3\lambda}} = \frac{20\lambda-5}{27^\lambda},$$

so folgt $\frac{df(\lambda)}{d\lambda} < 0$ $(\lambda \geqq 3)$. Es ist dann $f(3) \geqq f(\lambda)$ $(\lambda \geqq 3)$.

Es ergibt sich somit für $\lambda \geqq 3$

$$\begin{aligned} 0 < \xi(p) &< 0.38 \ldots + \left(\frac{27}{26}\right)^5 f(3) \\ &= 0.38 \ldots + 0.00 \ldots \\ &< 1, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Nach (33) ist

$$\xi(p) = O(p^{-3/2}) \tag{35}$$

und, wie wir nach (25) sehen werden, ist $\chi(p)$ reell.

Wegen (32) folgt hieraus

$$\prod_{p>2} \chi(p) \geqq C\,, \tag{36}$$

wobei ist

$$C = C(\lambda) = \prod_{p>2}(1-\xi(p)) > 0 \tag{37}$$

und C nur von λ abhängt.

Hilfssatz 11. *Für $s \geqq 5$ und $\lambda \geqq 2$ sei $N(s, n)$ die Lösungsanzahl von*

$$m_1^2+m_2^2+\cdots+m_s^2 \equiv n \pmod{2^{2\lambda+1}}, \tag{38}$$
$$2^\lambda \nmid m_i \quad \textit{für} \quad 1 \leqq i \leqq s\,.$$

Dann ist

$$\chi(2) = 2^{-(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^{-s}2^{2\lambda+1}N(s, n). \tag{39}$$

Zum Beweis brauchen wir zunächst folgendes:

Hilfssatz 12. *Für $0 \leqq l \leqq 2\lambda+1$ ist*

$$2^{\lambda+1}(2^\lambda-1)T(h, 2^{2\lambda+1-l}) = \sum_{\substack{m \leqq 2^{2\lambda+1} \\ 2^\lambda \nmid m}} e\left(\frac{2^l m^2 h}{2^{2\lambda-1}}\right) \tag{40}$$

Beweis. Der Fall $l=2\lambda+1$ ist klar, also sei $0 \leqq l \leqq 2\lambda$. Nach (3), (5), der Definition von $T(h, 2^k)$ und $k=2\lambda+1-l$ ist

$$T(h, 2^{2\lambda+1-l}) = \frac{1}{2^{2\lambda+1-l}}\left(1-\frac{1}{2^\lambda}\right)^{-1}\left(S(h, 2^{2\lambda+1-l})-\frac{1}{2^\lambda}S(2^{2\lambda}h, 2^{2\lambda+1-l})\right).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
2^{\lambda+1}(2^\lambda-1)T(h, 2^{2\lambda+1-l}) &= 2^l(S(h, 2^{2\lambda+1-l})-2^{-\lambda}S(2^{2\lambda}h, 2^{2\lambda+1-l})) \\
&= S(2^l h, 2^{2\lambda+1})-S(2^{l+\lambda}h, 2^{\lambda+1}) \\
&= \sum_{m \leqq 2^{2\lambda+1}} e\left(\frac{2^l m^2 h}{2^{2\lambda+1}}\right)-\sum_{m \leqq 2^{\lambda+1}} e\left(\frac{2^{l+\lambda}m^2 h}{2^{\lambda+1}}\right) \\
&= \sum_{m \leqq 2^{2\lambda+1}} e\left(\frac{2^l m^2 h}{2^{2\lambda+1}}\right)-\sum_{m \leqq 2^{\lambda+1}} e\left(\frac{2^l(2^\lambda m)^2 h}{2^{2\lambda+1}}\right) \\
&= \sum_{\substack{m \leqq 2^{2\lambda+1} \\ 2^\lambda \nmid m}} e\left(\frac{2^l m^2 h}{2^{2\lambda+1}}\right), \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Beweis von Hilfssatz 11. Für $0 \leqq l \leqq 2\lambda+1$ ist nach Hilfssatz 12

$$2^{(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^s T^s(h, 2^{2\lambda+1-l}) = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_s} e\left(\frac{2^l(m_1^2+\cdots+m_s^2)h}{2^{2\lambda+1}}\right)$$
$$= \sum_{m \leqq 2^{2\lambda+1}s} N(s, m) e\left(\frac{2^l mh}{2^{2\lambda+1}}\right).$$

Nach (28) und (11) ist

$$\chi(2) = \sum_{l=0}^{2\lambda+1} A(2^{2\lambda+1-l}, n) = \sum_{l=0}^{2\lambda+1} \sum_{h \leqq 2^{2\lambda+1-l}} T^s(h, 2^{2\lambda+1-l}) e\left(-n\frac{2^l h}{2^{2\lambda+1}}\right)$$
$$= 2^{-(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^{-s} \sum_{m \leqq 2^{2\lambda+1}s} N(s, m) \sum_{l=0}^{2\lambda+1} \sum_{h \leqq 2^{2\lambda+1-l}} e\left(\frac{2^l(m-n)h}{2^{2\lambda+1}}\right),$$
$$= 2^{-(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^{-s} \sum_{m \leqq 2^{\lambda+1}s} N(s, m) \sum_{h \leqq 2^{2\lambda+1}} e\left(\frac{(m-n)h}{2^{2\lambda+1}}\right)$$
$$= 2^{-(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^{-s} 2^{2\lambda+1} N(s, n).$$

Dann folgt die Behauptung.

Hilfssatz 13. *Ist n λ-konditional, so folgt*

$$\mathfrak{S} \geqq 2^{-(\lambda+1)s}(2^\lambda-1)^{-s} 2^{2\lambda+1} C.$$

Beweis. Die Behauptung des Hilfssatzes folgt aus (25), (36), (40) und der Definition von $N(s, n)$.

§ 2. Die Funktion $f(\theta, u)$.

Es ist

$$\mu_\lambda(m) = \sum_{l^\lambda n = m} \mu(l) = 1 \text{ oder } 0, \tag{41}$$

je nachdem m λ-frei ist oder nicht.

Es sei

$$g(\theta, u) = \sum_{1 \leqq m \leqq [u]} e(m^2\theta). \tag{42}$$

Dann ist nach Definition von $S(h, q)$

$$S(h, q) = g\left(\frac{h}{q}, q\right) = \sum_{m \leqq q} e\left(\frac{m^2 h}{q}\right). \tag{43}$$

Für $u \leqq q$, $(h, q) = 1$ ist

$$g\left(\frac{h}{q}, u\right) = O(q^{1/2+\varepsilon}), \tag{44}$$

([1], S. 127).

Setzt man

$$d=(h,q),\ h_1=h/d \text{ und } q_1=q/d,$$

so folgt wegen (5)

$$\begin{aligned} g\left(\frac{h}{q},v\right) &= g\left(\frac{h_1}{q_1},v\right)=\left[\frac{v}{q_1}\right]S(h_1,q_1)+g\left(\frac{h_1}{q_1},v-q_1\left[\frac{v}{q_1}\right]\right) \\ &= \frac{v}{q_1}S(h_1,q_1)+O(q_1^{1/2+\varepsilon}) \\ &= \frac{v}{q}S(h,q)+O(q^{1/2+\varepsilon}). \end{aligned} \tag{45}$$

Dann ist nach (6)

$$\begin{aligned} g\left(\frac{h}{q},v\right) &= O(vq_1^{-1/2})+O(q_1^{1/2+\varepsilon}) \\ &= O(vq^{-1/2}\sqrt{(h,q)})+O(q^{1/2+\varepsilon}). \end{aligned} \tag{46}$$

Es sei

$$f(\theta,u)=\sum_{1\leqq m\leqq[u]}\mu_\lambda(m)e(m^2\theta). \tag{47}$$

Dann ist nach (41)

$$\begin{aligned} f(x,u) &= \sum_{1\leqq m\leqq[u]}\mu_\lambda(m)e(m^2x)=\sum_{m\leqq[u]}\sum_{j^\lambda k=m}\mu(j)e(m^2x) \\ &= \sum_{\substack{j,k \\ m=j^\lambda k\leqq u}}\mu(j)e(m^2x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mu(j)\sum_{k\leqq j^{-\lambda}u}e(j^{2\lambda}k^2x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mu(j)g(j^{2\lambda}x,j^{-\lambda}u). \end{aligned} \tag{48}$$

Hilfssatz 14. *Es sei für* $(h,q)=1$,

$$u\leqq n^{1/2},\ n^{1/B}<q\leqq n^{1-1/B},\ 2\lambda B\geqq D. \tag{49}$$

Dann ist

$$f\left(\frac{h}{q},u\right)=O(n^{1/D+(1-1/B)/2+\varepsilon}). \tag{50}$$

Beweis. Es ist klar, dass

$$|g(\theta,v)|\leqq v. \tag{51}$$

ist. Nach (46), (48), (49), (51) und $(h,q)=1$ ist

$$f\left(\frac{h}{q}, u\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) g\left(j^{2\lambda} \frac{h}{q}, j^{-\lambda} u\right)$$

$$= O(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-\lambda} u q^{-1/2} \sqrt{(j^{2\lambda} h, q)}) + 0(n^{1/D} q^{1/2+\varepsilon}) + O(\sum_{j>[n^{1/D}]} j^{-\lambda} u)$$

$$= O(n^{1/D}(uq^{-1/2} + q^{1/2+\varepsilon})) + O(\sum_{j>n^{1/D}} j^{-\lambda} u)$$

$$= O(n^{1/D}(uq^{-1/2} + q^{1/2+\varepsilon})) + O(un^{-(\lambda-1)/D})$$

$$= O(n^{1/D}(n^{1/2-1/2B} + n^{(1-1/B)/2+\varepsilon})) + O(n^{1/2-(\lambda-1)/D})$$

$$= O(n^{1/D+(1-1/B)/2+\varepsilon}) + O(n^{1/2-(\lambda-1)/D})$$

$$= O(n^{1/D+(1-1/B)/2+\varepsilon})$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 15. *Es sei für* $(h, q) = 1$

$$q \leqq n^{1/B},\ u \leqq n^{1/2},\ C \geqq 2\lambda,\ F \geqq 2\lambda \tag{52}$$

Dann ist

$$f\left(\frac{h}{q}, u\right) = \frac{1}{\zeta(\lambda)} uT(h, q) + O(n^{1/2-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon}). \tag{53}$$

Beweis. Aus (48), (51) und (52) ergibt sich

$$\left| f\left(\frac{h}{q}, u\right) - \sum_{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} \mu(j) g\left(j^{2\lambda} \frac{h}{q}, j^{-\lambda} u\right) \right| \leqq \sum_{j > [n^{1/C} q^{1/F}]} j^{-\lambda} u$$

$$= O(n^{1/2-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F}) \tag{54}$$

Wegen (45) ist dann

$$\sum_{n \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} \mu(j) g\left(\frac{j^{2\lambda} h}{q}, j^{-\lambda} u\right) = \frac{1}{q} u \sum_{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} \mu(j) j^{-\lambda} S(j^{2\lambda} h, q)$$

$$+ O(\sum_{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} q^{1/2+\varepsilon})$$

$$= \frac{u}{q} \sum_{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} \mu(j) j^{-\lambda} S(j^{2\lambda} h, q)$$

$$+ O(n^{1/C} q^{-1/F+1/2+\varepsilon}). \tag{55}$$

Anderseits ist wegen (4)

$$\sum_{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}]} \mu(j) j^{-\lambda} S(j^{2\lambda} h, q) = \sum_{m | q} \sum_{\substack{j \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}] \\ (j, q) = m}} \mu(j) j^{-\lambda} S(j^{2\lambda} h, q)$$

$$= \sum_{m | q} \sum_{\substack{mk \leqq [n^{1/C} q^{-1/F}] \\ (k, q/m) = 1}} \mu(mk)(mk)^{-\lambda} S(m^{2\lambda} k^{2\lambda} h, q)$$

$$= \sum_{m|q} \mu(m) m^{-1} \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ (k, q_1)=1}} \mu(k) k^{-\lambda} S(m^{2\lambda} k^{2\lambda} h, q)$$

$$= \sum_{m|q} \mu(m) \frac{1}{m^\lambda} S(m^{2\lambda} h, q) \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ (k, q_1)=1}} \mu(k) k^{-\lambda}, \quad (56)$$

wo $q = mq_1$ ist.

Weiter

$$\sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ (k, q_1)=1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} = \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ (k, q)=1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} + \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ p |, km \\ p \nmid q_1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda}$$

$$= \sum_{(k, q)=1} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} + \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ p | k, m \\ p \nmid q_1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} + O\Bigl(\sum_{k > n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1}} \frac{1}{k^\lambda} \Bigr)$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + O(n^{-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F} m^{\lambda-1})$$

wobei sind

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{(k, q)=1} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} = \frac{1}{\zeta(\lambda)} \prod_{p|q} \Bigl(1 - \frac{1}{p^\lambda} \Bigr)^{-1},$$

und

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ p | k, m \\ p \nmid q_1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda}$$

$$= \sum_{\substack{h \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} p^{-1} \\ p | m,\ p \nmid q_1}} \frac{\mu(p) \mu(h)}{p^\lambda h^\lambda} = \sum_{\substack{p | m \\ p \nmid q_1}} \frac{\mu(p)}{p^\lambda} \sum_{h \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} p^{-1}} \frac{\mu(h)}{h^\lambda}$$

$$= O\Bigl(\sum_{p|m} \frac{1}{p^\lambda} \sum_{h \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} p^{-1}} \frac{1}{h^\lambda} \Bigr)$$

$$= O\Bigl(\sum_{p|m} \frac{1}{p^\lambda} (n^{-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F} m^{\lambda-1}) \Bigr)$$

$$= O(n^{-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F} m^{\lambda-1+\varepsilon}).$$

Folglich ist

$$\sum_{\substack{k \leqslant n^{1/C} q^{-1/F} m^{-1} \\ (k, q_1)=1}} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} = \frac{1}{\zeta(\lambda)} \prod_{p|q} \Bigl(1 - \frac{1}{p^\lambda} \Bigr)^{-1} + O(n^{-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F} m^{\lambda-1+\varepsilon}) \quad (57)$$

Nach (10), (13), (56) und (57) ist

$$\sum_{j\leqq n^{1/C}q^{-1/F}} \mu(j)j^{-\lambda}S(j^{2\lambda}h,\,q) = \sum_{m|q}\mu(m)\frac{1}{m^{\lambda}}S(m^{2\lambda}h,\,q)$$
$$\times\left[\frac{1}{\zeta(\lambda)}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{\lambda}}\right)^{-1}+O(n^{-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F}m^{\lambda-1+\varepsilon})\right]$$
$$=\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,qT(h,\,q)+O(n^{-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+1/2}$$
$$\times\sum_{m|q}m^{-\lambda}\cdot m^{\lambda-1+\varepsilon}\cdot m^{\lambda}q^{1/2})$$
$$=\frac{1}{\zeta(\lambda)}qT(h,\,q)+O(n^{-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+1/2}\sum_{m|q}m^{\lambda-1+\varepsilon})$$
$$=\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,qT(h,\,q)+O(n^{-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+1/2+\lambda-1+\varepsilon})$$

und somit

$$\frac{u}{q}\sum_{j\leqq[n^{1/C}q^{-1/F}]}\mu(j)j^{-\lambda}S(j^{2\lambda}h,\,q)=\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,uT(h,\,q)+O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F-3/2+\lambda+\varepsilon})\,.$$

Zusammenfassend haben wir

$$f\left(\frac{h}{q},\,u\right)=\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,uT(h,\,q)+O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F})+0(n^{1/C}q^{-1/F+1/2+\varepsilon})$$
$$+O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F-3/2+\lambda+\varepsilon})$$
$$=\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,uT(h,\,q)+O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F-3/2+\lambda+\varepsilon})$$
$$+O(n^{1/C}q^{-1/F+1/2+\varepsilon})\,.$$

Nach $C\geqq 2\lambda$ folgt die Behauptung.

Hilfssatz 16. *Es sei* $2\lambda B\geqq D$,

$$n^{1/B}<q\leqq n^{1-1/B},\ \ |\alpha|\leqq n^{1/B-1}q^{-1},\ (h,\,q)=1\,. \tag{58}$$

Dann ist

$$f\left(\frac{h}{q}+\alpha,\,n^{1/2}\right)=O(n^{1/D+(1-B^{-1})/2+\varepsilon})\,. \tag{59}$$

Beweis. Es ist

$$f\left(\frac{h}{q}+\alpha,\,\sqrt{n}\right)=\sum_{1\leqq l\leqq n}\left(f\left(\frac{h}{q},\,\sqrt{l}\right)-f\left(\frac{h}{q},\,\sqrt{l-1}\right)\right)e(l\alpha) \tag{60}$$

also, auf Grund vom Abelschen Lemma

$$f\left(\frac{h}{q}+\alpha, \sqrt{n}\right) = f\left(\frac{h}{q}, \sqrt{n}\right)e(n\alpha)+\sum_{l\leq n-1} f\left(\frac{h}{q}, \sqrt{l}\right)(e(l\alpha)-e((l+1)\alpha)$$
$$= O(n^{1/D+(1-B^{-1})/2+\varepsilon})+O(n|\alpha|n^{1/D+(1-B^{-1})/2+\varepsilon})$$
$$= O(n^{1/D+(1-B^{-1})/2+\varepsilon}(1+n|\alpha|))$$
$$= O(n^{1/D+(1-B^{-1}/2+\varepsilon}).$$

Hilfssatz 17. *Es sei*

$$q \leqq n^{1/B},\ (h, q) = 1\,.$$

Dann ist

$$f\left(\frac{h}{q}+\alpha, n\right) = \frac{1}{2\zeta(\lambda)}\,T(h, q)\psi(\alpha, n)+O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon}(1+n|\alpha|)) \quad (61)$$

mit

$$\psi(\alpha, u) = \sum_{l=1}^{[u]} \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{l!}\,e(l\alpha)\,. \quad (62)$$

Beweis. Trivial ist zunächst die Abschätzung

$$\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!} = \sqrt{l}+O(l^{-1/2}). \quad (63)$$

Setzen wir jetzt

$$\Delta(l) = f\left(\frac{h}{q}, \sqrt{l}\right)-\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,T(h, q)\,\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}\,, \quad (64)$$

dann ist nach Hilfssatz 4 und 15

$$\Delta(l) = f\left(\frac{h}{q}, \sqrt{l}\right)-\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,T(h, q)\sqrt{l}+\frac{1}{\zeta(\lambda)}\,T(h, q)\left(\sqrt{l}-\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}\right)$$
$$= O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon})+O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\,q^{-1/2+\varepsilon}\right)$$
$$= O(n^{1/2-(\lambda-1)/C}q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon}) \quad (1\leqq l\leqq u). \quad (65)$$

Benutzt man hier (62) und die Identität

$$\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}-\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(l-1)!} = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{2l!} \quad (l\geqq 1)\,, \quad (66)$$

so folgt

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}T(h,q)\psi(\alpha,n)=\frac{1}{\zeta(\lambda)}T(h,q)\sum_{l\leqq n}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}-\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(l-1)!}\right)e(l\alpha). \tag{67}$$

Aus (60), (63) und (66) folgt,

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{h}{q}+\alpha,\sqrt{n}\right)-\frac{1}{2\zeta(\lambda)}T(h,q)\psi(\alpha,n)\\
&\quad=\sum_{l\leqq n}\left(f\left(\frac{h}{q},\sqrt{l}\right)-f\left(\frac{h}{q},\sqrt{l-1}\right)\right)e(l\alpha)-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\zeta(\lambda)}T(h,q)\sum_{l\leqq n}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}-\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(l-1)!}\right)e(l\alpha)\\
&\quad=\sum_{l\leqq n}\left(f\left(\frac{h}{q},\sqrt{l}\right)-\frac{1}{\zeta(\lambda)}T(h,q)\frac{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{l!}-f\left(\frac{h}{q},\sqrt{l-1}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{\zeta(\lambda)}T(h,q)\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{(l-1)!}\right)e(l\alpha)\\
&\quad=\sum_{l\leqq n}(\Delta(l)-\Delta(l-1))e(l\alpha)\\
&\quad=\Delta(n)e(n\alpha)+\sum_{l\leqq n-1}\Delta(l)(e(l\alpha)-e((l-1)\alpha))\\
&\quad=O(n^{1/2-(\lambda-1)/D}q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon}(1+n|\alpha|)).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (61) aus $C\geqq 2\lambda$, $F\geqq 2\lambda$.

Es sei $I(h,q)$ ein Intervall der Gestalt

$$\frac{h}{q}-q^{-1}\theta_0\leqq\theta\leqq\frac{h}{q}+q^{-1}\theta_0 \text{ mit } \theta_0=n^{1/B-1}, \tag{68}$$

wo

$$1\leqq q<n^{1/B},\ 1\leqq h<q,\ (h,q)=1 \tag{69}$$

ist. Es ist ersichtlich, daß je zwei verschiedene $I(h,q)$ keinen Punkt gemeinsam haben und alle $I(h,q)$ im Intervall $(\theta_0,\ 1+\theta_0)$ enthalten sind. Es sei E die Menge $\theta\in(\theta_0,\ 1+\theta_0)$, wo θ zu keinem $I(h,q)$ gehört

Hilfssatz 18. *Es sei $\theta\in E$. Dann ist*

$$f(\theta,\sqrt{n})=O(n^{1/D+(1-B^{-1})/2+\varepsilon}). \tag{70}$$

Beweis. Es gibt q und h mit

$$|q\theta-h|\leqq n^{1/B-1}=\theta_0,\ q\leqq n^{1-1/B} \text{ für } (h,q)=1. \tag{71}$$

Hierbei ist nach Definition von E $\theta_0 < \theta \leqq \theta_0 + 1$ und $\theta \notin I(1, 1)$. Es ist somit $\theta_0 < \theta < 1 - \theta_0$. Aus diesem und (71) folgt $0 < h \leqq q$. Somit ist, nach Definition von E, $n^{1/B} < q \leqq n^{1-1/B}$. Nimmt man hier $\alpha = \theta - \frac{h}{q}$, so folgt $|\alpha| \leqq n^{1/B-1} q^{-1}$. Hieraus folgt die Behauptung durch Anwendung des Hilfssatzes 16.

Hilfssatz 19. *Es sei* $s \geqq 5$, $D \leqq 2\lambda B$. *Dann ist*

$$\int_E f^s(\theta, \sqrt{n}) e(-n\theta) d\theta = O(n^{s/2-1-(s-4)(1/2B-1/D)+\varepsilon}). \tag{72}$$

Beweis. Nach (47) ist

$$f^2(\theta, \sqrt{n}) = \sum_{m=2}^{2n} c_m e(m\theta)$$

wo c_m die Anzahl gewisser Darstellungen von m als Summe von zwei Quadraten ist. Es sei $r(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m als Summe von 2 Quadraten. Dann ist $0 \leqq c_m \leqq r(m) = O(m^\varepsilon)$. Daher ist nach Hilfssatz 18

$$\begin{aligned} \left| \int_E f^s(\theta, \sqrt{n}) e(-n\theta) d\theta \right| &\leqq \int_E |f^s(\theta, n)| \, d\theta \\ &= O(n^{(1/D+(1-B^{-1})/2)(s-4)+\varepsilon} \int_E |f^4(\theta, n)| \, d\theta) \\ &= O(n^{1+\varepsilon+(1/D+(1-B^{-1})/2)(s-4)}) \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich sofort die Behauptung (72).

§ 3. Beweis von Sätzen $T_{\lambda,1}$ und $T_{\lambda,2}$.

Für die Anzahl $N_{s,\lambda}(n)$ der Darstellungen von n in der Form

$$n = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_s^2$$
$$m_i \ (1 \leqq i \leqq s), \ \lambda\text{-freie Zahlen,}$$

gilt dann

$$N_{s,\lambda}(n) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+1} f^s(\theta, n) e(-n\theta) d\theta \,. \tag{73}$$

Dieses Integral $N_{s,\lambda}(n)$ wird in die beiden Integrale

$$N_{s,\lambda}(n) = I_1 + I_2 \tag{74}$$

zerlegt.

Wir setzen

$$I_2 = \int_E f^s(\theta, \sqrt{n})e(-n\theta)d\theta \tag{75}$$

und

$$I_1 = \sum_{q \leqq n^{1/B}} \sum_{\substack{h \leqq q \\ (h,q)=1}} J(h, q), \tag{76}$$

wo

$$\begin{aligned} J(h, q) &= \int_{I(h,q)} f^s(\theta, \sqrt{n})e(-n\theta)d\theta \\ &= e\left(-\frac{nh}{q}\right)\int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} f^s\left(\frac{h}{q}+\alpha, \sqrt{n}\right)e(n\alpha)d\alpha. \end{aligned} \tag{77}$$

ist.

Wir betrachten jetzt das Integral I_1, das einem vorgegebenen Bruch $\frac{h}{q}$ entspricht. Nach (62), (63) und (66) ist

$$|\psi(\alpha, u| \leqq \psi(0, u) = 2\frac{\Gamma\left([u]+\frac{3}{2}\right)}{[u]!} = O(\sqrt{u}). \tag{78}$$

Hilfssatz 20. *Sei* $n^{-1} < |\alpha| \leqq \frac{1}{2}$. *Dann ist*

$$\psi(\alpha, n) = O(|\alpha|^{-1/2}) \tag{79}$$

Beweis. [1], S. 130, Lemma 8.
Aus (78) und (79)

$$\psi(\alpha, n) = O((n^{-1}+|\alpha|)^{-1/2}). \quad \left(|\alpha| \leqq \frac{1}{2}\right) \tag{80}$$

Hilfssatz 21. *Es seien* $l_1 \geqq 0, \cdots, l_k \geqq 0$ *ganz. Für* $x_1 > 0, \cdots, x_k > 0$, $a \geqq 0$ *ist*

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, \cdots, l_k \\ l_1+l_2+\cdots+l_k=a}} \prod_{m=1}^{k} \frac{\Gamma(l_m+x_m)}{l_m!} = \frac{\Gamma(a+x_1+\cdots+x_k)}{\Gamma(x_1+\cdots+x_k)a!} \prod_{m=1}^{k} \Gamma(x_m). \tag{81}$$

Beweis. [1], S. 131, Lemma 9.
Aus (62) und Hilfssatz 21 ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \psi^s(\alpha, n)e(-n\alpha)d\alpha &= \sum_{\substack{l_1, l_2, \cdots, l_s \\ l_1+\cdots+l_s=n_s}} \prod_{m=1}^{s} \frac{\Gamma\left(l_m+\frac{1}{2}\right)}{l_m!} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n!}\Gamma^s\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} + O(n^{s/2-2}). \end{aligned} \tag{82}$$

Aus (79) und $\theta_0 = n^{1/B-1}$ folgt

$$\int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} \psi^s(\alpha, n) e(-n\alpha)\, d\alpha = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} + O(n^{s/2-2}) + O\left(\int_{\theta_0/q}^{1/2} \psi^s(\alpha, n) e(-n\alpha)\, d\alpha\right)$$

$$= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} + O(n^{s/2-2}) + O(n^{(1/B-1)(1-s/2)} q^{s/2-1})$$

$$= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} + O(n^{s/2-2}) + O(n^{s/2-1-(s/2-1)B^{-1}} q^{s/2-1}) \quad (83)$$

Hilfssatz 22. *Es sei* $q \leqq n^{1/B}$. *Für* $(h, q) = 1$ *ist*

$$J(h, q) = e\left(-\frac{nh}{q}\right) \frac{1}{2^s \zeta^s(\lambda)} T^s(h, q) \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1}$$
$$+ O_\alpha(n^{s/2-2} q^{-s/2+\varepsilon}) + O_\beta(n^{s/2-1-(s/2-1)/B} q^{-1+\varepsilon})$$
$$+ O_1(n^{s/2-1+(1/B-(\lambda-1)/C)s+1/B} q^{(\lambda-1)(1/F+1)s-3s/2-1+\varepsilon})$$
$$+ O_2(n^{s/2-1-(\lambda-1)/C} q^{-s/2+(\lambda-1)(1/F+1)+\varepsilon}) \quad (84)$$

Beweis. Benützt man hier Hilfssatz 17 und (12), (80) so folgt

$$f^s\left(\frac{h}{q} + \alpha, \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2^s \zeta^2(\lambda)} T^s(h, q) \psi^s(\alpha, n)$$
$$+ O_1(n^{(1/2-(\lambda-1)/C)s} q^{(\lambda-1)s/F+\lambda s-3s/2+\varepsilon} (1 + n|\alpha|)^s$$
$$+ O_2\left(q^{-(s-1)/2+\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + |\alpha|\right)^{-(s-1)/2}\right.$$
$$\left.(1 + n|\alpha|) n^{1/2-(\lambda-1)/C} q^{(\lambda-1)/F+\lambda-3/2+\varepsilon}\right)$$
$$= \frac{1}{2^s \zeta^s(\lambda)} T^s(h, q) \psi^s(\alpha, n)$$
$$+ O_1(n^{(1/2-(\lambda-1)/C)s} q^{(\lambda-1)s/F+\lambda s-3s/2+\varepsilon} (1 + n|\alpha|^s)$$
$$+ O_2\left(n^{3/2-(\lambda-1)/C} q^{-s/2-1+(\lambda-1)/F+\lambda+\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + |\alpha|\right)^{-s/2+3/2}\right) \quad (85)$$

Aus (77) ergibt sich

$$\int_{I(h,q)} f^s(\theta, \sqrt{n}) e(-n\theta)\, d\theta = e\left(-\frac{nh}{q}\right) \int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} f^s\left(\frac{h}{q} + \alpha, \sqrt{n}\right) e(-n\alpha) d\alpha$$
$$= e\left(-\frac{nh}{q}\right) \frac{1}{2^s \zeta^s(\lambda)} T^s(h, q) \int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} \psi^s(\alpha, n) e(-n\alpha)\, d\alpha$$
$$+ e\left(-\frac{nh}{q}\right) \int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} (O_1 + O_2) e(-n\alpha) d\alpha,$$

und hierin hat man nach (85)

$$\begin{aligned}\int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} O_1 d\alpha &= O(n^{(1/2-(\lambda-1)/C)s} q^{(\lambda-1)s/F+\lambda s-3s/2+\varepsilon} \int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} (1+n|\alpha|)^s d\alpha \\ &= O(n^{(1/2-(\lambda-1)/C)s} q^{(\lambda-1)s/F+\lambda s-3s/2+\varepsilon} n^{s/B} q^{-s}\theta_0 q^{-1}) \\ &= O(n^{s/2-1+(1/B-(\lambda-1)/C)s+1/B} q^{(\lambda-1)(1/F+1)s-3s/2-1+\varepsilon})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\theta_0/q}^{\theta_0/q} O_2 d\alpha &= O\left(n^{3/2-(\lambda-1)/C} q^{-s/2-1+(\lambda-1)/F+\lambda+\varepsilon} \int_0^1 \left(\frac{1}{n}+|\alpha|\right)^{(3-s)/2} d\alpha\right) \\ &= O(n^{3/2-(\lambda-1)/C} q^{-s/2-1+(\lambda-1)/F+\lambda+\varepsilon} n^{(s-3)/2-1}) \\ &= O(n^{s/2-1-(\lambda-1)/C} q^{-s/2+(\lambda-1)(1/F+1)+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Die Behauptung (84) des Hilfssatzes folgt aus (83).

Wegen (84) ist dann

$$\begin{aligned}\sum_{q\leqq n^{1/B}} \sum_{\substack{h\leqq q \\ (h,q)=1}} J(h,q) &= \sum_{q\leqq n^{1/B}} \sum_{\substack{h\leqq q \\ (h,q)=1}} T^s(h,q) e\left(-\frac{nh}{q}\right) \frac{1}{2^s\zeta^s(\lambda)} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} \\ &\quad + \sum_{q\leqq n^{1/B}} \sum_{\substack{h\leqq q \\ (h,q)=1}} (O_\alpha+O_\beta+O_1+O_2) \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{2^s\zeta^s(\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1} \sum_{q\leqq n^{1/B}} A(q,n) \\ &\quad + S_\alpha+S_\beta+S_1+S_2,\end{aligned} \tag{86}$$

wo sind

$$\begin{aligned}S_\alpha &= \sum_q \sum_h O_\alpha = O(n^{s/2-2} \sum_{q\leqq n^{1/B}} q^{1-s/2+\varepsilon}) = O(n^{s/2-2+(2-s/2)/B+\varepsilon}) \\ S_\beta &= \sum_q \sum_h O_\beta = O(n^{s/2-1-(s/2-1)/B} \sum_{q\leqq n^{1/B}} q^{\varepsilon}) = O(n^{s/2-1-(s/2-2)/B+\varepsilon}) \\ S_1 &= \sum_q \sum_h O_1 = O(n^{s/2-1+(1/B-(\lambda-1)/C)s+1/B} \sum_{q\leqq n^{1/B}} q^{(\lambda-1)(1/F+1)s-3s/2+\varepsilon}) \\ &= O(n^{s/2-1+(1/B-(\lambda-1)/C)s+1/B} \sum_{q\leqq n^{1/B}} q^{(\lambda-1)s/F+(\lambda-5/2)s+\varepsilon}) \\ &= O(n^{s/2-1-(\lambda-1)s/C+(s+1)/B} n^{1/B(\lambda-1/sF+(\lambda-5/2)s+1+\varepsilon}) \quad (\lambda\geqq 3), \\ &= O(n^{s/2-1-(\lambda-1)s/C+((\lambda-1)s/F+(\lambda-3/2)s+2)/B+\varepsilon}), \\ S_2 &= \sum_q \sum_h O_2 = O(n^{s/2-1-(\lambda-1)/C} \sum_{q\leqq n^{1/B}} q^{-s/2+(\lambda-1)(1/F+1)+1+\varepsilon}) \\ &= O(n^{s/2-1-(\lambda-1)/C-(s/2-(\lambda-1)/F-\lambda-1)/B+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Setzt man

$$C = F = 2\lambda,\ D = 2\lambda B,\ s \geqq 5, \text{ und}$$
$$B = \left[\frac{1}{5(\lambda-1)}(10\lambda^2-6\lambda-5)\right]+1,$$

so gilt erstens

$$-\frac{\lambda-1}{c}s+\frac{1}{B}\left(\frac{\lambda-1}{F}s+\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)s+2\right)<0,$$

und ferner,

$$-\frac{\lambda-1}{c}-\frac{1}{B}\left(\frac{s}{2}-\frac{\lambda-1}{F}-\lambda-1\right)<0.$$

Wegen Hilfssatz 22 ist

$$\sum_{q\leqq n^{1/B}}\sum_{\substack{h\leqq q\\(h,q)=1}} J(h,q) = \frac{\pi^{s/2}}{2^s\zeta^s(\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1}\sum_{q\leqq n^{1/B}} A(h,q)+O(n^{s/2-1-\delta}), \tag{87}$$

wo ist

$$\delta = \delta(\lambda,\ \varepsilon)>0.$$

Nach (11) und Hilfssatz 4 ist

$$A(q,n) = O\Big(\sum_{\substack{h\leqq q\\(h,q)=1}} q^{-s/2+\varepsilon}\Big) = O(q^{1-s/2+\varepsilon}).$$

Setzen wir $\mathfrak{S}=\sum_{q=1}^{\infty} A(q,n)$, so ergibt sich

$$\sum_{h\leqq n^{1/B}} A(q,n)-\mathfrak{S} = O\Big(\sum_{q>n^{1/B}} A(q,n)\Big) = O\Big(\sum_{q>n^{1/B}} q^{-(s-2)/2+\varepsilon}\Big)$$
$$= O(n^{-(s-4)/2B+\varepsilon}). \tag{88}$$

Aus (72), (73), (87) und (88) ergibt sich

$$N_{s,\lambda}(n) = \frac{\pi^{s/2}}{2^s\zeta^s(\lambda)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{s/2-1}\mathfrak{S}+O(n^{s/2-1-\delta}),\ \delta>0. \tag{89}$$

Beweis von Satz $T_{\lambda,1}$:
Dies folgt unmittelbar aus (89) und Hilfssatz 13.

Hilfssatz 23. *Es sei*

$$n = m_1^2+m_2^2\cdots+m_{s-1}^2+1 \pmod{2^{\lambda+1}}, \tag{90}$$
$$2^\lambda \not| \, m_i,\ i = 1, 2, \cdots, s-1.$$

Dann ist die Zahl n λ-konditional.

Beweis. Wir setzen jetzt

$$(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_{s-1}^2-n+1)\frac{1}{2^{\lambda+1}} = a \geqq 0$$

$$a \equiv A \pmod{2^\lambda},\ 0 \leqq A \leqq 2^\lambda - 1\,.$$

Wir setzen ferner $a = A + 2^\lambda t$ (t ganz). Daraus folgt

$$\begin{aligned}(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_{s-1}^2)-n+1 &= a2^{\lambda+1} \\ &= A2^{\lambda+1}+2^{2\lambda+1}t\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$n \equiv m_1^2+m_2^2+\cdots+m_{s-1}^2+(1-A2^{\lambda+1}) \pmod{2^{2\lambda+1}}\,.$$

Die Behauptung des Hilfssatzes folgt aus folgendem Hilfssatz:

Hilfssatz 24. *Die Kongruenz*

$$m_s^2 \equiv 1 - A2^{\lambda+1} \pmod{2^{2\lambda+1}}$$

ist lösbar mit $2^\lambda \nmid m_s$, $\lambda \geqq 2$ $0 \leqq A < 2^\lambda$.

Beweis. Nach $\lambda \geqq 2$ *ist*

$$2\lambda - 1 \geqq 3$$

und

$$1 - A2^{\lambda+1} \equiv 1 \pmod{2^3}.$$

Die Richtigkeit dieses Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus [2], S. 69.

Hilfssatz 25. *Es sei $s \geqq 2^{\lambda+1}$. Dann sind alle positive ganze Zahlen λ-konditional.*

Beweis. Hier ist es genug, $s = 2^{\lambda+1}$ anzunehmen. Ist $0 \leqq N \leqq 2^{\lambda+1}-1$, so hat die Kongruenz

$$\begin{gathered}-3x \equiv N+4 \pmod{2^{\lambda+1}},\\ 0 \leqq x \leqq 2^{\lambda+1}-1\,,\end{gathered}$$

eine Lösung. Setzt man hier

$$0 \leqq y = 2^{\lambda+1}-1-x \leqq 2^{\lambda+1}-1\,,$$

so ist

$$x1^2 + y2^2 \equiv N \pmod{2^{\lambda+1}}$$

mit

$$N \equiv n-1 \pmod{2^{\lambda+1}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung durch Anwendung des Hilfssatzes 23.

Beweis von Satz $T_{\lambda,2}$:

Die Richtigkeit des Satzes $T_{\lambda,2}$ ergibt sich unmittelbar aus Satz $T_{\lambda,1}$ und Hilfssatz 25.

(Eingegangen 16 Februar, 1960)

Literatur

[1] T. Estermann: On sums of squares of square-free numbers, Proc. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 125–137.
[2] I. M. Vinogradov: An introduction to the theory of numbers, Pergamon Press, London, 1955.
[3] A. Walfisz: Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Warszawa, 1957.

Mathematisches Institut,
Universität Kanazawa