Shoda, Kenjiro
Osaka Math. J.
9 (1957), 239-240

Berichtigungen zu den Arbeiten über die Erweiterungen algebraischer Systeme[1]

Von Kenjiro SHODA

Nach einer mündlichen Mitteilung von T. Fujiwara bemerke ich ein Versehen in Satz 13 (I), das im folgenden berichtigt werden soll. Satz 13 (I) gilt nur unter der Voraussetzung, daß eine $\mathfrak{A}'$ und α umfassende Erweiterung existiert, wo α eine Wurzel eines Polynoms $f(x)$ über dem Grundsystem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist. Es gilt nämlich

Satz 13. *Die Erweiterung $f'(x)$ in $\mathfrak{A}'$ eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ ist ein Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$ und besitzt genau dieselbe Wurzeln wie $f(x)$, wenn eine $\mathfrak{A}'$ und eine Wurzel α von $f(x)$ umfassende Erweiterung existiert.*

Im Beweis von Satz 13 (I) habe ich diese Bedingung stillschweigend angenommen, sie gilt aber im allgemeinen nicht.

Ich habe Satz 13 (I) beim Beweis des Satzes 18 (I) über die Eindeutigkeit der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung gebraucht. Satz 18 (I) soll daher folgendermassen umformuliert werden.

Satz 18. *Die algebraisch abgeschlossene Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$, deren Existenz vorausgesetzt wird, wird bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt und jede algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist zu einem Untersystem von Ω äquivalent dann und nur dann, wenn die Erweiterung $f_{\Omega}(x)$ in Ω für jedes irreduzible Polynom $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ stets Polynom von $\Omega(x)$ ist.*

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Bedingung notwendig ist. Es sei nämlich α eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms $f(x)$. Dann ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ und folglich zu einem Untersystem von Ω äquivalent, also enthält Ω eine Wurzel von $f(x)$, daher ist $f_{\Omega}(x)$ nach dem eben angegebenen Satz 13 ein Polynom von $\Omega(x)$.

Wir bemerken noch, daß Satz 19 (I) so geändert werden muss, wie folgt[2].

---

1) K. Shoda: Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, Osaka Math. J. 4 (1952), 133–144, zitiert mit I. Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung, Proc. Japan Acad. 31 (1955), 128–130, zitiert mit II.

2) Bis jetzt haben wir stets die Bedingungen (a), (b) vo ausgesetzt.

Satz 19. *Für die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ mit den folgenden Eigenschaften*[3]

(1) *Jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist zu einem Untersystem von Ω äquivalent.*

(2) *Jedes irreduzible Polynom $f(x)$ besitzt eine in Ω liegende Wurzel.*

sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend

(a) *Ist $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.*

(b) *Ist α algebraisch über $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$.*

(c) *Jedes Polynom $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ besitzt ein Zerfällungssystem.*

(d) *Die Erweiterung $f_{\mathfrak{B}}(x)$ eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ ist für jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ stets ein Polynom von $\mathfrak{B}(x)$.*

Daß diese Bedingungen hinreichend sind, haben wir in I bewiesen, da die Gültigkeit von (2) dann klar ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen beweist man, wie folgt. Aus (1) bzw. (2) folgt nämlich die Bedingung (a) bzw. (b), da man $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ bzw. $\mathfrak{A}(\alpha)$ in Ω einbetten kann. Da Ω sicher Zerfällungssystem aller Polynome von $\mathfrak{A}(x)$ ist, so gilt (c) ersichtlich. Aus Satz 13 folgt ferner (d), da man $\mathfrak{B}$ in Ω einbetten kann und $f(x)$ nach (2) eine in Ω liegende Wurzel besitzt.

Wir müssen auch in Satz 20 (I) die Bedingung (d) voraussetzen.

Bezüglich der Arbeit II bemerke ich, daß der Satz richtig bleibt. Denn man kann die Bedingung (d) beweisen, wie folgt. Wir nehmen an, daß $f(x)$ das Restklassensystem $\mathfrak{A}(x)/\mathfrak{F}$ nach einem normalen Untersystem $\mathfrak{F}$ ist. Da nach der Voraussetzung jedes Untersystem normal ist, so ist $\mathfrak{F}$ ein normales Untersystem von $\Omega(x)$, also ist $f_\Omega(x)$ nichts anderes als $\Omega(x)/\mathfrak{F}$. Diese Kongruenz induziert eine Kongruenz von Ω nach $\mathfrak{F}\cap\Omega=0$, da $\mathfrak{F}\cap\Omega\subseteq\mathfrak{A}(x)\cap\Omega=\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{A}=0$ sind. Daher sind zwei verschiedene Elemente aus Ω bei der Kongruenz $f_\Omega(x)$ inkongruent, d.h. $f_\Omega(x)$ ist ein Polynom von $\Omega(x)$.

(Eingegangen 6. November, 1957)

3) Nach Satz 18 folgt aus diesem Satz, daß die algebraisch abgeschlossene Erweiterung mit diesen Eigenschaften bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.