V. Duquenoy and E. Mazzilli
Nagoya Math. J.
Vol. 192 (2008), 151–167

VARIÉTÉS SINGULIÈRES ET EXTENSION DES FONCTIONS HOLOMORPHES

VINCENT DUQUENOY AND EMMANUEL MAZZILLI

Abstract. In this paper, we study a problem of extension of holomorphic functions given on a complex hypersurface with singularities on the boundary of a strictly pseudoconvex domain.

§0. Introduction

Les résultats principaux de cet article concernent un problème d'extension de fonction holomorphe, f, donnée sur une hypersurface complexe irréductible X définie au voisinage d'un domaine strictement pseudoconvexe D. Un théorème fondamental de Henkin [4] affirme que si X n'a pas de singularités sur ∂D alors f bornée admet une extension holomorphe bornée ; ce qui est faux si X a des singularités sur le bord de D (pour un contre-exemple, voir par exemple [3]). Ici, nous donnons une condition suffisante "raisonnable" sur f pour qu'une telle propriété d'extension H^∞ soit assurée pour certains modèles d'hypersurface complexe (voir définition 1-6-admettant notamment un paramétrage local). A notre connaissance, il n'existe qu'un résultat d'extension ([1]) dans le cas singulier mais en norme L^2 et la condition suffisante avancée est très forte : elle entraîne que f s'annule sur les singularités de X. Mais ce résultat est valable sans aucune restriction sur D pseudoconvexe.

L'autre situation envisagée est le cas d'une hypersurface X de multiplicité inférieure à 2 sur ∂D (nous appelons très improprement de telles hypersurfaces de type "Morse"). A la différence, des hypersurfaces modèles cidessus, ce type d'hypersurface n'admet pas de paramétrage local, en général.

Dans notre situation, la difficulté réside dans le fait que nous utilisons une extension de f donnée par l'action du courant résiduel associé à X, sur une certaine forme différentielle et malheureusement, il est bien connu qu'il

Received October 30, 2006.
Revised October 1, 2007.
2000 Mathematics Subject Classification: 32A27, 32A37, 32C25, 32C30.

est très difficile d'obtenir un théorème de structure pour un tel courant dans le cas d'une hypersurface quelconque. Par conséquent, nous devons nous restreindre à des d'hypersurfaces particulières pour pouvoir rendre effectif un résultat de structure sur le courant résiduel dû à Tsikh [8] ; néanmoins, il nous semble que ce résultat présente quelques intérêts car notre "modèle" d'hypersurface contient la famille $\{z_1^p + z_2^q = 0\}$ par exemple, et le cas des hypersurfaces à singularités de type "Morse" permet d'augurer une condition suffisante dans le cas général, sans utiliser de paramétrage local.

Nous obtenons également un critère effectif pour qu'une fonction faiblement holomorphe (au sens de Oka) sur une hypersurface de type "Morse", soit en fait une fonction holomorphe au sens usuel. Ce résultat découle assez directement d'un résultat de Tsikh.

Le plan de l'article est le suivant : dans une première partie, nous donnons les définitions précises des hypersurfaces dans lesquelles nous travaillons, et les principaux résultats ; les seconde et troisième parties sont consacrées à la construction de l'extension de f à l'aide du courant résiduel que l'on interprète avec un résultat de structure de Tsikh, et à la démonstration des théorèmes 1-5 et 1-8. Dans la quatrième partie, nous illustrons nos résultats sur des exemples. Enfin dans la cinquième partie, nous donnons une preuve de la proposition 1-1 donnant le critère d'extension des fonctions faiblement holomorphes.

§1. Définitions et principaux résultats

Nous allons commencer par énoncer le critère assurant qu'une fonction faiblement holomorphe est holomorphe au sens fort et nous rappelons également - afin de faciliter la lecture - les trois définitions usuelles d'holomorphie sur un ensemble analytique X.

Soit X un ensemble analytique de dimension pure définie sur un domaine D de $\mathbb{C}^{n+1}$ et f une fonction holomorphe sur les points réguliers de X ; nous avons trois définitions naturelles d'holomorphie :

i) Pour tout $z \in X$, f est localement la restriction à $Reg(X)$ d'une fonction holomorphe au voisinage de z dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (f est holomorphe au sens de la théorie classique des faisceaux).

ii) f est localement bornée sur X (f est appelée faiblement holomorphe sur X).

iii) Si g est une fonction holomorphe sur D, qui s'annule sur $Sg(X)$, mais qui n'est pas identiquement nulle sur une composante irréductible de

X, alors

$$\phi \to \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\cap\{|g|\geq\varepsilon\}} f\phi \quad (\phi \text{ est une forme test})$$

existe, définit un courant (indépendant de g) $\bar\partial$-fermé (f est holomorphe au sens de Barlet).

Nous avons les implications suivantes i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) (voir [5], proposition 1), mais les implications inverses sont fausses en général (voir [5], exemple 1). Pour une fonction faiblement holomorphe, Tsikh ([8], p. 123, voir également [9]) obtient une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit holomorphe au sens de i), en termes de courant (nous donnons le résultat uniquement pour X une hypersurface) :

Théorème (Tsikh). *Si f est faiblement holomorphe sur X définie par $X := \{h = 0\}$ (avec dh non identiquement nulle sur une composante irréductible de X), alors le courant*

$$\Big\langle f\bar\partial\Big[\frac{1}{h}\Big],\phi\Big\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\cap\{|dh|\geq\varepsilon\}} f\frac{\phi}{dh}$$

existe, et si de plus il est $\bar\partial$-fermé, f est holomorphe au sens de i)*.*

En pratique, il est difficile de calculer ces courants et donc ce critère est peu effectif, à notre avis. Par contre, au voisinage d'un point de X où la multiplicité est 2 - un tel point sera appelé bien improprement une singularité de Morse complexe - il est alors possible d'expliciter ces courants et d'obtenir un critère plus concret.

Dans cette situation, il existe h une fonction définissante locale de X en 0 qui s'annule à l'ordre 2 en 0 ; quitte à faire un changement de coordonnées linéaires, on peut supposer que $\frac{\partial^2 h}{\partial\zeta_i^2}(0) \neq 0$, $\forall i \in \{1,\dots,n+1\}$. Maintenant, introduisons le polynôme de Weierstrass associé à h, P_i, par rapport à la variable ζ_i. Pour $\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$, notons $\widehat{\zeta^i}$ le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes sont celles de ζ auxquelles on enléve la i-ème coordonné. Considérons les racines de ce polynôme $a_1^i(\widehat{\zeta^i})$ et $a_2^i(\widehat{\zeta^i})$ dans un voisinage de $\widehat{0^i}$ privé du lieu d'annulation du discriminant de P_i (dans cette région, les a_j^i sont holomorphes au voisinage de tout point $\widehat{\zeta^i}$). Nous allons introduire une notation pour simplifier les écritures : si f est une fonction de $(\zeta_1,\dots,\zeta_{n+1})$, $f(a_j^i)$ signifie que f est évaluée au point $(\zeta_1,\dots,a_j^i,\dots,\zeta_{n+1})$, ceci pour $j \in \{1,2\}$.

Proposition 1-1. *Soit f une fonction faiblement holomorphe autour d'une singularité de Morse complexe, alors f est une fonction holomorphe si et seulement si*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{|a_2^i(\widehat{\zeta^i})-a_1^i(\widehat{\zeta^i})|=\varepsilon\}}|f(a_2^i)-f(a_1^i)|\,d\lambda_{2n-1}=0$$

pour tout i, où λ_{2n-1} désigne la mesure de lebesgue $2n-1$ dimensionnelle.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1-2. *Sous les conditions de la proposition précédente, si*

$$\sum_i\left|\frac{f(a_2^i)-f(a_1^i)}{a_2^i-a_1^i}\right|<\infty$$

au voisinage de zéro, alors f est une fonction holomorphe.

Remarque. Malheureusement, on ne peut pas avoir une interprétation aussi simple du courant résiduel avec le théorème de préparation de Weierstrass, quand h s'annule à un ordre supérieur. A notre avis, pour aborder ce problème il faut construire une autre distribution que la valeur principale associée à h, vérifiant $fY=1$, et remplacer le courant résiduel par $\bar\partial Y$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats concernant le problème d'extension des fonctions holomorphes bornées (au sens de i)) données sur une hypersurface complexe irréductible définie au voisinage d'un domaine strictement pseudoconvexe.

Définition 1-3. On dit qu'une hypersurface complexe irréductible X, définie au voisinage d'un domaine D, est de type "Morse", s'il existe une fonction définissante de X sur un voisinage V de $\bar D$ (ie : $X:=\{z\in V/h=0\}$) qui s'annule au plus à l'ordre 2 sur $X\cap\partial D$.

Il est clair que si $z_0\in Sg(X)\cap D$, alors $Mult_{z_0}(X)=2$.

Définition 1-4. On dit qu'une hypersurface complexe X, définie au voisinage d'un domaine borné D, est transverse au bord de D, si pour tous points $z_0\in X\cap\partial D$, $\dim\big(C_{z_0}(X)\cap T^{\mathbb{C}}_{z_0}(\partial D)\big)=n-1$ ($C_{z_0}(X)$ désigne le cône tangent à X en z_0).

Théorème 1-5. *Soient X de type Morse et D un domaine strictement pseudoconvexe borné. Soit f une fonction holomorphe bornée sur $X \cap D$ (au sens de* i)), *alors si $\forall z_0 \in Sg(X) \cap \partial D$*

$$\sum_i \left| \frac{f(a_2^i(\widehat{\zeta^i})) - f(a_1^i(\widehat{\zeta^i}))}{a_2^i(\widehat{\zeta^i}) - a_1^i(\widehat{\zeta^i})} \right| < \infty,$$

pour $(\zeta_1, \ldots, a_1^i(\widehat{\zeta^i}), \ldots, \zeta_{n+1})$ et $(\zeta_1, \ldots, a_2^i(\widehat{\zeta^i}), \ldots, \zeta_{n+1})$ dans l'intersection d'un voisinage de z_0 et de D, f admet une extension holomorphe dans $BMO(D)$.

Remarque. La condition obtenue est une condition variationnelle pour f près des singularités ; elle n'entraîne nullement l'annulation de f en $z_0 \in Sg(X) \cap D$, contrairement au résultat de [1].

Il est clair que si X admet un paramétrage local en $z_0 \in Sg(X) \cap D$, la condition ci-dessus peut être interprété en termes de dérivées de f par rapport au paramètre (voir théorème 1-8 et la conjecture qui le suit).

D'après les travaux de Passare (voir [7], p. 128), on peut trouver $\varphi(\zeta, z)$ une forme différentielle holomorphe en $z \in D$, telle que F définie sur D par :

$$F(z) = \left\langle f\bar{\partial}\left[\frac{1}{h}\right], \phi(\zeta, z)\right\rangle,$$

est une extension holomorphe de f à D. Si X est de type Morse, comme pour le résultat sur les fonctions faiblement holomorphes, le théorème de préparation de Weierstrass donne une description totale de ce courant, et donc nous permet d'estimer F. Si en un point de $Sg(X) \cap D$ la multiplicité est supérieure à 2, il faut une résolution explicite des singularités de X pour avoir la structure de $\bar{\partial}\left[\frac{1}{h}\right]$, ce qui paraît difficile en général. Dans ce qui suit, nous envisageons donc des hypersurfaces irréductibles modèles, ce qui conduit à des hypothèses relativement techniques mais nécessaires si l'on ne veut pas aller plus avant dans une résolution des singularités. Evidemment, le cas de X à croisements normaux se traite sans résolution (voir [6]) ; nos hypersurfaces modèles ne sont pas à croisements normaux mais on peut se ramener à cette situation par un théorème de structure pour les courants résiduels (voir preuve du théorème 1-5) et par "paramétrage".

Définition 1-6. Soit $D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^\infty$-lisse et X une hypersurface complexe irréductible de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie au voisinage de $\bar{D}$; on dit que D et X sont en situation régulière si et seulement si $\forall z_0 \in \partial D \cap X$, il existe $(Z) = (Z_1, \ldots, Z_{n+1})$ des coordonnées locales en z_0 avec $Z(z_0) = 0$, telles que :

1) $X_{z_0} = \{Z_1^p - g(Z_2, \ldots, Z_n) = 0\}$ avec g à croisements normaux en 0 ;
2) $D_{z_0} = \{Re(Z_{n+1}) + \theta(Z_1, \ldots, Z_{n+1}) < 0\}$ avec $d\theta(0) = 0$.

Remarque. Dans les coordonnées Z, le lieu singulier de X est lui à croisements normaux et il contient toujours la direction Z_{n+1}. De plus dans ces coordonnées, la fonction définissante de X ne dépend pas de la direction Z_{n+1}, qui est également “la normale complexe” à ∂D en 0 ; ceci est donc une hypothèse de transversalité plus restrictive (voir définition 1-4). Nous pensons que la condition de transversalité devrait être suffisante pour obtenir le théorème qui suit, mais techniquement nous ne pouvons nous passer de l'hypothèse plus forte.

Définition 1-7. Soit $z_0 \in X \subset \mathbb{C}^n$ un germe d'hypersurface complexe irréductible. On dit que X admet un paramétrage local en z_0, s'il existe une application holomorphe propre, surjective, $Z : (\mathbb{C}^n, 0) \to X$, $0 \to z_0$.

Remarque. Si Z est un paramétrage local alors Z est un revêtement ramifié à k-feuillets.

Nous rappelons que g à croisements normaux en 0 signifie :

$$g(Z) = Z_2^{\alpha_2} \cdots Z_n^{\alpha_n}.$$

De ceci, on déduit que

$$t := (t_2, \ldots, t_{n+1}) \to \big(t_2^{\alpha_2/\beta_2} \times \cdots \times t_i^{\alpha_i/\beta_i} \cdots t_n^{\alpha_n/\beta_n}, t_2^{p/\beta_2}, \ldots, t_n^{p/\beta_n}, t_{n+1}\big)$$

avec $(\beta_i = pgcd(p, \alpha_i))$, est un paramétrage local de X en z_0.

Par la suite, on notera un tel paramétrage de X en z_0 par $Z_{z_0}(t)$, et pour f une fonction définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, ∇f le gradient de f.

Théorème 1-8. *Soient D et X en situation régulière. Soit f une fonction holomorphe bornée sur $D \cap X$. Alors, il existe un entier N_0 (ne dépendant que de X) ayant la propriété suivante : s'il existe une constante M telle que : pour tout $z_0 \in X$,*

$$(*) \qquad |\nabla^\beta f((Z_{z_0}(t))| \leq M,$$

pour tout t dans un voisinage de 0 et pour tout β n-uplets avec $|\beta| \leq N_0$, alors f admet une extension holomorphe bornée, F, à D.

Remarque. Contrairement au résultat de ([1]), la condition $(*)$ n'entraîne pas l'annulation de f sur les singularités de X.

En fait dans la démonstration du théorème 1-2 (voir partie 2), nous avons besoin d'une condition moins forte que celle exigée dans le théorème (voir formule (2.15)) ; mais nous exprimons le résultat comme ci-dessus car il nous semble plus naturel. De plus, la formule (2.15) donne une estimation de N_0.

Dans le résultat précédent, ce qui semble jouer un rôle majeur est l'existence de paramétrages locaux pour X (voir preuve du théorème 1-8). Par conséquent, la condition de régulière situation de X et D, bien qu'indispensable pour la démonstration du théorème, nous semble une restriction technique. Cette remarque conduit donc à la conjecture naturelle suivante :

Conjecture. *Si X admet un paramétrage local en tout point de $X \cap \partial D$, alors il existe N_0 (ne dépendant que de X) ayant la propriété : s'il existe une constante M telle que : pour tout $z_0 \in X$,*

$$(*) \qquad |\nabla^\beta f((Z_{z_0}(t))| \leq M,$$

pour tout t dans un voisinage de 0 et pour tout β n-uplets avec $|\beta| \leq N_0$, alors f admet une extension holomorphe bornée, F, à D.

§2. Preuve du théorème 1-8

Soit $X := \{z \in \bar{D}/h(z) = 0\}$ avec h holomorphe sur un voisinage de $\bar{D}$ et $Sg(X) = \{\zeta \in X/\partial h(\zeta) = 0\}$, X une hypersurface complexe irréductible et $D := \{\rho(z) < 0\}$; d'après les travaux de Passare ([7], p. 128), la fonction, F définie pour tout $z \in D$ par

$$F(z) = \left\langle f(\zeta)\bar{\partial}\left[\frac{1}{h}\right], b(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)\right\rangle$$

est une extension holomorphe de f à D, où $b(\zeta, z) = \sum_{l=1}^{n+1} B_l(\zeta, z)\, d\zeta_l$ et $h(z) - h(\zeta) = \sum_l B_l(\zeta, z)(z_l - \zeta_l)$ sur un voisinage de $\bar{D}$, enfin

$$(2.1) \qquad A^{N,n}(\zeta, z) = \left(\frac{\rho(\zeta)}{\rho(\zeta) + \langle p(\zeta, z), \zeta - z\rangle}\right)^{N+n} (\bar{\partial}(\tilde{p}(\zeta, z)))^n,$$

avec

- $p(\zeta, z) = (p_1(\zeta, z, \ldots, p_{n+1}(\zeta, z)),$
- $p_j : \bar{D} \times \bar{D} \to \mathbb{C}, \quad p_j(\zeta, \cdot\,) \in \mathcal{O}(D),$
- $2\Re(\langle p(\zeta, z), \zeta - z\rangle) \leq \rho(\zeta) - \rho(z) - \delta(|\zeta - z|)^2,$
- $\tilde{p}(\zeta, z) = \dfrac{1}{\rho(\zeta)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} p_i(\zeta, z)\, d\zeta_i,$

et N est un réel quelconque supérieur à l'ordre du courant $\bar{\partial}\big[\frac{1}{h}\big]$.

On peut remarquer que $b(\zeta, z) = \partial h(\zeta) + \tilde{b}(\zeta, z)$ avec $\tilde{b}(\zeta, z) = \mathcal{O}(|\zeta - z|)$, ce qui entraîne :

$$F(z) = \langle f(\zeta)[X], A^{N,n}(\zeta, z)\rangle + \Big\langle f(\zeta)\bar{\partial}\Big[\frac{1}{h}\Big], \tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)\Big\rangle$$

car la formule des résidus assure $\partial h \wedge \bar{\partial}\big[\frac{1}{h}\big] = [X]$. Compte tenu de l'estimation $|\zeta - z|^2 \lesssim |\rho(\zeta) + \langle p(\zeta, z), \zeta - z\rangle|$, le premier terme ne pose aucun problème : il est borné si f est bornée sur X ; le terme crucial est le second qui contient le courant résiduel associé à X et nous allons nous concentrer sur lui.

Pour expliciter F, nous allons utiliser un théorème de structure pour les courants résiduels dû à Tsikh ([8], p. 97) :

$$F(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \cap \{|\partial h| \geq \varepsilon\}} f(\zeta) \frac{\tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)}{dh}$$

où, si ϕ est une $(n+1, n)$-forme différentielle, $\frac{\phi}{dh}$ est une (n, n)-forme définie sur *Reg* X :

$$\text{sur} \quad U_i := \Big\{\zeta \in X / \frac{\partial h}{\partial \zeta_i} \neq 0\Big\}, \quad \frac{\phi}{dh} := \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial \zeta_i}} \times \frac{\phi}{d\zeta_i}.$$

Nous voulons estimer F quand z est dans $D \cap B(z_0, r)$ avec z_0 un point de $\partial D \cap X$ et r petit qui sera choisi ultérieurement ; considérons χ une fonction à support compact dans $B(z_0, 2r)$ valant 1 sur $B(z_0, r')$ $(r' > r)$, alors F se décompose de la manière suivante :

$$F(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \cap \{|\partial h| \geq \varepsilon\}} \chi(\zeta) f(\zeta) \frac{\tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)}{dh} \tag{2.2}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \cap \{|\partial h| \geq \varepsilon\}} (1 - \chi(\zeta)) f(\zeta) \frac{\tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)}{dh}. \tag{2.3}$$

En utilisant (2.1) et l'estimation $|\zeta - z|^2 \lesssim |\rho(\zeta) + \langle p(\zeta, z), \zeta - z\rangle|$, l'expression (2.3) est l'action du courant résiduel sur une forme différentielle, $\phi(\zeta, z)$, uniformément bornée ainsi que toutes ses dérivées (dans (2.3), ζ ne peut être proche de z, si $z \in B(z_0, r)$) ; par conséquent, l'étude du terme (2.3) est similaire à celle du terme (2.2) (même moins délicate vu la remarque précédente). Pour estimer F, quand $z \in B(z_0, r)$, il suffit donc d'estimer (2.2).

D et X étant en situation régulière, dans les coordonnées données par la définition 1-1, si r est suffisamment petit, le terme (2.2) devient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \cap \{|\partial(\zeta_1^p - g(\zeta_2, \dots, \zeta_n))| \geq \varepsilon\}} \chi(\zeta) f(\zeta) \frac{\tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)}{d(\zeta_1^p - g(\zeta_2, \dots, \zeta_n))}; \tag{2.4}$$

ce terme peut encore s'écrire (voir [8], p. 96) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \cap \{|\zeta_1| \geq \varepsilon\}} \frac{\chi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta_1^{p-1}} \frac{\tilde{b}(\zeta, z) \wedge A^{N,n}(\zeta, z)}{d\zeta_1}. \tag{2.5}$$

Dans les nouvelles coordonnées, X admet un paramétrage local :

$$t := (t_2, \dots, t_{n+1}) \to \left(t_2^{\alpha_2/\beta_2} \cdots t_i^{\alpha_i/\beta_i} \cdots t_n^{\alpha_n/\beta_n}, t_2^{p/\beta_2}, \dots, t_n^{p/\beta_n}, t_{n+1}\right)$$

où $\beta_i = pgcd(p, \alpha_i)$ (par convention, on définit $pgcd(p, 0) = p$), ce qui permet encore d'écrire (2.5) sous la forme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} k \int_{\{|\zeta_1(t)| \geq \varepsilon\}} \frac{\chi(\zeta(t)) f(\zeta(t))}{t_2^{\gamma_2} \cdots t_n^{\gamma_n}} \frac{\tilde{b}(\zeta(t), z) \wedge A^{N,n}(\zeta(t), z)}{d\zeta_1(t)} \tag{2.6}$$

où $\gamma_i = (p-1)\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ et k est la multiplicité du revêtement défini par le paramétrage.

L'intégrande dans (2.6) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\sum_I \chi(\zeta(t)) f(\zeta(t)) \varphi_I(\zeta(t), z)\, d\zeta_2(t) \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n+1}(t) \wedge d\bar{\zeta}_I(t) \\ &= \prod_{i=2}^{n} t_i^{\frac{p}{\beta_i} - 1} \sum_I \chi(\zeta(t)) f(\zeta(t)) \varphi_I(\zeta(t), z)\, dt \wedge d\bar{\zeta}_I(t) \end{aligned}$$

avec I un n-uplet ordonné et donc (2.6) devient :

$$\sum_I \int_{\{|\zeta_1(t)|\geq\varepsilon\}} \frac{\chi(\zeta(t))f(\zeta(t))}{t_2^{\gamma_2-\frac{p}{\beta_2}+1}\cdots t_n^{\gamma_n-\frac{p}{\beta_n}+1}}\varphi_I(\zeta(t),z)\,dt\wedge d\bar{\zeta_I}(t) \tag{2.7}$$

$$= \sum_I Vp\Big[\frac{\partial^{\sum_i M_i}}{\partial t_2^{M_2}\cdots\partial t_n^{M_n}}\Big(\frac{1}{t_2^{N_2}\cdots t_n^{N_n}}\Big)\Big] \times\Big(\chi(\zeta(t))f(\zeta(t))\varphi_I(\zeta(t),z)\,dt\wedge d\bar{\zeta_I}(t)\Big) \tag{2.8}$$

où Vp désigne la valeur principale, M_i et N_i définis comme suit :

$$\begin{cases} M_i = 0 \text{ si } \alpha_i = 0 \text{ ou } 1 \\ M_i = \gamma_i - \frac{p}{\beta_i} \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_i = 0 \text{ si } \alpha_i = 0 \text{ ou } 1 \\ N_i = 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'après la Δ-linéarité de la valeur principale (2.8) peut encore s'exprimer :

$$\sum_I Vp\Big[\frac{1}{t_2^{N_2}\cdots t_n^{N_n}}\Big]\Big(\frac{\partial^{\sum_i M_i}}{\partial t_2^{M_2}\cdots\partial t_n^{M_n}}\big(\chi(\zeta(t))f(\zeta(t))\varphi_I(\zeta(t),z)\,dt\wedge d\bar{\zeta_I}(t)\big)\Big); \tag{2.9}$$

en notant $M=(M_1,\dots,M_n)$ et $N^*=(N_2,\dots,N_n)$, chaque terme dans (2.9) est égal à :

$$\sum_{M^1+M^2=M} Vp\Big[\frac{1}{t^{N^*}}\Big] \times\Big(\frac{\partial^{|M^1|}}{\partial t^{M^1}}\big(f(\zeta(t))\big)\frac{\partial^{|M^2|}}{\partial t^{M^2}}\big(\chi(\zeta(t))\varphi_I(\zeta(t),z)\big)\Big)\,dt\wedge d\bar{\zeta_I}(t) \tag{2.10}$$

$$= \sum_{M^1+M^2=M}\int_{\{\rho(\zeta(t))<0\}}\frac{1}{t^{N^*}}\frac{\partial^{|M^1|}}{\partial t^{M^1}}\big(f(\zeta(t))\big) \times\frac{\partial^{|M^2|}}{\partial t^{M^2}}\big(\chi(\zeta(t))\varphi_I(\zeta(t),z)\big)\,dt\wedge d\bar{\zeta_I}(t). \tag{2.11}$$

- Estimation principale

Dans cette partie, nous notons :

$$\begin{cases} F(\zeta,z) = \rho(\zeta) + \langle p(\zeta,z),\zeta-z\rangle \\ P(\zeta,z) = \sum_i p_i(\zeta,z)\,d\zeta_i. \end{cases}$$

Pour obtenir le théorème 1-8, il faut estimer le terme (2.11) ; pour cela remarquons :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{|M^2|}}{\partial t^{M^2}}\big(\chi(\zeta(t))\varphi_I(\zeta(t),z)\big)\\&\quad=\sum_{a+b=|M^2|}\frac{\tilde b(\zeta(t),z)\rho^{N-1-a}(\zeta(t))}{F^{N+n+b}(\zeta(t),z)}G_I^{(a,b)}(\zeta(t),z)\end{aligned}$$

où $G_I^{(a,b)}(\zeta(t),z)$ est une fonction C^∞ à support compact. Le terme (2.11) est une somme de termes du type :
(2.12)

$$\int\frac{1}{t^{N^*}}\frac{\partial^{|M^1|}}{\partial t^{M^1}}\big(f(\zeta(t))\big)\frac{\tilde b(\zeta(t),z)\rho^{N-1-a}(\zeta(t))}{F^{N+n+b}(\zeta(t),z)}G_I^{(a,b)}(\zeta(t),z)\,dt\wedge d\bar\zeta_I(t),$$

où le domaine d'intégration est $\{\rho(\zeta(t))<0\}$. En utilisant des intégrations par partie successives (voir [2]), nous obtenons que (2.12) est majoré par le module de termes du type :

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{t^{N^*}}\frac{\partial^{|M^1|+\theta^*}}{\partial t^{M^1}\partial t_{n+1}^{\theta^*}}\big(f(\zeta(t))\big)\frac{\tilde b(\zeta(t),z)\rho^{N-1+b+\sum\lambda_i}(\zeta(t))}{F^{N+n+b}(\zeta(t),z)}\\&\qquad\qquad\times H_I^{(a,b)}(\zeta(t),z)\,dt\wedge d\bar\zeta_I(t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

où $\lambda_i=0$, si $\alpha_i=0$, et 1 sinon, $\theta^*=|M^2|+\sum\lambda_i$, $H_I^{(a,b)}(\zeta(t),z)$ à support compact.

Enfin pour conclure, il faut utiliser l'estimation classique

$$(-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\zeta-z|^2)\lesssim|F(\zeta,z)|$$

sur $\bar D\times\bar D$, d'où (2.13) est majoré par :
(2.14)

$$\int\left|\frac{1}{\zeta_2(t)^{\lambda_2}\cdots\zeta_n(t)^{\lambda_n}}\right|\left|\frac{\nabla^{|M|+\sum\lambda_i}\big(f(\zeta(t))\big)\rho^{\sum_i\lambda_i}(\zeta(t))}{F^{n+\frac12}(\zeta(t),z)}\right|\left|d\widehat{\zeta^1}(t)\wedge d\bar\zeta_I(t)\right|;$$

maintenant si

$$\left|\nabla^{|M|+\sum_i\lambda_i}f(\zeta(t))\right|\lesssim d^{\varepsilon-\sum\frac{\lambda_i}{2}-\frac12}(\zeta(t),\partial D),\tag{2.15}$$

alors (2.14) est majoré par :

$$\int\left|\frac{1}{\zeta_2(t)^{\lambda_2}\cdots\zeta_n(t)^{\lambda_n}}\times\frac{1}{F^{n+1-\sum\frac{\lambda_i}{2}-\varepsilon}(\zeta(t),z)}\right|\left|d\widehat{\zeta^1}(t)\wedge d\zeta_{n+1}(t)\wedge d\bar\zeta_I(t)\right|.$$

En utilisant, les changements de variables de ([6], p. 359), on obtient aisément que cette expression est bornée.

§3. Preuve du théorème 1-5

Soit h holomorphe sur un voisinage de 0 et supposons que $Ord_0(h) = 2$; en utilisant un changement de coordonnées linéaires, on peut supposer sans perte de généralité que $Ord_0\, h(0,\dots,\zeta_i,\dots,0) = 2$, pour tout $i \in \{1,\dots,n+1\}$. D'après le théorème de Tsikh (voir section précédente) :

$$\left\langle \bar\partial\Big[\frac{1}{h}\Big], \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{h=0\}\cap\{|\frac{\partial h}{\partial \zeta_i}(\zeta)|\geq\varepsilon\}} \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial\zeta_i}(\zeta)} \times \frac{\varphi}{d\zeta_i},$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n+1\}$ avec φ une $(n+1,n)$-forme à support compact dans un voisinage de 0. La forme φ s'écrit

$$\varphi = \sum \tilde\varphi_i\, d\zeta \wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}}.$$

Considérons P_i le polynôme de Weierstrass par rapport à la variable ζ_i associé à h, alors sur $\{h=0\}$, $\big\{\frac{\partial P_i}{\partial\zeta_i} = 0\big\}$ contient les pôles de $\frac{\partial h}{\partial \zeta_i}$, ainsi nous avons la formule (3.1) :

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar\partial\Big[\frac{1}{h}\Big], \varphi \right\rangle &= \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{h=0\}\cap\{|\frac{\partial P_i}{\partial \zeta_i}(\zeta)|\geq\varepsilon\}} \frac{1}{g_i(\zeta)\frac{\partial P_i}{\partial\zeta_i}(\zeta)} \times \tilde\varphi_i\, d\widehat{\zeta^i} \wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}} \\
&= \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{|a_2^i(\widehat{\zeta^i}) - a_1^i(\widehat{\zeta^i})|\geq\varepsilon\}} \left(\frac{1}{(a_2^i - a_1^i)}\tilde\varphi_i(a_2^i) + \frac{1}{(a_1^i - a_2^i)}\tilde\varphi_i(a_1^i)\right) d\widehat{\zeta^i} \wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}} \\
&= \sum_i \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{(a_2^i - a_1^i)}\Big(\tilde\varphi_i(a_2^i) - \tilde\varphi_i(a_1^i)\Big) d\widehat{\zeta^i} \wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}},
\end{aligned}$$

où $a_1^i(\widehat{\zeta^i})$ et $a_2^i(\widehat{\zeta^i})$ sont les racines de P_i et $h = g_i P_i$ sur un voisinage de 0 avec h une unité (pour passer de la première égalité à la seconde, nous utilisons le fait que g_i est une unité et nous continuons à noter par $\tilde\varphi_i$, $\frac{1}{g_i}\tilde\varphi_i$).

Venons-en à la démonstration du théorème 1-5 ; d'après la partie 2 et la formule (3.1), il faut estimer le terme suivant pour $z \in B(0,r)$:

$$\sum_i \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\chi(a_2^i) f(a_2^i) \varphi_i(a_2^i) - \chi(a_1^i) f(a_1^i) \varphi_i(a_1^i)}{(a_2^i - a_1^i)}, \tag{3.2}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme :

$$\sum_i \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}^n} \frac{f(a_2^i)-f(a_1^i)}{a_2^i-a_1^i}\big[\chi(a_2^i)\varphi_i(a_2^i)+\chi(a_1^i)\varphi_i(a_1^i)\big] \tag{3.3}$$

$$+\sum_i \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}^n} \frac{\chi(a_2^i)\varphi_i(a_2^i)-\chi(a_1^i)\varphi_i(a_1^i)}{a_2^i-a_1^i}\big[f(a_2^i)+f(a_1^i)\big], \tag{3.4}$$

où les φ_i sont les composantes sans $d\zeta_i\wedge d\bar{\zeta}_i$ du noyau $b(\tilde{\zeta},z)\wedge A^{N,n}(\zeta,z)$ défini par la formule $(2-1)$. Il est très facile de voir, à l'aide d'un changement de variable classique dans les domaines strictement pseudoconvexes (voir par exemple [6], p. 359) et le lemme 3-1, que le terme (3.3) est dans $BMO(D)$, si

$$\sum_i \left|\frac{f(a_2^i)-f(a_1^i)}{a_2^i-a_1^i}\right| < \infty$$

pour $(\zeta_1,\dots,a_1^i(\widehat{\zeta^i}),\dots,\zeta_{n+1})$ et $(\zeta_1,\dots,a_2^i(\widehat{\zeta^i}),\dots,\zeta_{n+1})$ dans l'intersection d'un voisinage de 0 et de D.

Considérons le changement de variables $\zeta_i'=\zeta_i\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$ et $\zeta_{n+1}'=\partial_1\rho(z)\zeta_1+\cdots+\partial_{n+1}\rho(z)\zeta_{n+1}$ si $\partial_{n+1}\rho\geq c>0$ sur $B(0,r)$; alors, $\frac{\partial}{\partial\zeta_i'}=L_i+V_i$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, avec L_i un $(1,0)$-champs de vecteur tangent à $\{\rho=cte\}$ et V_i vérifiant $V_i(z)=0$ (idem pour $\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_i'}$; par la suite, on continue à nommer les nouvelles coordonnées (ζ)) ; En utilisant (2.1) et (2.2),

$$\chi(\zeta)\varphi(\zeta)=\chi(\zeta)\tilde{b}(\zeta,z)\frac{\rho^N(\zeta)}{F^{N+n}(\zeta,z)}\big(\bar{\partial}P(\zeta,z)\big)^n \tag{3.5}$$

$$+\chi(\zeta)\tilde{b}(\zeta,z)\frac{\rho^{N-1}(\zeta)}{F^{N+n}(\zeta,z)}\bar{\partial}\rho(\zeta)\wedge P(\zeta,z)\wedge\big(\bar{\partial}P(\zeta,z)\big)^{n-1} \tag{3.6}$$

$$:=\sum_i \tilde{K}_1^i(\zeta,z)+\tilde{K}_2^i(\zeta,z).$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral, l'intégrande dans le terme (3.4) s'exprime de la manière suivante :

$$\sum_i\big(f(a_2^i)+f(a_1^i)\big)\int_0^1 \frac{\partial\tilde{K}_j^i}{\partial\zeta_i}(a_1^i+t(a_2^i-a_1^i),z)\,dt \tag{3.7}$$

$$+\sum_i \frac{\overline{(a_2^i-a_1^i)}}{(a_2^i-a_1^i)}\big(f(a_2^i)+f(a_1^i)\big)\int_0^1 \frac{\partial\tilde{K}_j^i}{\partial\bar{\zeta}_i}(a_1^i+t(a_2^i-a_1^i),z)\,dt, \tag{3.8}$$

avec $j \in \{1,2\}$ et $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Dans (3.7) et (3.8), les termes contenant $\tilde{K}_1^i$ sont plus réguliers car $|\rho(\zeta)| \lesssim |F(\zeta,z)|$; par conséquent, il suffit d'examiner (3.7) et (3.8) avec $\tilde{K}_2^i$. A ces fins, remarquons, d'après (3.5) et (3.6) et $\frac{\partial}{\partial\zeta_i} = L_i + V_i$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, que les termes avec $i \neq n+1$ dans (3.7) et (3.8), sont majorés par :

$$\int_0^1 \left(\int_{B(0,2r)} \left| \frac{f(a_2^i) + f(a_1^i)}{F(a_1^i + t(a_2^i - a_1^i), z)^n} \right| dV \right) dt; \tag{3.9}$$

pour ce qui concerne les termes dans (3.7) et (3.8) avec $i = n+1$, nous avons une estimation identique à (3.9) en utilisant l'inégalité, d'après (3.6), $\tilde{K}_2^{n+1} = \mathcal{O}|\zeta - z|$. Pour finir les estimations classiques dans les domaines strictement pseudoconvexes (voir toujours [6], p. 359) et le lemme 3-1 assurent que (3.9) est dans BMO si f est bornée sur l'hypersurface complexe.

Lemme 3-1. *Soit $g \in C^1(D)$ telle que il existe $D > 0$ vérifiant $|\nabla g(z)| \leq D\, dist(z, \partial D)^{-1}$, $z \in D$, alors $g \in BMO(D)$.*

§4. Exemples

Nous allons donner des exemples montrant que les théorèmes 1-5 et 1-8 sont en un certain sens optimaux. Soit B_3 la boule unité de $\mathbb{C}^3$, et $X := \{z_1^2 - z_2^q = 0\}$ avec q un entier impair ; il est trés facile de vérifier que B_3 et X sont en situation régulière.

i) Sur $B_3 \cap X$, soit f la fonction holomorphe définie par :

$$f(z) = \frac{z_1}{(1-z_3)^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}},$$

où ε' est un réel positif petit qui sera choisi ultérieurement. Soit $Z : (t_1, t_2) \to (t_1^q, t_1^2, t_2)$ un pramétrage local de X en 0 ; dans ce cas $N_0 = q-1$ (voir (2.15)) convient. Clairement, nous avons l'estimation

$$\left| \frac{d^{q-1}}{dt_1^{q-1}} f(Z(t)) \right| \lesssim d^{-\varepsilon' - \frac{1}{4}}(Z(t), \partial B_3),$$

et par conséquent si $\varepsilon' < \frac{1}{4}$, l'estimation (2.15) est vérifiée. Par contre,

$$\left| \frac{d^{q-2}}{dt_1^{q-2}} \frac{d}{dt_2} f(Z(t)) \right|$$

est de l'ordre de $d^{-1-\varepsilon'}(Z(t), \partial D)$ et donc ne vérifie pas l'estimation (2.15). De plus, il n'est pas difficile de voir, en utilisant les techniques de [3], que f n'a pas d'extension bornée à B_3.

ii) Considérons la fonction f définie par :

$$f(z) = \frac{z_1^6}{(1 - z_3)^{3+\varepsilon'}},$$

alors f n'est pas une fonction bornée sur B_3. Mais sur $X \cap B_3$, nous avons $|\nabla^\beta f(Z(t))|$ qui est localement bornée avec $N_0 = q - 1$ (si ε' assez petit et q assez grand) et donc elle a une extension bornée à B_3 d'après le théorème 1-.. Dans ce cas simple, on peut prendre comme extension la fonction :

$$F(z) = \frac{z_2^{3q}}{(1 - z_3)^{3+\varepsilon'}}.$$

iii) Soit f la fonction holomorphe définie par :

$$f(z) = \frac{z_1}{(1 - z_3)^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}},$$

où ε' est un réel positif suffisamment petit. Alors f est une fonction bornée sur $B_3 \cap X$, mais l'expression suivante :

$$\left| \frac{f(a_1(z_2), z_2, z_3) - f(a_2(z_2), z_2, z_3)}{a_1(z_2) - a_2(z_2)} \right|$$

n'est pas localement bornée $(0, 0, 1)$; de plus, en utilisant les techniques de [3], il est facile de voir que f n'a pas d'extension dans $BMO(B_3)$.

iv) Considérons la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z_1^2}{(1 - z_3)^{3/2}},$$

alors f est une fonction qui vérifie les conditions du théorème 1-3 et par conséquent elle admet une extension dans $BMO(B_3)$; dans ce cas simple, on peut prendre comme extension la fonction :

$$F(z) = \frac{z_2^3}{(1 - z_3)^{3/2}}.$$

§5. Preuve de la proposition 1-1

Comme à la partie 3, considérons h une fonction holomorphe au voisinage de 0 et supposons que 0 est une singularité de "Morse" pour h. On peut, sans perte de généralité, supposer que $Ord_0\, h(0,\ldots,\zeta_i,\ldots,0) = 2$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Si f est une fonction faiblement holomorphe au sens de Oka (voir [8], p. 121) autour de 0 alors f est la restriction d'une fonction méromorphe sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$; maintenant, un résultat de Tsikh assure que le courant :

$$\left\langle f\bar{\partial}\Big[\frac{1}{h}\Big], \phi\right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{h=0\}\cap\{|dh|>\varepsilon\}} f\frac{\phi}{dh}$$

est bien défini si f est faiblement holomorphe et de plus, si ce courant est $\bar{\partial}$-fermé, alors f est la restriction d'une fonction holomorphe. Toujours d'après Tsikh ([6], p. 125) avec les mêmes notations qu'à la partie 3, nous avons :

$$\left\langle f\bar{\partial}\Big[\frac{1}{h}\Big], \bar{\partial}\phi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{h=0\}\cap\{|\frac{\partial p_i}{\partial \zeta_i}|=\varepsilon\}} f\frac{\phi}{dh}$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,n+1\}$, avec ϕ une $(n+1,n-1)$-forme test qui s'écrit :

$$\phi = \sum_{i,j}\phi_{i,j}\, d\zeta \wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}} \wedge d\overline{\widehat{\zeta^j}};$$

l'expression précédente peut s'ecrire encore :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j}\int_{\{h=0\}\cap\{|\frac{\partial p_i}{\partial\zeta_i}|=\varepsilon\}} f\frac{\tilde{\phi_{i,j}}}{\frac{\partial p_i}{\partial \zeta_i}}\, d\widehat{\zeta^i}\wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}}\wedge d\overline{\widehat{\zeta^j}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j}\int_{\{|a_2^i(\widehat{\zeta^i})-a_1^i(\widehat{\zeta^i})|=\varepsilon\}} \frac{\big(f(a_2^i)\tilde{\phi_{i,j}}(a_2^i) - f(a_1^i)\tilde{\phi_{i,j}}(a_1^i)\big)}{a_2^i(\widehat{\zeta^i}) - a_1^i(\widehat{\zeta^i})}\, d\widehat{\zeta^i}\wedge d\overline{\widehat{\zeta^i}}\wedge d\overline{\widehat{\zeta^j}},$$

ce qui achève la preuve.

References

[1] B. Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier, **4** (1996), 1083–1094.

[2] P. Bonneau, A. Cumenge and A. Zeriahi, Division dans les espaces de Lipschitz de fonctions holomorphes, Lecture notes **1198**, 1984.

[3] K. Diederich and E. Mazzilli, *A remark on the theorem of Ohsawa-Takagoshi*, Nagoya Math. J., **158** (2000), 185–189.

[4] G. Henkin, *Continuation of bounded holomorphic functions from submanifold in general position to strictly pseudoconvex domains*, Math. of the U.S.S.R. Izvestija, **6** (1972), 536–563.

[5] G. Henkin and M. Passare, *Abelian differentials on singular varieties*, Invent. Math., **135** (1999), 297–328.

[6] A. Maati and E. Mazzilli, *Extension et division dans les variétés à croisements normaux*, Publ. Mat., **45** (2001), 343–369.

[7] M. Passare, *Residues, currents, and their relation to ideal of holomorphic functions*, Math. Scand., **62** (1988), 75–152.

[8] A. Tsikh, Multidimensional residues and their applications, Trans. of Math. Monogr **103**, 1992.

[9] A. Tsikh and A. Yger, *Residue currents*, J. Math. Sci., **120** (2004), 1916–1971.

Vincent Duquenoy
Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie
C.N.R.S. U.M.R. 8524
U.F.R. de Mathématiques, Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

duquenoy@wanadoo.fr

Emmanuel Mazzilli
Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie
C.N.R.S. U.M.R. 8524
U.F.R. de Mathématiques, Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

mazzilli@math.univ-lille1.fr