PROBLEMES D'UNIVERSALITE S'INTRODUISANT DANS L'ALGEBRISATION DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE II

DANIEL PONASSE

Chapitre III: Substitutions et quantificateurs

1. Ensemble individualisé

Nous définirons la structure *d'ensemble individualisé* au moyen des données suivantes:

—un ensemble non vide A, éléments notés $u, v, w, \ldots$

—un ensemble *infini* I, éléments notés $a, b, c, \ldots i, j, k, \ldots$ et appelés ***individus.***

—une application s de I^2 dans l'ensemble des applications de A dans lui-même; une fonction telle que $s(a, b)$ sera dite "*substitution de a à b*", et lorsque aucune confusion ne sera à craindre, on la notera simplement (a/b), sa valeur pour $u \in A$ sera alors notée $(a/b)u$. Si l'on est en présence de plusieurs individualisations différentes, on pourra préciser en disant que A est s-individualisé sur I.

Un élément u de A sera dit *indépendant* d'un individu a, si pour tout individu b: $(b/a)u = u$. On notera $i(a)$ l'ensemble des u indépendants de a, et I_u l'ensemble des individus dont dépend (c'est à dire n'est pas indépendant) u; I_u sera dit la *base* de u.

Ces données devant vérifier les axiomes suivants:

I 1/ $(a/a)u = u$ quels que soient $u \in A$ et $a \in I$

I 2/ si $b \neq a$, alors $(b/a)u$ est indépendant de a, quel que soit $u \in A$

I 3/ si u est indépendant de a: $(c/a)(a/b)u = (c/b)u$ quels que soient b et c

I 4/ pour tout u, I_u est une partie finie (éventuellement vide) de I.

Indépendance des axiomes d'individualisation

Axiome I 1: Prenons pour A un ensemble ayant au moins deux éléments, et soient u° et v° deux éléments différents fixés, soit également a° un individu fixé; définissons les substitutions de la façon suivante:

Received July 3, 1961.

$(b/a^\circ)u^\circ = v^\circ$ pour tout b

$(b/a)u^\circ = u^\circ$ pour tout b et tout $a \neq a^\circ$

$(b/a)u = u$ quels que soient a et b, pour tout $u \neq u^\circ$

On a donc: $I_{u^\circ} = \{a^\circ\}$ et $I_u = \emptyset$ si $u \neq u^\circ$

1) I 1 n'est pas vérifié, car: $(a^\circ/a^\circ)u^\circ = v^\circ \neq u^\circ$

2) I 2 est vérifié

3) I 3 est vérifié:

—pour $u \neq u^\circ$: immédiat

—pour $u = u^\circ$ avec $b \neq a^\circ$: $(c/a)(a/b)u^\circ = (c/a)u^\circ = u^\circ$ (car $a \neq a^\circ$) $= (c/b)u^\circ$

—pour $u = u^\circ$ avec $b = a^\circ$: $(c/a)(a/a^\circ)u^\circ = (c/a)v^\circ = v^\circ = (c/a^\circ)v^\circ$

4) I 4 est vérifié.

Axiome I 2: Prenons pour A l'ensemble I^2 des couples d'individus (i, j), et définissons ainsi les substitutions:

—si $i \neq j$: $(b/a)(i, j) = (i, j)$ si $a \neq i$ et $a \neq j$

$(b/i)(i, j) = (b, j)$ quel que soit b

$(b/j)(i, j) = (i, b)$ quel que soit b

(i, j) a donc pour base: $\{i, j\}$

—si $i = j$: $(b/a)(i, i) = (i, i)$ si $a \neq i$

$(b/i)(i, i) = (i, b)$ quel que soit b

(i, i) a donc pour base: $\{i\}$

1) I 1 est vérifié

2) I 2 n'est pas vérifié, car si $b \neq i$: $(b/i)(i, i) = (i, b)$ qui dépend encore de i.

3) I 3 est vérifié:

a) si $u = (i, j)$ avec $i \neq j$ (on aura donc $a \neq i$ et $a \neq j$):

—si $b \neq i$ et $b \neq j$: immédiat

—si $b = i \neq j$: $(c/a)(a/i)(i, j) = (c/a)(a, j) = (c, j) = (c/i)(i, j)$

—si $b = j \neq i$: analogue.

b) si $u = (i, i)$ (on aura donc $a \neq i$):

—si $b \neq i$: immédiat

—si $b = i$: $(c/a)(a/i)(i, i) = (c/a)(i, a) = (i, c) = (c/i)(i, i)$

4) I 4 est vérifié.

Axiome I 3: Prenons toujours $A = I^2$, soit a° un individu fixé, posons:

—pour un couple $(a°, j)$ où $j \neq a°$:

$(b/a°)(a°, j) = (b, j)$

$(b/j)(a°, j) = (a°, b)$

$(b/a)(a°, j) = (a°, j)$ si $a \neq a°$ et $a \neq j$

Un tel couple dépend donc de $a°$ et de j.

—pour le couple $(a°, a°)$:

$(b/a°)(a°, a°) = (b, b)$

$(b/a)(a°, a°) = (a°, a°)$ si $a \neq a°$.

Ce couple ne dépend donc que de $a°$

—pour tout couple (i, j) où $i \neq a°$:

$(b/j)(i, j) = (i, b)$

$(b/a)(i, j) = (i, j)$ si $a \neq j$ (même si $a = i$)

Un tel couple ne dépend donc que de j.

1) I1 est vérifié

2) I2 est vérifié

3) I3 n'est pas vérifié, par exemple: si $j \neq a°$ $j \neq a$ $a \neq a°$ et

$$c \neq a \text{ on a: } (c/a)(a/a°)(a°, j) = (c/a)(a, j) = (a, j)$$
$$(c/a°)(a°, j) = (c, j)$$

4) I4 est vérifié.

Axiome I4: Prenons pour A un ensemble où l'on peut choisir deux éléments différents $u°$ et $v°$ et posons:

$$(b/a)u° = v° \quad \text{si } a \neq b$$
$$(a/a)u° = u°$$
$$(b/a)u = u \quad \text{si } u \neq u°$$

1) I1 est vérifié

2) I2 est vérifié

3) I3 est vérifié, car il ne peut s'appliquer qu'à $u \neq u°$ et le résultat est alors trivial.

4) I4 n'est pas vérifié, car $I_{u°} = I$

Exemples d'ensembles individualisés: sur un ensemble infini I quelconque:

1°/ A est un ensemble quelconque et l'on prend pour chaque substitution l'application identque de A dans A: ce sera *l'individualisation triviale* de A.

2°/ I peut être individualisé sur lui-même en posant:

$$(a/b)i = i \text{ si } b \neq i, \text{ quel que soit } a$$
$$(a/b)b = a$$

Nous dirons que c'est *l'individualisation naturelle* de I.

3°/ Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles individualisés sur le même ensemble I, on peut définir sur l'ensemble produit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ ce que nous appellerons *l'individualisation produit*, par:

$$(a/b)(u_1, \ldots, u_n) = ((a/b)u_1, \ldots, (a/b)u_n)$$

ou d'une façon plus précise: si chaque A_i est s_i-individualisé, alors A est s-individualisé par:

$$s(a, b)(u_1, \ldots, u_n) = (s_1(a, b)u_1, \ldots, s_n(a, b)u_n)$$

En particulier I^n pourra être individualisé par le produit des n individualisations naturelles de I.

4°/ Si A est un ensemble individualisé, il y a une autre individualisation intéressante sur A^n:

—si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ où les u_i sont tous différents, on pose:

$$(a/b)u = ((a/b)u_1, \ldots, (a/b)u_n)$$

—si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ où les u_i ne sont pas tous différents, on pose:

$$(a/b)u = u \text{ quels que soient } a \text{ et } b.$$

La vérification des axiomes ne présente guère de difficultés, elle est immédiate pour I1, I2, I4, et en ce qui concerne I3:

—pour $u = (u_1, \ldots, u_n)$ où les u_i ne sont pas tous différents: immédiat.

—si tous les u_i sont différents: u devant être indépendant de a, ceci implique que chaque u_i le soit, alors $(a/b)u = ((a/b)u_1, \ldots, (a/bu_n)$ où les $(a/b)u_i$ sont tous différents, car si l'on avait

$$(a/b)u_i = (a/b)u_j,$$

il en résulterait (en appliquant I1 et I3 à A):

$$(b/a)(a/b)u_i = (b/a)(a/b)u_j, \qquad \text{soit } u_i = u_j$$

par suite :

$$(c/a)(a/b)u = ((c/a)(a/b)u_1, \ldots, (c/a)(a/b)u_n)$$
$$= ((c/b)u_1, \ldots, (c/b)u_n) = (c/b)u$$

L'individualisation ainsi définie sur A^n sera dite la *n-individualisation* engendrée par celle de A.

5°/ Si A et B sont deux ensembles disjoints individualisés sur I, on peut définir sur $A \cup B$, *l'individualisation somme* par :

$(a/b)u$ calculé dans A si $u \in A$
calculé dans B si $u \in B$

Etudions quelques conséquences simples des axiomes d'individualisation : remarquons d'abord que si u dépend de a, cela signifie, par définition, qu'il existe au moins un individu b tel que $(b/a)u \neq u$ mais l'axiome I2 nous donne un résultat plus fort :

LEMME 1 : *Si u dépend de a, alors pour tout $b \neq a$: $(b/a)u \neq u$*

COROLLAIRE : *Pour que u soit indépendant de a il faut et il suffit qu'il existe $b \neq a$ tel que $u = (b/a)u$*

LEMME 2 : *Si u est indépendant de a : $(b/a)(a/b)u = u$ pour tout b.*

C'est un cas particulier de I3.

PROPOSITION 1 : *Soit $v = (b/a)u$*

1. *si $b = a$ ou si $a \notin I_u$: alors $I_v = I_u$*
2. *si $b \neq a$ et si $a \in I_u$:*
   —*si $b \notin I_u$: $I_v = [I_u \cap C\{a\}] \cup \{b\}$*
   —*si $b \in I_u$: $I_v \subset I_u \cap C\{a\}$*

Démonstration : Soit $c \notin I_u$: $v = (b/a)u = (b/c)(c/a)u$ qui est indépendant de c si $c \neq b$, donc dans tous les cas : $I_v \subset I_u \cup \{b\}$ Le cas 1 est trivial, car $v = u$

Supposons donc $b \neq a$ et $a \in I_u$, et tout d'abord $b \notin I_u$:

D'après I2 v est indépendant de a, donc $I_v \subset [I_u \cap C\{a\}] \cup \{b\}$ montrons qu'il y a égalité :

—supposons d'abord que v soit indépendant de b :

$$(a/b)(b/a)u = u \text{ (lemme 2) soit } (a/b)v = u \text{ soit } v = u$$

ce qui est impossible car u dépend de a. Donc $b \in I_v$.

—supposons maintenant que v soit indépendant de $c \in I_u \cap C\{a\}$ (s'il y en a) :

$$\begin{aligned}(a/c)(c/b)v &= (a/b)v \qquad (\mathrm{I}3)\\ &= (a/b)(b/a)u = u\end{aligned}$$

or $a \neq c$, u serait donc indépendant de c, ce qui est faux. Donc $c \in I_v$.

L'égalité est donc démontrée.

Dans le cas oú $b \in I_u$ on a toujours $I_v \subset I_u \cup \{b\} = I_u$ et puisque $b \neq a$, v est indépendant de a, donc $I_v \subset I_u \cap C\{a\}$.

Remarque: Dans le cas où $a \neq b$ et où u dépend de a et de b, l'inclusion qui vient d'être démontrée peut fort bien être stricte ; en voici un exemple :

$A = I^2$ muni de la 2-individualisation engendrée par l'individualisation naturelle de I, et soient a et b deux individus différents :

$u = (a, b)$ a pour base $\{a, b\}$

$v = (b/a)u = (b/a)(a, b) = (b, b)$ a pour base $\emptyset$.

Proposition 2 : *Si u dépend de a et si $b' \neq b''$,* alors $(b'/a)u \neq (b''/a)u$ *sauf peut-être pour un nombre fini de couples*

$$(b', b'') \in I_u^2$$

En effet, si u est indépendant de b' et de b'', d'après la proposition 1, $(b'/a)u$ dépend de b' et pas de b'', tandis que $(b''/a)u$ dépend de b'' et pas de b', ces deux éléments sont donc différents. La conclusion subsiste si l'un seulement de b' et de b'' n'appartient pas à I_u.

Corollaire 1 : *Si u dépend de a, l'ensemble des $(b/a)u$ oú b parcourt I est équipotent à I.*

Corollaire 2 : *Tout ensemble fini ne peut être individualisé que trivialement.*

Proposition 3 : *Dans un ensemble individualisé non trivialement : si $a \neq b$ $i(a)$ et $i(b)$ sont incomparables (pour la relation d'inclusion).*

Démonstration : supposons par exemple : $i(a) \subset i(b)$

Soit u un élément de base non vide (il en existe), et soit v l'élément ainsi défini :

—si u est indépendant de a et b : $v = u$

—si u dépend de a mais non de b : $v=(a'/a)u$ où $a' \neq b$ et $a' \notin I_u$

—si u dépend de b mais non de a : $v=(b'/b)u$ où $b' \neq a$ et $b' \notin I_u$

—si u dépend de a et de b : $v=(b'/b)(a'/a)u$ où $b' \neq a$ et $a' \notin I_u$ et $b' \notin I_{(a'/a)u}$

Dans tous les cas, v est un élément de base non vide, indépendant de a et de b (cf. prop. 1), et pour un tel élément v : soit $c \in I_v$: $(b/c)v$ est indépendant de a, donc par hypothèse $(b/c)v$ serait indépendant de b, ce qui contredit la proposition 1.

Applications individualisantes

Etant donnés deux ensembles A et A' individualisés sur le même ensemble d'individus I, une application f de A dans A' sera dite une *application individualisante* si :

$$f((a/b)u)=(a/b)f(u) \qquad \text{quels que soient } a, b, u.$$

ou, d'une façon plus précise : si A est s-individualisé et A' est s'-individualisé, alors :

$$f(s(a, b)u)=s'(a, b)f(u)$$

Pour une telle application :

PROPOSITION 4 : *Si u est indépendant de a, alors $f(u)$ aussi.*

Car : $(b/a)f(u)=f((b/a)u)=f(u)$ pour tout b.

COROLLAIRE : *$I_f(u) \subset I_u$ quel que soit u.*

2. Anneaux booléiens et ensembles prébooléiens individualisés

Anneau booléien individualisé

Soit B un anneau booléien (élements notés : $r, s, t, \ldots$) et I un ensemble infini d'individus $(a, b, c, \ldots)$; nous dirons que B est un *anneau booléien individualisé* sur I si c'est un ensemble individualisé sur I tel que chaque substitution d'individus soit un *endomorphisme* unitaire de B.

Remarquons que tout anneau booléien peut être individualisé trivialement sur tout ensemble infini I, et que c'est d'ailleurs la seule individualisation possible pour un anneau booléien fini.

Dans un anneau booléien B individualisé sur I nous avons les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1 : *Pour tout individu a, $i(a)$ est un sous-anneau de B.*

En effet :

1. $(b/a)0=0$ et $(b/a)1=1$ quel que soit b, donc 0 et 1 sont indépendants de a.

2. si r est indépendant de a: $(b/a)(-r)=-(b/a)r=-r$ quel que soit b, donc $-r$ est indépendant de a.

3. si r et s sont indépendants de a: $(b/a)(r \cdot s)=(b/a)r \cdot (b/a)s = r \cdot s$ quel que soit b, donc $r \cdot s$ est indépendant de a.

Nous pouvons généraliser ce résultat : J étant une partie quelconque de I, posons :

$i(J)$: ensemble des r indépendants de tout individu de J, c'est à dire tels que

$$I_r \cap J = \emptyset$$

B_J : ensemble des r ne dépendant que d'individus de J, c'est à dire tels que

$$I_r \subset J$$

On constate immédiatement :

$$i(J) = \bigcap_{a \in J} i(a)$$

$$B_J = i(CJ)$$

il rèsulte alors de la proposition 1 :

Corollaire 1 : *Pour tout* $J \subset I$: $i(J)$ *et* B_J *sont des sous-anneaux de* B.

Remarque :

$i(\emptyset) = B_I = B$

$i(I) = B\emptyset =$ ensemble des r de base vide.

Il en résulte également le résultat suivant :

Corollaire 2 : *Pour toute partie infinie* J *de* I: B_J *est un anneau booléien individualisé sur* J.

Démonstration : B_J sera évidemment individualisé en prenant pour substitutions les restrictions à B_J des substitutions dans B, ce qui est possible, car : si $r \in B_J$ $a \in J$ et $b \in J$: $(b/a)r \in B_J$

Proposition 2 : *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. r *est indépendant de* a

2. *pour une infinité d'individus* b: $(b/a)r \leq r$

3. *pour une infinité d'individus* b: $(b/a)r \geq r$

Démonstration: Il est immédiat que 1 implique 2 et 3, car alors $(b/a)r = r$ pour tout b.

Supposons $(b/a)r \leq r$ pour une infinité de b, soit J l'ensemble des b pour lesquels cette inégalité est vérifiée, et posons $J' = J \cap C\{a\}$. Tout endomorphisme d'un anneau booléien conserve évidemment la relation d'ordre, donc si $b \in J'$, pour tout individu c on a:

$$(c/a)(b/a)r \leq (c/a)r$$

or $b \neq a$, donc $(b/a)r$ est indépendant de a, on a donc simplement:

$$(b/a)r \leq (c/a)r$$

ceci sera en particulier vrai quels que soient b et c pris dans J', l'inégalité contraire sera donc aussi vraie, et par suite:

$$(b/a)r = (c/a)r$$

et ceci pour une infinité de couples (b, c) avec $b \neq c$, donc (prop. 2, parag. précédent) : r est indépendant de a. Donc 2 implique 1.

Démonstration analogue pour "3 implique 1" (on peut d'ailleurs se ramener à ce qui précéde en raisonnant sur $-r$).

Corollaire 1: *S'il existe* $b \notin I_r$ *tel que:* $(b/a)r \leq r$ *ou* $(b/a)r \geq r$ *alors* r *est indépendant de* a.

En effet, si $(b/a)r \leq r$, on en déduit: $(c/b)(b/a)r \leq (c/b)r$ pour tout c, or r étant indépendant de b, ceci s'écrit simplement:

$$(c/a)r \leq r$$

pour tout c; donc r est indépendant de a.

De même pour l'inégalité contraire.

Corollaire 2: *Si* r *dépend de* a *et est indépendant de* b' *et* b'' $(b' \neq b'')$ *alors* $(b'/a)r$ *et* $(b''/a)r$ *sont incomparables.*

En effet, supposons par exemple: $(b'/a)r \leq (b''/a)r$ alors $(a/b'')(b'/a)r \leq (a/b'')(b''/a)r$ or $(b'/a)r$ est indépendant de b'', d'où $(b'/a)r \leq r$ ce qui contredit que r dépende de a.

Ensemble prébooléien individualisé

Soit E un ensemble prébooléien:

éléments notés: α, β, γ, . . .

famille déductive que nous noterons ici: $(V_k)_{k\in k}$

puits: $T=\bigcap\limits_K V_k$; relation d'analogie R, anneau booléien quotient E/R, application canonique φ de E dans E/R.

Soit d'autre part I un ensemble infini d'individus $(a, b, c, \ldots)$. Nous dirons que E est un ***ensemble prébooléien individualisé sur*** I si c'est un ensemble individualise sur I tel que chaque substitution d'individus soit un *préhomomorphisme* de E dans lui-même.

Tout ensemble prébooléien peut être individualisé trivialement sur I, et c'est la seule individualisation possible si E est fini.

Nous allons voir que de l'individualisation de E résulte une individualisation "canonique" pour E/R: si (b/a) est une substitution d'individus sur E, d'après le théorème 2, parag. 1, chap. I, on peut définir un endomorphisme de E/R, que nous noterons encore (b/a), par:

$$(b/a)\varphi(\alpha)=\varphi((b/a)\alpha)$$

LEMME 1: ***Pour que*** $(b/a)\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha)$ ***quel que soit*** b, ***il faut et il suffit qu'il existe un représentant*** α° ***de*** $\varphi(\alpha)$ ***qui soit indépendant de*** a.

En effet:

—s'il existe α° indépendant de a:

$$(b/a)\varphi(\alpha)=(b/a)\varphi(\alpha^\circ)=\varphi((b/a)\alpha^\circ)=\varphi(\alpha^\circ)=\varphi(\alpha)$$

—si $(b/a)\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha)$ pour tout b: soit b° un individu fixé différent de a, $\varphi(\alpha)=(b^\circ/a)\varphi(\alpha)=\varphi((b^\circ/a)\alpha)$, alors $\alpha^\circ=(b^\circ/a)\alpha$ (où α est un représentant quelconque) convient bien.

Il est alors facile de vérifier les axiomes d'individualisation:

I1/ $(a/a)\varphi(\alpha)=\varphi((a/a)\alpha)=\varphi(\alpha)$

I2/ si $b\neq a$: $(b/a)\alpha$ est indépendant de a, or c'est un représentant de $(b/a)\varphi(\alpha)$, ce dernier est donc indépendant de a.

I3/ si $\varphi(\alpha)$ est indépendant de a: $\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha^\circ)$ où α° est indépendant de a, $(c/a)(a/b)\varphi(\alpha)=(c/a)(a/b)\varphi(\alpha^\circ)=\varphi((c/a)(a/b)\alpha^\circ)$

$$=\varphi((c/b)\alpha^\circ)=(c/b)\varphi(\alpha^\circ)$$

I 4/ si $\varphi(\alpha)$ dépend de a: tous ses représentants aussi, donc $\varphi(\alpha)$ ne peut dépendre que d'un nombre fini d'individus.

Ainsi *E/R est un anneau booléien individualisé* sur I

LEMME 2: *Si $\varphi(\alpha)$ a une base non vide: il existe un représentant α° de $\varphi(\alpha)$ ayant la même base.*

Démonstration: soit $a_1, \ldots, a_n$ la base de $\varphi(\alpha)$, soit α un représentant quelconque de $\varphi(\alpha)$, il depend au moins de $a_1, \ldots, a_n$, supposons qu'il dépende en outre des individus $b_1, \ldots, b_p$.

$(a_1/b_1)\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) = \varphi((a_1/b_1)\alpha)$ donc $\alpha_1 = (a_1/b_1)\alpha$ est un autre représentant de $\varphi(\alpha)$ et il ne dépend plus de b_1.

$(a_1/b_2)\varphi(\alpha) = (a_1/b_2)\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha) = \varphi((a_1/b_2)\alpha_1)$ et $\alpha_2 = (a_1/b_2)\alpha_1$ ne dépend ni de b_1, ni de b_2. etc . . .

Finalement en prenant, par exemple, $\alpha^\circ = (a_1/b_p) \cdots (a_1/b_1)\alpha$, c'est bien un représentant de $\varphi(\alpha)$, il ne peut dépendre que de $a_1, \ldots, a_n$ et il en dépend effectivement.

LEMME 3: *Si $\varphi(\alpha)$ a une base vide, quel que soit a il existe un représentant α^a de $\varphi(\alpha)$, qui dépende au plus de a.*

Démonstration: soit α un représentant quelconque de $\varphi(\alpha)$, si α a une base vide on prend $\alpha^a = \alpha$, si α dépend de $b_1, \ldots, b_p$, on prend: $\alpha^a = (a/b_p) \cdots (a/b_1)\alpha$ (cf. la démonstration du lemme 2).

Soit A un ensemble individualisé sur I, et construisons l'ensemble prébooléien $\ddot{A}$ (chap. I, parag. 2), nous pouvons définir sur $\ddot{A}$ une individualisation déduite "canoniquement" de celle de A:

Si α est un tableau de $\ddot{A}$, $(b/a)\alpha$ sera par définition le tableau obtenu en remplaçant dans α tous les éléments de A (s'il y en a) par leurs images par (b/a).

On vérifie sans peine que $\ddot{A}$ est ainsi un ensemble individualisé sur I. En outre chaque substitution (b/a) ainsi définie est un préhomomorphisme (strict) de $\ddot{A}$ dans lui-même, en effet:

1. (b/a) conserve évidemment la multiplication et la négation.

2. Soit $\alpha \in T$: α est f-clos pour tout $f \in \vec{A}$, or quelle que soit $f \in \vec{A}$, $f_0(b/a)$ est aussi une application de A dans U, donc α est $f_0(b/a)$-clos, mais la $f_0(b/a)$-

valeur de est identique à la f-valeur de $(b/a)\alpha$, par suite $(b/a)\alpha$ est f-clos pour tout f: $(b/a)\alpha \in T$; d'où $(b/a)T \subset T$

Ainsi $\ddot{A}$ ***est un ensemble prébooléien individualisé*** sur I.

LEMME 4: *Soient* $\alpha \in \ddot{A}$ *et* $u_1, \ldots, u_n$ *les éléments de* A *apparaissant dans* α, *alors:*

$$I_\alpha = I_{u_1} \cup \cdots \cup I_{u_n}$$

Démonstration:

—si $a \in I_\alpha$: il existe b tel que $(b/a)\alpha \neq \alpha$ donc pour l'un au moins des u_i: $(b/a)u_i \neq u_i$, c'est à dire u_i dépend de a.

— si l'un des u_i dépend de a: il existe b tel que $(b/a)u_i \neq u_i$ et par suite $(b/a)\alpha \neq \alpha$

A partir de $\ddot{A}$ nous pouvons maintenant construire l'anneau booléien $\langle A\rangle$ individualisé sur I (de façon canonique).

LEMME 5: *Si une grille* $\langle\alpha\rangle$ *de* $\langle A\rangle$ *a une base vide, alors il existe un tableau* α° *de* $\ddot{A}$, *représentant* $\langle\alpha\rangle$, *ayant également une base vide.*

Démonstration: d'après le lemme 3, il existe un tableau α^a qui dépend au plus d'un individu a (d'ailleurs arbitraire) et qui représente $\langle\alpha\rangle$; soit α° le tableau déduit de α^a en y remplaçant tous les éléments de A qui dépendent effectivement de a par 0. Ce tableau α° a bien une base vide, montrons que α° est analogue à α^a:

Soient $u_1, \ldots, u_n$ les éléments de A dépendant de a, apparaissant dans α^a; soit $f \in \vec{A}$

—si $f(u_1) = \cdots = f(u_n) = 0$: α° et α^a ont la même f-valeur.

—s'il existe i tel que $f(u_i) = 1$: soit b un individu quelconque différent de a, $\langle\alpha\rangle = \langle a^a\rangle$ donc $(b/a)\langle\alpha\rangle = \langle\alpha\rangle = \langle\alpha^a\rangle = \langle(b/a)\alpha^a\rangle$ α^a et $(b/a)\alpha^a$ sont donc analogues.

Pour chaque i, de l à n, $(b/a)u_i \neq u_i$; soit alors $f' \in \vec{A}$ qui coïncide avec f sauf peut-être pour les $(b/a)u_i$ où l'on pose: $f'((b/a)u_i) = 0$; α° et $(b/a)\alpha^a$ ont la même f'-valeur, donc aussi α° et α^a, mais pour ces deux. derniers, tableaux leurs f'-valeurs sont identiques à leurs f-valeurs: α° et α^a ont donc encore la même f-valeur.

Des lemmes 2 et 5 on déduit:

PROPOSITION 3: Toute grille $\langle\alpha\rangle$ de $\langle A\rangle$ admet un représentant α de $\ddot{A}$ ayant la même base.

Problème d'universalité

Considérons le problème "universel" relatif aux structures et applications suivantes:

E_S: ensembles individualisés sur I

E_T: anneaux booléiens individualisés sur I

(S, T)-applications: applications individualisantes

T-applications: homomorphismes individualisants.

Les conditions U 1, U 2, U 3, U 4 (cf. Préliminaires) se vérifient sans peine.

Ce problème est résolu de la façon suivante:

PROPOSITION 4: $\langle A\rangle$ ***et*** H, ***associés à un ensemble individualisant*** A, ***sont solution de ce problème d'universalité.***

Démonstration:

Rappelons que H est définie par:

$$H(u) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

et c'est bien une application individualisante de A dans $\langle A\rangle$.

Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléien individualisé B, nous savons qu'il existe un homomorphisme G unique de $\langle A\rangle$ dans B tel que: $f = G_0 H$.

G est individualisant sur $H(A)$:

$$G\left(\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle\right) = f(u) \qquad G\left((b/a)\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle\right) = G\left(\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0(b/a)u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle\right) = f((b/a)u)$$

$$= (b/a)f(u) = (b/a)G\left(\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle\right)$$

En outre toute grille $\langle\alpha\rangle$ de $\langle A\rangle$ est composée par multiplication, disjonction et négation, de grilles élémentaires de la forme $H(u)$; il en résulte que G est individualisant sur $\langle A\rangle$.

3. Anneau booléien quantifié

Soit B un anneau booléien (éléments, r, s, t, . . .) individualisé sur I (éléments $a, b, c, \ldots$).

LEMME 1: *Si* $s = \operatorname{Sup.}_{\iota \in I} (b/a)r$ *existe* (*pour* a *et* r *fixés*), *alors* s *est indépendant de* a.

Démonstration:

pour tout b: $s \geq (b/a)r$

quels que soient b et c: $(c/a)s \geq (c/a)(b/a)r$

quels que soient $b \neq a$ et c: $(c/a)s \geq (b/a)r$

c étant fixé quelconque, choisissons b tel que: $b \neq a$ $b \notin I_r$ $b \notin I_{(c/a)s}$

alors quel que soit d: $(d/b)(c/a)s = (c/a)s \geq (d/b)(b/a)r = (d/a)r$

il en résulte: $(c/a)s \geq s$, et ceci quel que soit c, donc s est indépendant de a (prop. 2, parag. 2, chap. III).

Rappelons les définitions et résultats suivants, concernant les quantificateurs (existentiels) monadiques tels que les définit P. R. Halmos:

1°) Un quantificateur monadique sur un anneau booléien B est une application $\exists$ de B dans B vérifiant les trois axiomes:

$$\exists 0 = 0$$
$$r \leq \exists r$$
$$\exists(r \cdot \exists s) = \exists r \cdot \exists s$$

2°) Un sous-anneau B' de B est dit relativement achevé si pour tout $r \in B$, l'ensemble, noté $B'(r)$, des $r' \in B'$ tels que $r \leq r'$ (si $r \neq 0$, c'est un filtre de B') admet un plus petit élément (ce sera alors un filtre principal de B'). On démontre alors que si $\exists$ est un quantificateur sur B, $\exists(B)$ est un sous-anneau relativement achevé de B, et pour tout r, $\exists r$ est le plus petit élément de $\exists(B)(r)$. Réciproquement, si B' est un sous-anneau relativement achevé de B, il existe un quantificateur $\exists$ et un seul sur B tel que $\exists(B) = B'$, et il est défini par: $\exists r =$ le plus petit élément de $B'(r)$.

Dans le cas d'un anneau booléien individualisé on a alors le résultat suivant:

LEMME 2: *Si pour un individu* a *fixé, Sup.* $(b/a)r$ *lorsque* b *parcourt* I, *existe quel que soit* r, *alors l'application* $\exists a$ *définie par* $\exists ar = \operatorname{Sup.} (b/a)r$ *est un quantificateur monadique sur* B, *et* $\exists a(B) = i(a)$.

Démonstration :

—on a vu que $i(a)$ était un sous-anneau de B.

—le lemme 1 montre que $\exists ar \in i(a)$

—il est immédiat que $\exists ar \geq r$, car $r = (a/a)r$, donc $\exists ar \in i(a)(r)$.

—soit $r' \in i(a)(r)$: r' est indépendant de a et $r' \geq r$, donc quel que soit b: $(b/a)r' = r' \geq (b/a)r$, il en résulte : $r' \geq \exists ar$.

Donc, pour tout r, $i(a)(r)$ admet un plus petit élément qui est $\exists ar$, ce qui prouve la proposition.

Nous dirons alors que B est un *anneau booléien sèmi-quantifié* sur I s'il vérifie l'axiome suivant :

BQ 1/ quels que soient $a \in I$ et $r \in B$: $\exists ar = \operatorname{Sup.}_{b \in I} (b/a)r$ existe.

Remarques :

1°) Dans tout anneau booléien semi-quantifié, nous pourrons définir pour chaque individu le quantificateur universel $\forall a$ par : $\forall ar = -\exists a(-r)$ ou, ce qui revient au même : $\forall ar = \operatorname{Inf.}_{b \in I} (b/a)r$.

2°) Tout anneau booléien B peut être semi-quantifié sur tout ensemble infini I, en prenant l'individualisation triviale ; dans ce cas $\exists ar = \forall ar = r$ quels que soient a et r. Nous dirons que B est semi-quantifié trivialement (c'est d'ailleurs le seul cas possible pour un anneau fini).

Outre les propriétés classiques des quantificateurs monadiques, nous avons dans un anneau booléien semi-quantifié les résultats suivants :

Proposition 1 : $I_{\exists ar} \subset I_r \cap C\{a\}$

Démonstration :

—on sait déjà que $\exists ar$ est indépendant de a.

—soit maintenant $b \neq a$ tel que r soit indépendant de b : $\exists ar \geq r$, donc pour tout c : $(c/b)\exists ar \geq (c/b)r = r$

si $c \neq a$ $(c/b)\exists ar$ est indépendant de a, et dans ce cas, pour tout d:

$$(d/a)(c/b)\exists ar = (c/b)\exists ar \geq (d/a)r$$

donc $(c/b)\exists ar \geq \exists ar$ pour tout $c \neq a$; il en résulte que $\exists ar$ est indépendant de b.

Proposition 2 : *Si r est indépendant de a' :* $\exists ar = \exists a'(a'/a)r$

En effet : quel que soit b $(b/a')(a'/a)r = (b/a)r$

PROPOSITION 3: *Si r et s sont indépendants de b et si $(b/a)r \leq s$ alors $\exists ar \leq s$.*

En effet: $s \in i(b)((b/a)r)$ donc $s \geq \exists b(b/a)r = \exists ar$

PROPOSITION 4: *Pour toute partie infinie J de I: $\exists ar = \operatorname{Sup.}_{b\in J} (b/a)r$*

Démonstration:

—on a $\exists ar \geq (b/a)r$ a fortiori pour tout $b \in J$

—soit $s \geq (b/a)r$ pour tout $b \in J$: on peut trouver un individu b tel que $b \in J$ et $b \notin I_r \cup I_s$, de la proposition 3 il résulte alors $s \geq \exists ar$.

COROLLAIRE: *Pour toute partie infinie J de I, B_J est un anneau booléien semi-quantifié sur J.*

En effet il suffit de se reporter à l'individualisation de B_J sur J telle qu'elle a été définie au paragraphe précédent. Notons que pour tout $a \in J$ le quantificateur $\exists a$ sur B_J est la restriction de ce méme quantificateur défini sur B.

PROPOSITION 5: *Deux fonctions composées de n quantificateurs $\exists a_1, \ldots, \exists a_n$ ne différant que par l'ordre des individus, sont deux quantificateurs monadiques identiques.*

Démonstration: montrons, par récurrence sur n, que $Q = \exists a_1 \circ \ldots \circ \exists a_n$ est un quantificateur.

La proposition est trivialement vraie pour $n = 1$, supposons la vraie pour $n-1$, posons: $Q = \exists a_1 \circ Q_1$ avec $Q_1 = \exists a_2 \circ \cdots \circ \exists a_n$

$$Q\,0 = \exists a_1(Q_1 0) = \exists a_1 0 = 0 \text{ et } r \leq \exists a_1 r \leq \exists a_1 Q_1 r = Qr$$

$Q(r \cdot Qs) = \exists a_1 Q_1(r \cdot \exists a_1 Q_1 s)$, $Q_1 s$ est indépendant de $a_2, \ldots, a_n$, donc aussi $\exists a_1 Q_1 s$; en outre $Q_1(B) = i(a_2, \ldots, a_n)$, donc $\exists a_1 Q_1 s = Q_1 \exists a_1 Q_1 s$, d'où:

$$\begin{aligned} Q(r \cdot Qs) &= \exists a_1 Q_1(r \cdot Q_1 \exists a_1 Q_1 s) = \exists a_1(Q_1 r \cdot Q_1 \exists a_1 Q_1 s) = \exists a_1(Q_1 r \cdot \exists a_1 Q_1 s) \\ &= \exists a_1 Q_1 r \cdot \exists a_1 Q_1 s = Qr \cdot Qs. \end{aligned}$$

Q est donc bien un quantificateur.

En outre $Q(B) = i(a_1, \ldots, a_n)$: invariant par toute permutation.

N. B. En général le composé de deux quantificateurs monadiques n'est pas un quantificateur monadique.

Notation: si K est une partie finie de I, nous poserons:

$$\exists K = \exists a_1 \circ \cdot \cdot \cdot \circ \exists a_n \text{ si } K = \{a_1, \ldots, a_n\}$$
$$= \text{application identique si } K = \emptyset.$$

PROPOSITION 6: *L'application* $\exists$ *définie par*: $\exists r = \exists I_r r$ *est un quantificateur monadique.*

Démonstration: d'après la proposition 5 cette application est bien définie, et nous remarquons que:

$$\exists(B) = B\emptyset.$$

Il est immédiat que:

$$\exists 0 = 0 \text{ et } r \leq \exists r$$

Considérons maintenant deux éléments r et s, soit $K = I_r \cup I_s$, K contient les bases de r, de s, et de $r \cdot \mathrm{E}s$, il en résulte:

$$\exists K_r = \exists I_r r,$$

et de même pour s et $r \cdot \exists s$, par suite:

$$\exists(r \cdot Es) = \exists K(r \cdot \exists Ks) = \exists Kr \cdot \exists Ks = \exists r \cdot \exists s$$

Etudions maintenant l'effet des substitutions sur un quantificateur $\exists a$, nous avons les résultats partiels suivants:

PROPOSITION 7: *Si* $c \neq a$: $\exists a(c/b)r \leq (c/b)\exists ar$

En effet: $r \leq \exists ar$ donc $(c/b)r \leq (c/b)\exists ar$, or $(c/b)\exists ar$ est indépendant de a, donc $(c/b)\exists ar \in i(a)((c/b)r)$, ce qui prouve l'inégalité envisagée.

PROPOSITION 8: *Si* $c \neq a$ *et* $b \neq a$, *on a*: $\exists a(c/b)r = (c/b)\exists ar$ *lorsque* $b = c$, *ou lorsque* r *est indépendant de l'un au moins des individus* a, b, c.

En effet:

—Si $b = c$, ou si r est indépendant de a ou de b: le résultat est trivial.

—Si r est indépendant de c, et on peut maintenant supposer $b \neq c$: $(b/c)\exists a(c/b)r$ est indépendant de a

$$(b/c)\exists a(c/b)r \geq (b/c)(c/b)r = r$$

donc:

$$(b/c)\exists a(c/b)r \geq \exists ar$$

$\exists a(c/b)r$ est indépendant de b, donc:

$$(c/b)(b/c)\exists a(c/b)r = \exists a(c/b)r \geq (c/b)\exists ar$$

et la proposition 7 prouve l'inégalité contraire.

Dans le cas où r dépend effectivement de a, b, c et où ces trois individus sont différents, l'égalité précédente n'est pas forcément réalisée ; nous poserons alors la définition suivante :

B sera dit un *anneau booléien quantifié* *) sur I, s'il est semi-quantifié sur I et vérifie l'axiome supplémentaire :

BQ 2/Si a, b, c sont 3 individus différents et si r dépend de a, b, c alors :

$$(c/b)\exists ar \leq \exists a(c/b)r$$

Il résulte alors de ce qui précède :

PROPOSITION 9 : *Dans un anneau booléien quantifié : si* $b \neq a$ *et* $c \neq a$ *on a :*

$$\exists a(c/b)r = (c/b)\exists ar$$

Soient B et B' deux anneaux booléiens quantifiés sur le même ensemble d'individus I, une application f de B dans B' sera dite un *homomorphisme quantifié*, si :

HQ 1/ f est un homomorphisme d'anneaux

HQ 2/ f est une application individualisante

HQ 3/ $f\ (\exists ar) \leq \exists af(r)$ quels que soient a et r.

PROPOSITION 10 : *Si f est un homomorphisme quantifié :*

$$f(\exists ar) = \exists af(r)$$
$$f(\forall ar) = \forall af(r)$$

quels que soient a et r.

En effet : $\exists ar \geq (b/a)r$ pour tout b, donc $f(\exists ar) \geq f((b/a)r) = (b/a)f(r)$ pour tout b, donc $f(\exists ar) \geq \exists af(r)$, d'où l'égalité d'après HQ 3.

Une application N d'un anneau booléien quantifié B dans $Z/(2)$ sera dite une *normalisation* de B si :

N 1/ N est un homomorphisme d'anneaux

N 2/ $N(\exists ar) \leq \operatorname{Sup.}_{\iota \in I} N((b/a)r)$ quels que soient a et r.

---

*) Nous verrons au paragraphe 5 des exemples d'anneaux booléiens semi-quantifié mais non quantifiés.

PROPOSITION 11 : *Si N est une normalisation :*

$$N(\exists ar) = \text{Sup.}\, N((b/a)r)$$
$$N(\forall ar) = \text{Inf.}\, N((b/a)r)$$

quels que soient a et r.

Démonstration immédiate.

PROPOSITION 12 : *Tout homorphisme quantifié de B dans $Z/(2)$ (ce dernier étant évidemment quantifié trivialement) est une normalisation.*

Démonstration : soit f un homomorphisme quantifié de B dans $Z/(2)$ $f(\exists ar) = \exists af(r) = f(r)$ et $\text{Sup.}\, f((b/a)r) = \text{Sup.}\, (b/a)f(r) = f(r)$

N. B. La réciproque est en général inexacte (il faudrait $N((b/a)r) = N(r)$ quels que soient a, b, r).

Un ultrafiltre $\mathscr{V}$ d'un anneau booléien quantifié B sera dit un ***ultrafiltre validant*** s'il possède la propriété suivante :

$$(\exists ar \in \mathscr{V}) \Longrightarrow (\text{il existe } b \in I \text{ tel que } (b/a)r \in \mathscr{V})$$

Il en résultera d'ailleurs l'équivalence, l'implication contraire étant triviale, puisque $(b/a)r \leq \exists ar$, pour tout b.

Il en résultera également :

$$(\forall ar \in \mathscr{V}) \Longleftrightarrow (\text{pour tout } b \in I : (b/a)r \in \mathscr{V})$$

B sera dit un ***anneau booléien quantifié validé*** s'il possède des ultrafiltres validants et si leur intersection se réduit à l'élément 1.

Remarquons qu'un anneau booléien quantifié trivialement est validé, car tous ses ultrafiltres sont validants.

PROPOSITION 13 : *Pour qu'une partie $\mathscr{V}$ d'un anneau booléien quantifié B soit un ultrafiltre validant, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique g soit une normalisation de B.*

Démonstration : nous savons déjà que pour que $\mathscr{V}$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit un homomorphisme de B dans $Z/(2)$.

—si $\mathscr{V}$ est un ultrafiltre validant : si $g(\exists ar) = 1$, $\exists ar \in \mathscr{V}$, donc il existe b tel que $(b/a)r \in \mathscr{V}$, donc $g((b/a)r) = 1$ et $\text{Sup.}\, g((b/a)r) = 1$

—si g est une normalisation : si $\exists ar \in \mathscr{V}$, $g(\exists ar) = \text{Sup}.\, g((b/a)r) = 1$, donc il existe b tel que $g((b/a)r) = 1$, soit $(b/a)r \in \mathscr{V}$, donc $\mathscr{V}$ est validant.

N. B. Nous verrons au paragraphe 5 divers exemples concernant les ultrafiltres validants et les anneaux validés.

4. Ensemble prébooléien quantifié

Soit E un ensemble prébooléien (éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; ensembles déductifs V_k) individualisé sur I ($a, b, c, \ldots$). On dira que E est un *ensemble prébooléien semi-quantifié* sur I, s'il est muni d'une loi de composition externe, partout définie, avec I comme domaine d'opérateurs :

$$(a, \alpha) \longrightarrow \exists a\alpha$$

qui satisfait à l'axiome suivant :

PQ 1/ $(\exists a\alpha \in V_k) \Longleftrightarrow$ (il existe $b \in I$ tel que $(b/a)\alpha \in V_k$) quels que soient a, α, k.

LEMME 1 : *Si α et β sont analogues, il en est de même de $\exists a\alpha$ et $\exists a\beta$, quel que soit l'individu a.*

En effet : si $\exists a\alpha \in V_k$, il existe b tel que $(b/a)\alpha \in V_k$, or $(b/a)\alpha$ est analogue à $(b/a)\beta$, donc il existe b tel que $(b/a)\beta \in V_k$, par suite $\exists a\beta \in V_k$; et réciproquement.

LEMME 2 : *Quels que soient $\alpha \in E$ et $a \in I$:* Sup. $(b/a)\varphi(\alpha)$ *existe et est égale à* $\varphi(\mathsf{E}a\alpha)$.

Démonstration :

—Si $(b/a)\alpha \in V_k$, on a aussi $\exists a\alpha \in V_k$, par passage au quotient, il en résulte : $(b/a)\varphi(\alpha) \leq \varphi(\exists a\alpha)$, et ceci pour tout b.

—Si $\varphi(\beta) \geq (b/a)\varphi(\alpha)$ pour tout b : $(b/a)\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = (b/a)\varphi(\alpha)$, autrement dit $(b/a)\alpha$ est analogue à $(b/a)\alpha \cdot \beta$; si on suppose alors $\exists a\alpha \in V_k$, il existe b tel que $(b/a)\alpha \in V_k$, donc $(b/a)\alpha \cdot \beta \in V_k$, donc $\beta \in V_k$, il en résulte : $\varphi(\exists a\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

Il en résulte que E/R *est un anneau booléien semi-quantifié* sur I, et on a :

$$\exists a\varphi(\alpha) = \varphi(\exists a\alpha)$$

où α désigne un représentant quelconque de $\varphi(\alpha)$.

De la même façon nous dirons que E est un *ensemble prébooléien quantifié* sur I, si, outre PQ 1, il vérifie l'axiome:

PQ 2/ Si a, b, c sont 3 individus différents et si α dépend de a, b, c:

$$((c/b)\exists a\alpha \in V_k) \Longrightarrow (\exists a(c/b)\alpha \in V_k)$$

pour tout k.

Par passage au quotient cet axiome devient exactement BQ 2, et par suite E/R *sera un anneau booléien quantifié* sur I.

Etant donné un ensemble prébooléien $E(T, R)$ quantifié sur I, nous appellerons *prénormalisation* de E toute application n de E dans $Z/(2)$ possédant les deux propriétés:

PN 1/ n est un préhomomorphisme (strict) de E dans $Z/(2)$ (muni de la structure prébooléienne normale).

PN 2/ $n(\exists a\alpha) \leq \operatorname{Sup}_{b\in I} . n((b/a)\alpha)$ quels que soient a et α.

Proposition 1: *La fonction caractéristique γ_k d'un ensemble déductif V_k est une prénormalisation.*

En effet:

1. si $\gamma_k(-\alpha)=1$ $\quad -\alpha\in V_k$ $\quad \alpha\notin V_k$ $\quad \gamma_k(\alpha)=0$
   si $\gamma_k(-\alpha)=0$ $\quad -\alpha\notin V_k$ $\quad \alpha\in V_k$ $\quad \gamma_k(\alpha)=1$
   donc $\gamma_k(-\alpha) = -\gamma_k(\alpha)$

2. si $\gamma_k(\alpha\cdot\beta)=1$ $\quad \alpha\cdot\beta\in V_k$ $\quad \alpha\in V_k$ et $\beta\in V_k$ $\quad \gamma_k(\alpha)=\gamma_k(\beta)=1$
   si $\gamma_k(\alpha\cdot\beta)=0$ $\quad \alpha\cdot\beta\notin V_k$ $\quad \alpha\notin V_k$ ou $\beta\notin V_k$ $\quad \gamma_k(\alpha)=0$ ou $\gamma_k(\beta)=0$
   donc $\gamma_k(\alpha\cdot\beta)=\gamma_k(\alpha)\cdot\gamma_k(\beta)$

3. si $\gamma_k(\exists a\alpha)=1$ $\exists a\alpha\in V_k$ donc il existe b tel que $(b/a)\alpha\in V_k$, alors $\gamma_k((b/a)\alpha)=1$ et $\operatorname{Sup}.\gamma_k((b/a)\alpha)=1$.

Proposition 2: *Si n est une prénormalisation de E, alors l'application N définie par: $N(\varphi(\alpha))=n(\alpha)$ est une normalisation de E/R.*

En effet:

n est un préhomomorphisme, donc N est un homomorphisme.

$$N(\exists a\varphi(\alpha)) = N(\varphi(\exists a\alpha)) = n(\exists a\alpha) \leq \operatorname{Sup}. n((b/a)\alpha) = \operatorname{Sup}. N(\varphi((b/a)\alpha))$$
$$= \operatorname{Sup}. N((b/a)\varphi(\alpha))$$

Proposition 3: *Si N est une normalisation de E/R, alors $n = N \circ \varphi$ est une prénormalisation de E.*

Démonstration immédiate.

Proposition 4: *Chaque $\varphi(V_k)$ est un ultrafiltre validant de E/R.*

Démonstration: la fonction caractéristique γ_k de V_k est une prénormalisation, donc l'application g_k définie par $g_k(\varphi(\alpha)) = \gamma_k(\alpha)$ est une normalisation de E/R, et on constate immédiatement que c'est la fonction caractéristique de $\varphi(V_k)$.

Theoreme 1: *E/R est un anneau booléien quantifié validé.*

En effet: si $\varphi(\alpha)$ appartient à tous les ultrafiltres validants, il appartient à tous les $\varphi(V_k)$, donc α appartient à tous les ensembles déductifs V_k, donc $\alpha \in T$ et $\varphi(\alpha) = 1$.

Réciproquement, tout anneau booléien quantifié *validé* peut être considéré comme un ensemble prébooléien quantifié, en prenant comme famille déductive celle de tous ses ultrafiltres validants; la relation d'analogie est alors celle d'identité. Nous dirons qu'il s'agit là de sa structure *normale*.

Etant donnés deux ensembles prébooléiens, $E(T, R)$ et $E'(T', R')$, quantifiés sur le même ensemble d'individus I, nous dirons qu'une application f de E dans E' est un *préhomomorphisme quantifié* si:

PHQ 1/ f est un préhomomorphisme d'ensembles prébooléiens.

PHQ 2/ f est une application individualisante.

PHQ 3/ $f(\exists a\alpha)$ est analogue à $\exists af(\alpha)$ modulo R', quels que soient a et α.

En particulier un tel préhomomorphisme pourra être *strict* (on remplacera alors PHQ 3 par: $f(\exists a\alpha) = \exists af(\alpha)$), c'est le cas de l'application canonique φ de E dans E/R, et d'une façon plus générale ce sera le cas chaque fois que E' sera un anneau booléien quantifié validé muni de la structure normale.

Les deux théorèmes suivants se démontrent sans aucune difficulté:

Theoreme 2: *Soient $E(T, R)$ et $E'(T', R')$ deux ensembles prébooléiens quantifiés sur I, φ et φ' leurs application canoniques, f un préhomomorphisme quantifié de E dans E', alors l'application $\bar{f}$ définie par: $\bar{f}(\varphi(\alpha)) = \varphi'(f(\alpha))$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans E'/R'.*

Theoreme 3: *Si $\bar{f}$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans un anneau* *booléien quantifié validé B (avec le meme ensemble d'individus I), alors* $f = \bar{f} \circ \varphi$ *est un préhomomorphisme quantifié (strict) de E dans B (muni de la structure normale).*

5. Application aux anneaux $\langle A \rangle$

Soit A (éléments $u, v, w, \ldots$) un ensemble individualisé sur I $(a, b, c, \ldots)$ non trivialement. A partir de A nous construisons l'ensemble prébooleien $\ddot{A}$ (tableaux α, β, γ, . . .), puis l'anneau booléien $\langle A \rangle$ (*grilles* $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, $\langle \gamma \rangle$, . . .) tous deux individualisés sur I de la façon canonique qui a été décrite au paragraphe 2 de ce chapitre. Ce paragraphe a pour but de mettre en évidence les phénomènes suivants :

—Tout anneau de type $\langle A \rangle$ est semi-quantifié, et en général quantifié (en imposant une condition très simple à A).

—Les quantificateurs qui se trouvent ainsi définis sur $\langle A \rangle$ obéissent à des règles de calcul d'une très grande simplicité, excluant toute ressemblance avec le calcul des prédicats restreint du premier ordre.

—En contrepartie, le fait pour un ultrafiltre de $\langle A \rangle$ d'être validant se traduit par des conditions assez restrictives et compliquées, alors que dans le cas du calcul des prédicats la situation est beaucoup plus simple.

—L'universalité de $\langle A \rangle$ vis à vis des structures individualisées (cf. parag. 2 de ce chap.) n'est plus conservée lorsqu'il s'agit de structures quantifiées. Là encore la situation est exactement l'opposée de celle que nous rencontrerons dans l'étude du calcul des prédicats.

Tous ces résultats, négatifs par rapport au but poursuivi, mettent en lumière les différences essentielles qu'il y a entre la construction du calcul propositionnel et celle du calcul des prédicats, à partir de leurs ensembles d'atomes respectifs, et montrent ainsi l'impossibilité de définir pour le calcul des prédicats un anneau de t.r.a. analogue à celui que nous avions construit pour le calcul propositionnel.

1/ *Semi-quantification de* $\langle A \rangle$

Soit $\langle \alpha \rangle$ une grille non close, α désignera l'un de ses représentants n'ayant aucune colonne close ; soit a un individu, nous poserons :

$qa\alpha$ = tableau déduit de α par suppression de tous les éléments de A dépendant de a, dans toutes leurs occurences dans l'écriture de α.

Exemple :

$$\alpha = \left\langle \begin{matrix} 1v & 1u & 1v \\ 0uw & 0vw & 0w \end{matrix} \right\rangle$$

où u et v dépendent de a et w est indépendant de a.

on aura :

$$qa\alpha = \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0w & 0w & 0w \end{matrix} \right\rangle$$

Soit $f \in \vec{A}$ et supposons que $qa\alpha$ soit f-clos, cela signifie que chacune de ses colonnes est f-close ; soit K l'une de ses colonnes, dont le bloc supérieur (resp. inférieur) est B (resp. B'), dire qu'elle est f-close signifie :

il y a au moins un élément $u \in B$ tel que $f(u) = 0$

ou il y a au moins un élément $u' \in B'$ tel que $f(u') = 1$

Or B (resp. B') est un sous-bloc du bloc supérieur (resp. inférieur) de la colonne correspondante de $(b/a)\alpha$, où b est un individu quelconque. Il en résulte que chaque $(b/a)\alpha$ est f-clos, et par passage au quotient :

$$\langle qa\alpha \rangle \leq (b/a)\langle \alpha \rangle \quad \text{quel que soit } b \in I.$$

Supposons avoir trouvé une autre grille $\langle \beta \rangle$ telle que : $\langle \beta \rangle \leq (b/a)\langle \alpha \rangle$ pour tout $b \in I$.

Soit $f \in \vec{A}$ telle que β soit f-clos, ce qui implique que chaque $(b/a)\alpha$ soit f-clos. Considérons une colonne K déterminée de α :

$$K = \left\langle \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\rangle$$

avec $B = B_a \cup B_0$ et $B' = B'_a \cup B'_0$ où :

B_a (resp. B'_a) ne contient que des éléments $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $u'_1, \ldots, u'_{n'}$) dépendant de a.

B_0 (resp. B'_0) ne contient que des éléments $v_1, \ldots, v_m$ (resp. $v'_1, \ldots, v'_{m'}$) indépendant de a.

Cette colonne K est supposée non close, donc en particulier chaque u_i de B_a est différent de chaque u'_j de B'_a par suite :

$(b/a)u_i \neq (b/a)u'_j$ sauf peut-être pour les individus b appartenant à la base de u_i ou de u'_j (car si u_i et u'_j sont indépendants de b, $(b/a)u_i = (b/a)u'_j$ implique : $(a/b)(b/a)u_i = (a/b)(b/a)u'_j$, soit $u_i = u'_j$).

Posons : $J = I_\alpha \cup I_\beta$, c'est une partie finie de I, donc $CJ \neq 0$, choisissons un individu b° dans CJ, tous les u_i et tous les u'_j sont indépendants de b° (lemme 4, parag. 2, chap. III), donc chaque $(b^\circ/a)u_i$ est différent de chaque $(b^\circ/a)u'_j$. Soit f° l'application coïncidant avec f, sauf peut-être pour les $(b^\circ/a)u_i$ où l'on pose :

$$f^\circ((b^\circ/a)u_i) = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

et les $(b^\circ/a)u'_j$ où l'on pose :

$$f^\circ((b^\circ/a)u'_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n'$$

β étant indépendant de b° et les $(b^\circ/a)u_i$ et les $(b^\circ/a)\ u'_j$ dépendant effectivement de b°, il en résulte qu'aucun $(b^\circ/a)u_i$ et qu'aucun $(b^\circ/a)u'_j$ ne figure dans le tableau β ; donc la f-valeur de β est identique à sa f°-valeur, β est donc f°-clos, par suite $(b^\circ/a)\alpha$ sera aussi f°clos, en particulier la colonne de $(b^\circ/a)\alpha$ correspondant à K, sera f°-close, ce qui d'après la définition de f°, implique :

il existe au moins un v_i de B_0 tel que $f^\circ(v_i) = 0$

ou il existe au moins un v'_j de B'_0 tel que $f^\circ(v'_j) = 1$

Or B_0 et B'_0 constituent précisemment les blocs supérieur et inférieur de la colonne correspondante, qaK, de $qa\alpha$; cette colonne sera donc f°-close. Il suffit maintenant de remarquer que chacun des v_i et v'_j est différent de chacun des $(b^\circ/a)u_i$ et $(b^\circ/a)u'_j$ (car les premiers sont indépendants de b°, tandis que les seconds en dependent effectivement), ce qui montre que la f-valeur de la colonne qaK est identique à sa f°-valeur ; cette colonne est donc f-close.

Ayant raisonné sur une colonne quelconque, on en déduit que la f-clôture de β implique toujours la f-clôture de $qa\alpha$, d'où :

$$\langle\beta\rangle \leq \langle qa\alpha\rangle$$

Complétons notre définition par : $qa\langle 1\rangle = \langle 1\rangle$, et nous avons le résultat suivant :

Pour toute grille $\langle\alpha\rangle$ et tout individu a, $\operatorname{Inf.}_{b\in I} (b/a)\langle\alpha\rangle$ existe et est égale à $\langle qa\alpha\rangle$, que nous noterons maintenant :

$$\forall a\langle\alpha\rangle$$

De ceci résulte évidemment l'existence de $\exists a\langle\alpha\rangle = \operatorname{Sup.} (b/a)\langle\alpha\rangle$ et un procédé de calcul de cette grille :

$$\exists a\langle\alpha\rangle = -\forall a(-\langle\alpha\rangle)$$

THEOREME 1: *Pour tout ensemble A individualisé snr I, $\langle A\rangle$ est un anneau booléien semi-quantifié sur I.*

2/ *Quantification de* $\langle A\rangle$

Cherchons à quelle condition $\langle A\rangle$ pourra être quantifié, ce que nous pourrons traduire ici par:

$$\forall a(c/b)\langle\alpha\rangle = (c/b)\forall a\langle\alpha\rangle \qquad \text{si } b \neq a \text{ et } c \neq a$$

puisque ce sont les quantificateurs universels qui s'introduisent le plus simplement.

La réponse est immédiate en considérant la construction précédente du tableau $qa\alpha$: il faut et il suffit que:

$$(u \text{ dépend de } a) \Longrightarrow ((c/b)u \text{ dépend de } a, \text{ si } b \neq a \text{ et } c \neq a) \qquad (1)$$

—Cette condition est suffisante, car alors la suppression des éléments dépendant de a dans $(c/b)\alpha$, peut se faire en supprimant d'abord dans α les éléments dépendant de a, et en prenant ensuite l'image par (c/b).

—Cette condition est nécessaire, comme on le voit sur toute grille de la forme:

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

Nous poserons alors la définition suivante:

Un ensemble A individualisé sur I sera dit *atomique*, si on a la propriété (1) quels que soient $u \in A$, a, b, c individus différents appartenant à la base de u.

THEOREME 2: *Pour que $\langle A\rangle$ soit un anneau booléien quantifié sur I, il faut et il suffit que A soit un ensemble individualisé atomique.*

Remarques

1°) Même lorsque A est un ensemble individualisé atomique, $\langle A\rangle$ n'est jamais un anneau boooléien individualisé atomique: considérons un élément u de A dépendant de a, et la grille:

$$\langle\alpha\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1u \\ 0(c/b)u \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$\langle\alpha\rangle$ dépend de a

$(c/b)\langle\alpha\rangle = \langle 1\rangle$ est indépendant de a.

2°) Ce théorème prouve l'existence d'anneaux booléiens semiquantifiés, mais non quantifiés:

Exemple: $A = I^3$ muni de la 3-individualisation engendrée par l'individualisation naturelle de I, il n'est pas atomique, car:

$u = (a, b, c)$ dépend de a, b, c (trois individus différents)

$(c/b)u = (a, c, c)$ a une base vide.

$\langle I^3\rangle$ sera donc semi-quantifié, mais non quantifié.

3/ *Ultrafitres validants de* $\langle A\rangle$

Nous supposerons maintenant que A est un ensemble individualisé atomique. Faisons d'abord les remarques suivantes:

1°) (cf. théorème 4, parag. 4, chap. I) tous les ultrafiltres de $\langle A\rangle$ sont tous les ensembles Γ_f des grilles f-closes, lorsque f parcourt $\vec{A}$.

2°) Γ_f est un ultrafiltre validant peut s'exprimer par:

$$\text{(pour tout } b,\ (b/a)\langle\alpha\rangle \text{ est } f\text{-close)} \Rightarrow (\forall a\langle\alpha\rangle \text{ est } f\text{-close}) \qquad (2)$$

3°) $\forall a$ étant un quantificateur universel, il possède la propriété:

$$\forall a(\langle\alpha\rangle\cdot\langle\beta\rangle) = \forall a\langle\alpha\rangle\cdot\forall a\langle\beta\rangle$$

il en résulte que si la condition (2) est vérifiée pour toute grille $\langle\alpha\rangle$ réduite à une colonne, elle le sera pour toute grille.

Finalement, pour savoir si Γ_f est ou n'est pas validant, nous sommes conduits à considérer une grille réduite à une colonne:

$$\langle\alpha\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1B \\ 0B' \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

dépendant effectivement de a, que l'on peut supposer non close (sinon le résultat est trivial), et à chercher dans quelles conditions la f-clôture de tous les $(b/a)\langle\alpha\rangle$ implique celle de $\forall a\langle\alpha\rangle$.

Avec les notations précédemment utilisées, nous pouvons écrire:

$$\langle\alpha\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1B_0 \\ 0B'_0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1B_a \\ 0B'_a \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = \langle\alpha_0\rangle \vee \langle\alpha_a\rangle \qquad \begin{matrix} (b/a)\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_0\rangle \vee (b/a)\langle\alpha_a\rangle \\ \forall a\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_0\rangle \end{matrix}$$

On constate alors que s'il existe un individu b° tel que $(b^\circ/a)\langle\alpha_a\rangle$ soit f-

ouverte, et si tous les $(b/a)\langle\alpha\rangle$ sont f-closes, ceci implique que $\langle\alpha_0\rangle = \forall a\langle\alpha\rangle$ soit f-close. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que Γ_f soit validant, comme on le voit en prenant une grille du type:

$$\langle\alpha\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1u \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \qquad \text{où } u \text{ dépend de } a.$$

car alors $\forall a\langle\alpha\rangle = \langle 0\rangle$ est f-ouverte pour tout f.

Posons alors les définitions suivantes:

—*grille simple* de $\langle A\rangle$: toute grille non close admettant un représentant s'écrivant au moyen d'une seule colonne, c'est à dire toute disjonction de grilles différentes de la forme $H(u)$ ou $-H(u)$.

—on dira qu'une grille simple *dépend complètement* de a, si tous les éléments de A apparaissant dans cette grille dépendent effectivement de a.

— une *application* $f \in \vec{A}$, sera dite *validante*, si quel que soit l'individu a, pour toute grille simple $\langle\alpha\rangle$ dépendant complètement de a, il existe au moins un individu b tel que $(b/a)\langle\alpha\rangle$ soit f-ouverte.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant:

THEOREME 3: *Pour que Γ_f soit un ultrafiltre validant, il faut et il suffit que f soit une application validante.*

Exemple: $A = I$ individualisé naturellement. Les seules grilles simples dépendant complètement d'un individu a sont:

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0a \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \text{ et } \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1a \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

En outre, l'ensemble des $(b/a)a$ où b parcourt I n'est autre que I lui-même. Il en résulte qu'une application $f \in \vec{A}$ sera validante si et seulement si elle n'est ni identiquement nulle ni identiquement égale à 1; autrement dit, tous les ultrafiltres, sauf deux, seront validants.

Il en résulte également que cet anneau $\langle I\rangle$ est validé: soit $\langle\alpha\rangle$ une grille f-close pour toute application f validante, soit f_0 (resp. f_1) l'application identiquement nulle (resp. égale à 1), soit b° un individu n'appartenant pas à la base de $\langle\alpha\rangle$, c'est à dire n'apparaissant pas dans l'écriture d'un certain représentant α de $\langle\alpha\rangle$. Soit f'_0 (resp. f'_1) l'application coïncidant avec f_0 (resp. f_1), sauf en b° où l'on pose:

$$f'_0(b^\circ) = 1 \qquad (\text{resp. } f'_1(b^\circ) = 0)$$

f'_0 (resp. f'_1) est validante, et il suffit de remarquer que la f'_0-valeur (resp. f'_1-valeur) de $\langle\alpha\rangle$ est identique à sa f_0-valeur (resp. f_1-valeur); $\langle\alpha\rangle$ est donc f-close pour tout $f \in \vec{A}$:

$$\langle\alpha\rangle = \langle 1 \rangle.$$

Dans le cas général nous ne chercherons pas de condition nécessaire et suffisante pour que $\langle A \rangle$ soit validé.

4/ *Problème d'universalité*

Considérons les structures et applications suivantes:

E_S: ensembles individualisés (atomiques) sur I.

E_T: anneaux booléiens quantifiés sur I.

(S, T)-applications: applications individualisantes.

T-applications: homomorphismes quantifiés.

Supposons que $\langle A \rangle$ et H, associés à A, soient solutions de ce problème universel, c'est à dire: pour tout anneau booléien quantifié B et toute application individualisante F de A dans B, il existe un homomorphisme quantifié G unique de $\langle A \rangle$ dans B, tel que: $F = G_0 H$. Nous pouvons montrer que ceci est faux, en prenant le contre-exemple suivant:

B: anneau booléien quantifié quelconque

F: application identiquement égale à 1

On aura donc: $G(H(u)) = 1$ quel que soit u; considérons u dépendant de a, $H(u) = \left\langle\!\!\left\langle {1 \atop 0u} \right\rangle\!\!\right\rangle$, $\forall a H(u) = \langle 0 \rangle$, donc $G(\forall a H(u)) = 0$ par ailleurs G devant être quantifié: $G(\forall a H(u)) = \forall a G(H(u)) = \forall a 1 = 1$, d'où une contradiction.

5°/ *Linéarisation de certains anneaux* $\langle A \rangle$

Il y a une catégorie intéressante d'anneaux $\langle A \rangle$: lorsqu'on prend $A = E \cup I$, où E est un ensemble quelconque (pouvant être vide) individualisé trivialement sur I (on pourra supposer que E et I sont disjoints), I étant individualisé naturellement, et A étant alors muni de l'individualisation somme.

On démontre sans aucune peine les résultats suivants:

—A est atomique, par suite $\langle A \rangle$ est quantifié.

—$f \in \vec{A}$ est validante si et seulement si sa restriction à I n'est ni identiquement nulle, ni identiquement égale à 1.

—$\langle A\rangle$ est un anneau quantifié validé.

Considérons une grille $\langle\alpha\rangle$, de base non vide $\{a_1, \ldots, a_n\}$, nous pouvons l'écrire à l'aide d'un représentant α ayant exactement la même base (prop. 3, parag. 2, chap. III); $\langle\alpha\rangle$ est le produit d'un certain nombre de grilles simples:

$$\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_1\rangle \cdots \langle\alpha_s\rangle$$

Considérons l'individu a_1, pour chaque grille simple $\langle\alpha_i\rangle$:

—ou bien $\langle\alpha_i\rangle$ est indépendante de a_1.

$$\left.\begin{array}{l}\text{—ou bien } \langle\alpha_i\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix}1\\ 0a_1\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \langle\beta_i\rangle \\ \text{—ou bien } \langle\alpha_i\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix}1a_1\\ 0\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \langle\beta_i\rangle = \left[\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix}1\\ 0a_1\end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle + \langle 1\rangle\right] \vee \langle\beta_i\rangle\end{array}\right\} \text{où } \langle\beta\rangle \text{ est indépendante de } a_1.$$

Il en résulte que $\langle\alpha\rangle$ pourra s'écrire:

$$\langle\alpha\rangle = \langle\alpha'\rangle + \langle\alpha''\rangle \cdot H(a_1)$$

où $\langle\alpha'\rangle$ et $\langle\alpha''\rangle$ sont indépendantes de a_1, c'est à dire dépendent au plus de $a_2, \ldots, a_n$. On démontre facilement l'unicité de cette décomposition.

La même opération peut être faite pour $\langle\alpha'\rangle$ et $\langle\alpha''\rangle$ avec l'individu a_2, etc $\cdots$ On aboutit finalement au résultat suivant:

Toute grille $\langle\alpha\rangle$ de $\langle E \cup I\rangle$, de base $\{a_1, \ldots, a_n\}$, peut s'écrire d'une façon et d'une seule:

$$\langle\alpha\rangle = U(a_1, \ldots, a_n) = r_n \cdot a_1 \cdots a_n + \sum r_{i,n-1} \cdot a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n + \cdots \\ + \sum r_{i,1} \cdot a_i + r_0$$

où les r désignent des éléments de l'anneau booléien $\langle E\rangle$, et où, pour simplifier l'écriture, on a identifié chaque individu a à $H(a)$. U est donc un polynôme à n variables, du premier degré par rapport à chacune de ces variables, à coefficients dans $\langle E\rangle$. Remarquons enfin que tout polynôme de ce type est la "représentation linéaire" d'une grille $\langle\alpha\rangle$.

D'une façon un peu plus générale, nous pouvons remplacer l'anneau $\langle E\rangle$ par un anneau booléien B absolument quelconque, et considérer l'anneau, que nous noterons $L(B:I)$, des polynômes à coefficients dans B, à plusieurs variables prises dans I (ces variables obéissant également à la règle de l'idempotence du produit).

Un tel anneau $L(B:I)$ est individualisable de façon très simple par: $(b/a)U =$ le polynôme déduit de U en remplaçant la variable a par la variable b.

Il est semi-quantifié et même quantifié :

soit $U = U' + a \cdot U''$ où U' et U'' sont indépendants de a

soit V un autre polynôme indépendant de a, tel que $V \geq U$:

$$U \cdot V = U = U' \cdot V + a \cdot U'' \cdot V$$

ce qui implique : $U' \cdot V = U'$ et $U'' \cdot V = U''$, soit $U' \leq V$ et $U'' \leq V$ d'où $V \geq U' \vee U''$

$U' \vee U''$ est donc le plus petit élément de $i(a)(U)$. On a donc tout simplement :

$$\exists a U = U' \vee U''$$

et pour les quantificateurs universels :

$$\begin{aligned} \forall a U &= -\exists a(-U) = -\exists a(U' + 1 + a \cdot U'') \\ &= -((U' + 1) \vee U'') \end{aligned}$$

$$\forall a U = U' \cdot - U''$$

On démontre facilement que tout homomorphisme de $L(B:I)$ dans $Z/(2)$ est entièrement caractérisé par sa restriction à B (qui doit être un homomorphisme) et sa restriction à I (qui peut être une application quelconque), et qu'un tel homomorphisme sera une normalisation si et seulement si sa restriction à I n'est ni identiquement nulle ni identiquement égale à 1. Il résulte de là que $L(B:I)$ est toujours un anneau validé.

Chapitre IV. Applications au calcul des Predicats

1. Anneau booléien quantifié validé E/R

Rappelons les principales définitions et précisons nos notations pour le Calcul des Prédicats restreint du premier ordre sans égalité :

I: ensemble des individus $a, b, \ldots$ (supposé infini)

X: ensemble des variables $x, y, \ldots$ (supposé infini)

R^n: ensemble des prédicats de poids n: $r_1^n, r_2^n, \ldots$

$R = \bigcup_{n \in N} R^n$: ensemble des prédicats.

A: ensemble des atomes, de la forme : $\tau = r_\lambda^n a_1 \cdots a_n$

E: ensemble des énoncés $\alpha, \beta, \ldots$ utilisant les symboles logiques :

$$- \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \exists \forall$$

F^x: ensemble des formules quantifiables par une variable x, c'est à dire de la forme: $\Phi^x = (x/a)\alpha$ où α est un énoncé sans occurence de x.

T: ensemble des énoncés démontrables (ou universellement valides).

Rappelons la définition des ***validations*** (il s'agira toujours ici de validations de base I): toute partie V de E telle que:

1) $\alpha \in V \Longleftrightarrow -\alpha \notin V$

2) $\alpha \wedge \beta \in V \Longleftrightarrow \alpha \in V$ et $\beta \in V$

3) $\alpha \vee \beta \in V \Longleftrightarrow \alpha \in V$ ou $\beta \in V$

4) $\alpha \rightarrow \beta \in V \Longleftrightarrow \alpha \notin V$ ou $\beta \in V$

5) $\alpha \leftrightarrow \beta \in V \Longleftrightarrow (\alpha \in V$ et $\beta \in V)$ ou $(\alpha \notin V$ et $\beta \notin V)$

6) $\exists x[\Phi^x] \in V \Longleftrightarrow$ il existe a tel que $(a/x)\Phi^x \in V$

7) $\forall x[\Phi^x] \in V \Longleftrightarrow$ pour tout a: $(a/x)\Phi^x \in V$

Pour toute partie B de A il existe une validation et une seule, V, telle que: $V \cap A = B$.

Rappelons également:

—si $\alpha \in T$, alors quels que soient les individus a et b: $(a/b)\alpha \in T$

—pour que $\alpha \in T$ il faut et il suffit que α appartienne à toutes les validations, autrement dit T est l'intersection de toutes les validations.

Nous supposerons également connues toutes les propriétés des substitutions d'individus (au sens habituel) dans les énoncés, et remarquons qu'ici: α est indépendant de a, c'est à dire $(b/a)\alpha = \alpha$ pour tout b, équivaut à: l'individu a n'a pas d'occurence dans l'énoncé α (c'est à dire n'apparait pas dans l'écriture explicite de α).

Ces substitutions définissent une structure d'individualisation sur E; nous remarquons d'ailleurs que E, et en particulier A, sont des ensembles atomiques.

Nous constatons ensuite que E est un ensemble prébooléien pour les opérations $\wedge$ et $-$, et pour la famille déductive constituée par toutes les validations, le puits de E est alors l'ensemble T des énoncés démontrables. En outre les substitutions d'individus sont des préhomomorphismes (stricts) de E. Enfin, nous pouvons définir une loi de composition externe avec I comme domaine d'opérateurs, de la façon suivante:

Dans chaque énoncé α il n'y a qu'un nombre fini d'occurences de variables, faisons alors une fois pour toutes le choix pour chaque énoncé α d'une variable x_α n'apparaissant pas dans α; la loi de composition sera alors: $(a, \alpha) \longrightarrow$

$\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha]$, que nous noterons simplement $\exists a\alpha$.

E est alors un ***ensemble prébooléien quantifié*** sur I; les axiomes se vérifient en effêt facilement:

PQ 1/ Soit une validation V: si $\exists a\alpha \in V$, soit $\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha] \in V$, alors il existe un individu b tel que $(b/x_\alpha)(x_\alpha/a)\alpha \in V$, soit tout simplement $(b/a)\alpha \in V$; et réciproquement.

PQ 2/ Si b et c sont différents de a:

$$\exists a(c/b)\alpha = \exists x_{\alpha'}[(x_{\alpha'}/a)(c/b)\alpha]$$

en posant $\alpha' = (c/b)\alpha$
or:

$$(x_{\alpha'}/a)(c/b)\alpha = (c/b)(x_{\alpha'}/a)\alpha$$

donc:

$$\exists a(c/b)\alpha = \exists x_{\alpha'}[(c/b)(x_{\alpha'}/a)\alpha] = (c/b)\exists x_{\alpha'}[(x_{\alpha'}/a)\alpha]$$

par ailleurs on sait que

$$\exists x_{\alpha'}[(x_{\alpha'}/a)\alpha] \leftrightarrow \exists x_\alpha[(x_\alpha/x_{\alpha'})(x_{\alpha'}/a)\alpha]$$

est un énoncé démontrable

et en remarquant que:

$$(x_\alpha/x_{\alpha'})(x_{\alpha'}/a)\alpha = (x_\alpha/a)\alpha$$

il en résulte que
$\exists a(c/b)\alpha$ est analogue à:

$$(c/b)\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha] = (c/b)\exists a\alpha.$$

Donc E est bien un ensemble prébooléien quantifié sur I, nous désignerons, comme d'habitude, par E/R l'anneau booléien quotient (anneau booléien quantifié validé), et par φ l'application canonique de E dans E/R.

Remarque: La structure d'ensemble prébooléien quantifié de E dépend du choix pour chaque énoncé, de la variable x_α, mais quel que soit ce choix on obtient toujours le même anneau booléien quotient E/R; en effet, considérons un autre choix, soit x'_α pour l'énoncé α, et posons:

$$\exists' a\alpha = \exists x'_\alpha[(x'_\alpha/a)\alpha]$$

cet énoncé est analogue à:

$$\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha]$$

(la vérification est tout à fait semblable à celle de l'axiome PQ 2), il en résulte bien :

$$\varphi(\exists' a\alpha) = \varphi(\exists a\alpha)$$

Nous avons vu que chaque $\varphi(V)$, où V est une validation, est un ultrafiltre validant de E/R, ici nous avons également la réciproque :

Proposition 1 : *Si $\mathscr{V}$ est un ultrafiltre validant de E/R, alors $\varphi^{-1}(\mathscr{V})$ est une validation de E.*

En effet, posons $V = \varphi^{-1}(\mathscr{V})$

1) si $\alpha \in V$: $\varphi(\alpha) \in \mathscr{V}$, donc $-\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) \notin \mathscr{V}$, donc $-\alpha \notin V$. Réciproquement : si $-\alpha \notin V$, $\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha) \notin \mathscr{V}$, donc $\varphi(\alpha) \in \mathscr{V}$, soit $\alpha \in V$.

2), 3), 4), 5) vérifications analogues en utilisant les propriétés de n'importe quel ultrafiltre de n'importe quel anneau booléien.

6) si $\exists x[\Phi^x] \in V$: Φ^x est de la forme $(x/a)\alpha$, où α est un énoncé, l'énoncé $\exists x[(x/a)\alpha]$ est analogue à $\exists x_\alpha[(x_\alpha/a)\alpha] = \exists a\alpha$, donc $\varphi(\exists a\alpha) = \exists a\varphi(\alpha) \in \mathscr{V}$, donc il existe un individu b tel que $(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b/a)\alpha \in \mathscr{V}$, et par suite : $(b/a)\alpha = (b/x)(x/a)\alpha = (b/x)\Phi^x \in V$; et réciproquement.

7) vérification analogue.

Proposition 2 : *Pour qu'une partie V de E soit une validation, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique n soit une prénormalisation de E.*

En effet, il suffit de démontrer la réciproque de la prop. 1, parag. 4, chap. III. Supposons donc que n soit une prénormalisation, l'application N définie par $N(\varphi(\alpha)) = n(\alpha)$ est alors une normalisation de E/R, donc la fonction caractéristique d'un ultrafiltre validant $\mathscr{V}$ de E/R, $V = \varphi^{-1}(\mathscr{V})$ est une validation de E, et :

$$\alpha \in V \Longleftrightarrow \varphi(\alpha) \in \mathscr{V} \Longleftrightarrow N(\varphi(\alpha)) = 1 \Longleftrightarrow n(\alpha) = 1$$

donc n est la fonction caractéristique de V.

2. Universalité de E/R

Dans ce paragraphe, nous proposons de montrer que l'anneau booléien quantifié validé E/R précédemment défini et la restriction φ' de φ (application canonique de E dans E/R) à l'ensemble A des atomes du calcul des prédicats, associés à A, sont solution du problème universel relatif aux structures et applications suivantes :

E_S : ensembles individualisés sur I

E_T : anneaux booléiens quantifiés validés sur I

(S, T)-applications : applications individualisantes

T-applications : homomorphismes quantifiés.

Lemme 1 : *Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléien B quantifié sur I, il existe un prolongement et un seul f° de f à E, vérifiant quels que soient les énoncés α et β, les individus a et b, et la variable x, les 8 conditions :*

1°) $f^\circ(-\alpha) = -f^\circ(\alpha)$

2°) $f^\circ(\alpha \wedge \beta) = f^\circ(\alpha) \cdot f^\circ(\beta)$

3°) $f^\circ(a \vee \beta) = f^\circ(\alpha) \vee f^\circ(\beta)$

4°) $f^\circ(\alpha \rightarrow \beta) = f^\circ(\alpha) \rightarrow f^\circ(\beta)$

5°) $f^\circ(\alpha \leftrightarrow \beta) = f^\circ(\alpha) \leftrightarrow f^\circ(\beta)$

6°) $f^\circ(\exists x[x/a)\alpha]) = \exists a f^\circ(\alpha)$

7°) $f^\circ(\forall x[(x/a)\alpha]) = \forall a f^\circ(\alpha)$

8°) $f^\circ((b/a)\alpha) = (b/a) f^\circ(\alpha)$

Démonstration : Soit E_n l'ensemble des énoncés comportant au plus n symboles logiques, et soit $\Pi(n)$ l'assertion : "il existe une application et une seule f_n de E_n dans B, prolongeant f, et qui sur E_n vérifie les 8 conditions précédentes".

a) $\Pi(0)$ est vraie, avec $f_0 = f$.

b) supposons $\Pi(n)$ vraie, et définissons l'application f_{n+1} de E_{n+1} dans B par :

$$
\begin{array}{lll}
f_{n+1}(\alpha) = f_n(\alpha) & \text{si } \alpha \in E_n & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = -f_n(\beta) & \text{si } \alpha = -\beta & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = f_n(\beta) \cdot f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \wedge \gamma & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = f_n(\beta) \vee f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \vee \gamma & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = f_n(\beta) \rightarrow f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \rightarrow \gamma & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = f_n(\beta) \leftrightarrow f_n(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \leftrightarrow \gamma & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = \exists a f_n(\beta) & \text{si } \alpha = \exists x[(x/a)\beta] & \\
\phantom{f_{n+1}(\alpha)} = \forall a f_n(\beta) & \text{si } \alpha = \forall x[(x/a)\beta] &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}
\begin{array}{l}\alpha \text{ ayant exactement} \\ n+1 \text{ symboles} \\ \text{logiques}\end{array}
$$

f_{n+1} est ainsi bien définie sur E_{n+1}, elle prolonge f_n, donc f, et vérifie sur E_{n+1} les 8 conditions requises, en effet :

1°) $f_{n+1}(-\alpha) = f_n(-\alpha) = -f_n(\alpha) = -f_{n+1}(\alpha)$ si α a au plus $n-1$ symboles logiques.

$= -f_n(\alpha) = -f_{n+1}(\alpha)$ par définition, si α a n symboles logiques.

2°) $\cdots$ 5°) vérifications analogues.

6°) si α a au plus $n-1$ symboles logiques :

$$f_{n+1}(\exists x[(x/a)\alpha]) = f_n(\exists x[(x/a)\alpha]) = \exists a f_n(\alpha) = \exists a f_{n+1}(\alpha)$$

si α a n symboles logiques :

$$f_{n+1}(\exists x[(x/a)\alpha]) = \exists a f_n(\alpha) = \exists a f_{n+1}(\alpha)$$

par définition.

7°) vérification analogue.

8°) là encore, seul le cas où α a exactement $n+1$ symboles logiques prête à vérification, et pour cela nous envisagerons les 7 formes possibles de l'énoncé α :

a) $\alpha = -\beta$, $f_{n+1}(a) = -f_n(\beta)$ et $f_n((b/a)\beta) = (b/a)f_n(\beta)$ par hypothèse de récurrence, donc :

$$f_{n+1}((b/a)\alpha) = f_{n+1}((b/a)-\beta) = f_{n+1}(-(b/a)\beta) = -f_n((b/a)\beta)$$
$$= -(b/a)f_n(\beta) = (b/a)(-f_n(\beta)) = (b/a)f_{n+1}(\alpha)$$

b), . . . , e) c'est à dire pour : $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ les vérifications sont analogues.

f) $\alpha = \exists x[(x/a')\beta]$, alors $f_{n+1}(\alpha) = \exists a' f_n(\beta)$

Eliminons d'abord le cas où $a' = a$:

$(b/a)\alpha = \alpha$ car α est indépendant de a', $f_{n+1}((b/a)\alpha) = f_{n+1}(\alpha) = (b/a)f_{n+1}(\alpha)$ car $\exists a' f_n(\beta)$ est aussi indépendant de a'.

Supposons donc $a' \neq a$: soit a'' un individu tel que β (et par suite $f_n(\beta)$) soit indépendant de a'', et $a'' \neq a$, et $a'' \neq b$.

On vérifie immédiatement :

$(x/a')\beta = (x/a'')(a''/a')\beta$

$(b/a)\alpha = (b/a)\exists x[(x/a')\beta] = \exists x[(b/a)(x/a')\beta] = \exists x[(b/a)(x/a'')(a''/a')\beta]$

$(b/a)(x/a'')(a''/a')\beta = (x/a'')(b/a)(a''/a')\beta$

donc $(b/a)\alpha = \exists x[(x/a'')(b/a)(a''/a')\beta]$

il en résulte:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}((b/a)\alpha) &= \exists a'' f_n((b/a)(a''/a')\beta) && \text{par définition}\\
&= \exists a''(b/a)(a''/a')f_n(\beta) && \text{hypothèse de récurrence}\\
&= (b/a)\exists a''(a''/a')f_n(\beta) && \text{car } B \text{ est quantifié}\\
&= (b/a)\exists a' f_n(\beta) && \text{prop. 2, parag. 3, chap III}\\
&= (b/a)f_{n+1}(\alpha)
\end{aligned}$$

g) $\alpha = \forall x[(x/a')\beta]$: démonstration analogue.

En outre, f_{n+1} est la seule telle application, en effet, si g en est une autre, la restriction de g à E_n doit coïncider avec f_n (par hypothèse de récurrence), donc si $\alpha \in E_n$:

$$f_{n+1}(\alpha) = f_n(\alpha) = g(\alpha)$$

et si $\alpha \in E_{n+1}$:

—par exemple, si $\alpha = \beta \vee \gamma$: $f_{n+1}(\alpha) = f_n(\beta) \vee f_n(\gamma) = g(\beta) \vee g(\gamma) = g(\beta \vee \gamma)$ $= g(\alpha)$

—par exemple, si $\alpha = \forall x[(x/a)\beta]$: $f_{n+1}(\alpha) = \forall a f_n(\beta) = \forall a g(\beta)$ $= g(\forall x[(x/a)\beta]) = g(\alpha)$

etc $\cdots$

Donc $g = f_{n+1}$

L'assertion $\Pi(n)$ est donc vraie pour tout n. Pour tout énoncé α, posons alors:

$$f^\circ(\alpha) = f_n(\alpha)$$

où n est le nombre de symboles logiques de α.

f° applique bien E dans B, prolonge f, vérifie les 8 conditions requises et c'est la seule telle application.

LEMME 2: *Le procédé décrit par le lemme* 1 *permet d'obtenir tous les préhomomorphismes quantifiés (stricts) de E dans un anneau booléien quantifié validé B (muni de la structure normale).*

Démonstration: 1°/ Soit f° une application construite ainsi que l'indique le lemme 1, f° conserve évidemment la multiplication, la négation et les substitutions, en outre:

$$f^\circ(\exists a\alpha) = f^\circ(\exists x_a[(x_a/a)\alpha]) = \exists a f^\circ(\alpha)$$

Il reste à montrer que si α est un énoncé démontrable, on a alors $f^\circ(\alpha) = 1$; ceci se vérifie par récurrence:

—si α a la forme d'un axiome du calcul propositionnel: immédiat.

—si α est l'axiome: $(a/x)\Phi x \to \exists x[\Phi^x]$

soit $\Phi^x = (x/b)\beta$, $\alpha = (a/x)(x/b)\beta \to \exists x[(x/b)\beta]$

$= (a/b)\beta \to \exists x[(x/b)\beta]$

$$f^\circ(\alpha) = f^\circ((a/b)\beta) \to f^\circ(\exists x[(x/b)\beta]) = (a/b)f^\circ(\beta) \to \exists b f^\circ(\beta) = 1$$

puisque $\exists b f^\circ(\beta) = \mathrm{Sup.}\,(c/b)f^\circ(\beta)$

—démonstration analogue si α est l'axiome: $\forall x[\Phi^x] \to (a/x)\Phi^x$

—si α est démontrable par la règle de modus ponens: il existe $\beta \in T$ tel que $\beta \to \alpha \in T$, et si l'on suppose $f^\circ(\beta) = f^\circ(\beta \to \alpha) = 1$, on a alors $f^\circ(\alpha) = 1$ (même vérification que pour le calcul propositionnel).

—si $\alpha = \exists x[\Phi^x] \to \beta$, l'énoncé $(a/x)\Phi^x \to \beta$ étant démontrable avec Φ^x et β indépendants de a, et si l'on suppose que $f^\circ((a/x)\Phi^x \to \beta) = 1$ soit $\Phi^x = (x/b)\gamma$, alors $(a/x)\Phi^x \to \beta = (a/x)(x/b)\gamma \to \beta = (a/b)\gamma \to \beta$

par hypothèse: $f^\circ((a/b)\gamma \to \beta) = 1$, ou encore: $(a/b)f^\circ(\gamma) \leq f^\circ(\beta)$ en outre:

$$f^\circ(\alpha) = f^\circ(\exists x[(x/b)\gamma]) \to f^\circ(\beta) = \exists b f^\circ(\gamma) \to f^\circ(\beta)$$

β est indépendant de a, donc aussi $f^\circ(\beta)$

Φ^x est indépendant de a, donc si $b \neq a$, γ et par suite $f^\circ(\gamma)$ seront indépendants de a, et dans ce cas il suffit d'appliquer la prop. 3, parag. 3, Chap. III:

$$\exists b f^\circ(\gamma) \leq f^\circ(\beta) \quad \text{donc} \quad f^\circ(\alpha) = 1$$

Dans le cas où $b = a$: $f^\circ(\gamma) \leq f^\circ(\beta)$, $f^\circ(\beta)$ est indépendant de a, c'est à dire ici b, donc $\exists b f^\circ(\gamma) \leq f^\circ(\beta)$, donc $f^\circ(\alpha) = 1$

—Démonstration analogue si $\alpha = \beta \to \forall x[\Phi^x]$, lorsque $\beta \to (a/x)\Phi^x$ est démontrable avec Φ^x et β indépendants de a.

f° est donc bien un préhomomorphisme quantifié.

2°/ Si g est un préhomomorphisme quantifié de E dans B, il vérifie les 8 conditions du lemme 1, car d'après le théorème 2, parag. 4, chap. III, l'application $\bar{g}$ définie par: $\bar{g}(\varphi(\alpha)) = g(\alpha)$ est un homomorphisme quantifié de E/R dans B, on a donc, par exemple:

$$g(\alpha \vee \beta) = \bar{g}(\varphi(\alpha \vee \beta)) = \bar{g}(\varphi(\alpha)) \vee \bar{g}(\varphi(\beta)) = g(\alpha) \vee g(\beta)$$
$$g(\forall x[(x/a)\alpha]) = \bar{g}(\varphi(\forall[(x/a)\alpha])) = \bar{g}(\varphi(\forall a\alpha)) = \forall a\bar{g}(\varphi(\alpha)) = \forall a g(\alpha)$$

etc $\cdots$

THEOREME 1: *L'anneau booléien quantifié validé E/R et l'application φ', restriction de φ à A, associés à A, sont universels pour le problème envisagé.*

Démonstration: Soit f une application individualisante de A dans un anneau booléien quantifié validé B. A partir de f nous construisons le préhomomorphisme quantifié f° (lemmes 1 et 2) de E dans B, puis l'extension $\bar{f}^\circ$ de f° définie par: $\bar{f}^\circ(\varphi(\alpha)) = f^\circ(\alpha)$, qui est un homomorphisme quantifié de E/R dans B.

Soit un atome τ: $\bar{f}^\circ(\varphi'(\tau)) = \bar{f}^\circ(\varphi(\tau)) = f^\circ(\tau) = f(\tau)$ donc $f = \bar{f}^\circ \circ \varphi'$

En outre, cette décomposition est unique: en effet, soit F un autre homomorphisme quantifié de E/R dans B, tel que $f = F \circ \varphi'$; $\bar{f}^\circ \circ \varphi$ et $F \circ \varphi$ sont deux préhomomorphismes quantifiés de E dans B, ils coïncident sur A:

$$\bar{f}^\circ(\varphi(\tau)) = f^\circ(\tau) = f(\tau) = F(\varphi'(\tau)) = F(\varphi(\tau))$$

donc ils sont identiques, et par suite $\bar{f}^\circ$ et F sont identiques.

Remarques

1°/ Tout préhomomorphisme quantifié de E dans B est donc entièrement défini par sa restriction sur A, celle-ci étant une application individualisante arbitraire.

2°/ D'après ce qui précède, pour qu'un énoncé α ne soit pas démontrable, il suffit que l'on puisse trouver un anneau booléien quantifié validé B et une application individualisante f de A dans B, tels que $f^\circ(\alpha) \neq 1$, f° étant le préhomomorphisme quantifié unique prolongeant f.

Exemple:

$$\alpha = \forall y[(y/b)\exists x[(x/a)r_0^2 ab]] \to \exists x[(x/a)\forall y[(y/b)r_0^2 ab]]$$

r_0^2 étant un prédicat de poids 2 quelconque.

Considérons l'anneau booléien quantifié validé $L_0 = L(Z/(2):I)$, et soit f l'application de A dans L_0 définie par:

$f(\tau) = 0$ si l'atome τ est dominé par un prédicat autre que r_0^2

$f(r_0^2 cd) = c + d$ (c'est à dire: $1 \cdot c + 1 \cdot d$) quels que soient c et d,

f est bien une application individualisante de A dans L_0, donc se prolonge en un préhomomorphisme quantifié f° unique ; on a :

$$f^\circ(\exists x[(x/a)r_0^2ab]) = \exists a f^\circ(r_0^2ab) = \exists a(a+b) = 1 \vee b = 1$$
$$f^\circ(\forall y[(y/b)r_0^2ab]) = \forall b f^\circ(r_0^2ab) = \forall b(a+b) = a \cdot 0 = 0$$
$$f^\circ(\forall y[(y/b)\exists x[(x/a)r_0^2ab]]) = \forall b(1) = 1$$
$$f^\circ(\exists x[(x/a)\forall y[(y/b)r_0^2ab]]) = \exists a(0) = 0$$
$$f^\circ(\alpha) = 1 \to 0 = 0$$

Donc α n'est pas démontrable.

3°/ Si nous prenons pour B un anneau quantifié trivialement, un préhomomorphisme quantifié f° de E dans B est caractérisé par sa restriction f à A, elle-même entièrement définie par la donnée d'une application θ, qui peut être absolument arbitraire, de R (ensemble des prédicats) dans B ; en effet, étant donnés deux atomes dominés par le même prédicat :

$$\tau = r_\lambda^n a_1 \cdots a_n \text{ et } \tau' = r_\lambda^n b_1 \cdots b_n$$

ces deux atomes peuvent toujours se déduire d'un même troisième : $\tau'' = r_\lambda^n c_1 \cdots c_n$ par un certain nombre de substitutions d'individus, on aura donc :

$$f(\tau) = f(\tau'') = f(\tau') = \theta(r^n)$$

Il résulte de ceci qu'il est faux que pour tout anneau booléien quantifié validé B fixé, on ait la propriété :

$$(f^\circ(\alpha) = 1 \text{ pour tout préhomomorphisme quantifié}) \Longleftrightarrow (\alpha \in T)$$

car lorsque B est trivial, on a : $f^\circ(\tau \to \tau') = 1$, pour tout f°, sous la seule condition que τ et τ' soient dominés par le même prédicat.

Par contre il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

"$f^\circ(\alpha) = 1$ pour tout préhomomorphisme quantifié de E dans tout anneau booléien quantifié validé B" et "$\alpha \in T$"

puisque la première de ces deux propositions concerne en particulier l'application canonique φ de E dans E/R, et implique donc $\varphi(\alpha) = 1$, soit $\alpha \in T$.

3. Tableaux de réduction inachevés

S'il n'est pas possible de définir pour le calcul des prédicats un anneau de t.r.a. analogue à celui du calcul propositionnel, on peut par contre définir les t.r.i. d'une manière tout à fait semblable, en remplaçant simplement la notion de préhomomorphisme par celle de prénormalisation.

LEMME 1: *Soit n une application quelconque de A dans $Z/(2)$, il existe une prénormalisation unique n° de E prolongeant n.*

Démonstration: Soit $A' = n^{-1}(1)$, il existe une validation V et une seule telle que $V \cap A = A'$, soit n° la fonction caractéristique de V, c'est une prénormalisation de E (prop. 2, parag. 1, chap. IV), qui prolonge bien n.

Montrons que n° est la seule prénormalisation répondant à la question: en effet, supposons qu'il y en ait une autre, soit $n^{\circ\prime}$: $n^{\circ\prime}$ sera la fonction caractéristique d'une autre validation V', dont la trace sur A devra être la même que celle de V; il en résulte que V et V', et par suite n° et $n^{\circ\prime}$, sont identiques.

Remarque: on aurait pu également démontrer ce lemme, comme pour les préhomomorphismes (quantifiés), en montrant qu'il existe un prolongement unique n° de n vérifiant, pour tous énoncés, les propriétés:

1. $n^\circ(-\alpha) = -n^\circ(\alpha)$
2. $n^\circ(\alpha \wedge \beta) = n^\circ(\alpha) \cdot n^\circ(\beta)$
3. $n^\circ(\alpha \vee \beta) = n^\circ(\alpha) \vee n^\circ(\beta)$
4. $n(\alpha \rightarrow \beta) = n^\circ(\alpha) \rightarrow n^\circ(\beta)$
5. $n^\circ(\alpha \leftrightarrow \beta) = n^\circ(\alpha) \leftrightarrow n^\circ(\beta)$
6. $n^\circ(\exists x[\Phi^x]) = \text{Sup.}\, n^\circ((a/x)\Phi^x)$
7. $n^\circ(\forall x[\Phi^x]) = \text{Inf.}\, n^\circ((a/x)\Phi^x)$

et en montrant ensuite que ce procédé permet de construire toutes les prénormalisations de E.

Notations:

—une application quelconque de A dans U (ou $Z/(2)$) sera notée n

—la prénormalisation unique prolongeant n, sera notée n°

—la validation unique de fonction caractéristique n° sera notée V_n

—l'ensemble de toutes les prénormalisations de E sera noté $\vec{\omega}$; il est donc en correspondance biunivoque avec $\vec{A}$, et avec l'ensemble des validations.

LEMME 2: *Pour qu'un énoncé α soit démontrable il faut et il suffit que $n^\circ(\alpha) = 1$ pour toute prénormalisation n° de E.*

Ceci résulte immédiatement du fait que T est l'intersection de toutes les validations.

Il est alors possible de définir les t.r.i. exactement comme dans le cas du calcul propositionnel (parag. 3, chap. II) :

A partir de l'ensemble E des énoncés du calcul des prédicats, nous construisons l'anneau booléien $\langle E\rangle$; désignons toujours par K_f l'ensemble des grilles f-closes, où $f \in \vec{E}$; $\vec{\omega}$ est un sous-ensemble de $\vec{E}$, $(K_{n^\circ})_{n^\circ \in \vec{\omega}}$ est une sous-famille de $(K_f)_{f \in \vec{E}}$: il en résulte que $\langle E\rangle$ peut être considéré comme un ensemble prébooléien, avec sa multiplication et sa négation d'anneau et avec la famille déductive$(K_{n^\circ})_{n^\circ \in \vec{\omega}}$; il sera alors noté $)E($. Cet ensemble prébooléien $)E($ engendre un anneau booléien que nous noterons $\{E\}$. On constate immédiatement que les 10 opérations de réduction établies pour le calcul propositionnel sont également valables pour cet anneau $\{E\}$, puisque les prénormalisations sont des préhomomorphismes particuliers. Nous noterons encore ρ l'application de E dans $\{E\}$:

$$\rho(\alpha) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}$$

et $\rho(\alpha)$ sera appelé le *tableau de réduction inachevé* (t.r.i.) de l'énoncé α.

LEMME 3 : *Pour qu'un énoncé α soit démontrable il faut et il suffit que* $\rho(\alpha) = \{1\}$

En effet : si $\alpha \in T$, pour toute prénormalisation n° on a $n^\circ(\alpha) = 1$, donc $\rho(\alpha)$ est n°-close pour tout n°, donc $\rho(\alpha) = \{1\}$; et réciproquement.

LEMME 4 : *ρ est un préhomomorphisme de E dans $\{E\}$*

En effet :

—on vient de voir que : $\rho(T) = \{1\}$

—on a :

$$\rho(-\alpha) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0-\alpha \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1\alpha \\ 0 \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\} = -\rho(\alpha)$$

—et :

$$\rho(\alpha \wedge \beta) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \wedge \beta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0\alpha & 0\beta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\beta \end{matrix} \right\} = \rho(\alpha) \cdot \rho(\beta)$$

Du théorème 2, parag. 1, chap. I, on déduit alors : l'application ρ^* de E/R dans $\{E\}$, définie par :

$$\rho^*(\varphi(\alpha)) = \rho(\alpha)$$

est un homomorphisme d'anneaux.

THEOREME 1 : *ρ^* est un isomorphisme d'anneaux de E/R sur $\{E\}$*

Démonstration :

ρ^* est biunivoque :

$$\begin{aligned} \text{si } \rho^*(\varphi(\alpha)) &= \rho^*(\varphi(\beta)) \\ \rho(\alpha) &= \rho(\beta) \\ \rho(\alpha) \leftrightarrow \rho(\beta) &= \rho(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\in T \\ \varphi(\alpha) &= \varphi(\beta) \end{aligned}$$

ρ^* est surjective : ceci est toujours dû à la possibilité de décomposer toute grille de $\{E\}$ en grilles élémentaires du type :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}$$

(et même, pour toute grille, de trouver une grille élémentaire équivalente).

Il résulte bien entendu de ce théorème que $\{E\}$ pourra être considéré comme un anneau booléien quantifié sur I, en définissant les substitutions d'individus par :

$$(b/a)\{\alpha\} = \rho^*((b/a)\rho^{*-1}(\{\alpha\}))$$

et on a alors :

$$\exists a\{\alpha\} = \rho^*(\exists a\rho^{*-1}(\{\alpha\}))$$

de telle sorte que ρ^* est un homomorphisme quantifié.

Il est par ailleurs possible de définir ces substitutions et ces quantificateurs de façon un peu différente :

Soit $\{\alpha\} = \rho^*(\varphi(\alpha)) = \rho(\alpha)$, où $\alpha \in E$, une grille de $\{E\}$: $\{\alpha\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}$; soient deux individus quelconques a et b, posons provisoirement :

$$\{\beta\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0(b/a)\alpha \end{matrix} \right\} = \rho((b/a)\alpha) = \rho^*(\varphi((b/a)\alpha))$$

$(b/a)\varphi(\alpha) = \varphi((b/a)\alpha)$ donc : $\{\beta\} = \rho^*((b/a)\varphi(\alpha)) = (b/a)\{\alpha\}$

En outre les substitutions étant des endomorphismes, il en résulte que chaque substitution d'individu (b/a) sur $\{E\}$, s'effectue tout simplement en remplaçant dans une écriture quelconque (et non plus seulement la forme "première" considérée) d'une grille donnée, tous les énoncés par leurs images par (b/a).

De même, en ce qui concerne les quantificateurs : soient la grille $\{\alpha\} = \left\{\begin{matrix}1\\0\alpha\end{matrix}\right\}$ et un individu a, soit $\{\beta\} = \left\{\begin{matrix}1\\0\exists a\alpha\end{matrix}\right\} = \rho(\exists a\alpha) = \rho^*(\varphi(\exists a\alpha)) = \rho^*(\exists a\varphi(\alpha))$ d'où : $\exists a\left\{\begin{matrix}1\\0\alpha\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\0\exists a\alpha\end{matrix}\right\}$; mais bien entendu, ce résultat n'est ici valable que pour la forme "première" de la grille.

Ainsi, nous avons constaté que la construction de l'anneau des t.r.i. est la même que pour le calcul propositionnel, mais il y a cependant la différence essentielle suivante : les 10 opérations de réduction ne suffisent pas, en général, pour éliminer tout symbole logique dans l'écriture d'une grille de $\{E\}$, c'est à dire ne permettent pas de passer de $\{E\}$ à $\langle A\rangle$.

Toutefois, si l'on est moins exigeant que pour le calcul propositionnel, et si l'on désire simplement résoudre le problème suivant : "Etant donné un énoncé α, est-ce-que $\alpha \in T$ ou $\alpha \notin T$?" sans chercher à faire l'analyse des valeurs de vérité, nous allons voir qu'il est possible de définir d'autres opérations à l'intérieur des grilles, traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques.

Opérations de décision

Considérons une occurence de $\forall x[\Phi^x]$ dans un bloc inférieur d'une grille $\{\alpha\}$:

$$\{\alpha\} = \left\{\left|\begin{matrix}?\\?\forall x[\Phi^x]?\end{matrix}\right|\right\}$$

on peut décomposer cette grille sous la forme :

$$\{\alpha\} = \{\beta\}\cdot[\{\gamma\} \vee \rho(\forall x[\Phi^x])]$$

on peut toujours considérer la grille $-\{\gamma\}$ comme étant le t.r.i. d'un certain énoncé γ' : soit $\{\gamma\} = -\rho(\gamma')$
alors :

$$\{\alpha\} = \{\beta\}\cdot[\rho(\gamma') \to \rho(\forall x[\Phi^x])]$$

Désignons par $\{\alpha\}^a$, où a est un individu quelconque pour l'instant, la grille déduite de $\{\alpha\}$ en y remplaçant $\forall x[\Phi^x]$ dans la seule occurence considérée par

$(a/x)\Phi^x$:

$$\{\alpha\}^a = \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?(a/x)\Phi^x? \end{matrix}\right|\right\} \begin{aligned} &= \{\beta\}\cdot[\{\gamma\}\vee\rho((a/x)\Phi^x)] \\ &= \{\beta\}\cdot[\rho(\gamma')\rightarrow\rho((a/x)\Phi^x)] \end{aligned}$$

Supposons que $\{\alpha\}^a = \{1\}$, ce qui équivaut à : $\{\beta\} = \{1\}$ et $\rho(\gamma')\rightarrow\rho((a/x)\Phi^x) = \{1\}$ donc $\gamma'\rightarrow(a/x)\Phi^x \in T$

Ajoutons l'hypothèse que Φ^x et γ' sont indépendants de a, il en résulte alors :

$$\gamma' \rightarrow \forall x[\Phi^x] \in T$$

et par suite : $\{\alpha\} = \{1\}$

Réciproquement, si $\{\alpha\} = \{1\}$: $\{\beta\} = \{1\}$ et $\rho(\gamma')\rightarrow\rho(\forall x[\Phi^x]) = \{1\}$ d'où : $\rho(\gamma') \leq \rho(\forall x[\Phi^x])$
a fortiori :

$$\rho(\gamma') \leq \rho((a/x)\Phi^x)$$

pour tout individu a donc $\rho(\gamma')\rightarrow\rho((a/x)\Phi^x) = \{1\}$, d'où $\{\alpha\}^a = \{1\}$, pour tout individu a.

On pourrait même pour cette réciproque énoncer un résultat plus précis : la $n°$-cloture de $\{\alpha\}$ implique la $n°$-cloture de $\{\alpha\}^a$, pour toute prénormalisation $n°$ et tout individu a.

On aura un résultat tout à fait analogue, en considérant une occurence "supérieure" de $\exists x[\Phi^x]$, puisque :

$$\left\{\left|\begin{matrix} ?\exists x[\Phi^x]? \\ ? \end{matrix}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\forall x[-\Phi^x]? \end{matrix}\right|\right\}$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 1 : *Soient les deux couples de grilles :*

$$\left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\forall x[\Phi^x]? \end{matrix}\right|\right\} \text{ et } \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?(a/x)\Phi^x? \end{matrix}\right|\right\}$$

$$\left\{\left|\begin{matrix} ?\exists x[\Phi^x]? \\ ? \end{matrix}\right|\right\} \text{ et } \left\{\left|\begin{matrix} ?(a/x)\Phi^x? \\ ? \end{matrix}\right|\right\}$$

où a est un individu n'apparaissant pas dans la colonne considérée de la première grille de ces couples. Pour chacun de ces couples si l'une des grilles est égale à $\{1\}$, alors l'autre aussi. Nous dirons, pour chacun de ces couples, que l'on passe de la première à la seconde grille par une opération de décision.

Ainsi, dans le cas du problème restreint qui nous préoccupe, ces deux opérations de décision ont bien pour effet de diminuer le nombre de symboles logi ques, et constituent une étape de plus pour arriver à l'écriture des grilles uniquement à l'aide d'atomes (car alors $\{\alpha\}=\{1\}$ s'exprimera tout simplement par la cloture habituelle). Notons que le choix de l'individu a est absolument arbitraire (sous le seule condition imposée) et ne change rien au résultat final.

Opérations de semi-réduction

Ces opérations concernent les occurences "supérieures" de $\forall x[\phi^x]$, ou "inférieures" de $\exists x[\phi^x]$.

Raisonnons sur une grille de la forme:

$$\{\alpha\}=\left\{\left|\begin{matrix}?\forall x[\phi^x]?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}$$

a) si l'ensemble (nécessairement fini) des individus apparaissant dans la colonne considérée n'est pas vide, soit $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cet ensemble, on peut écrire:

$$(1)\qquad \left\{\left|\begin{matrix}?\forall x\phi^x?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}=\left\{\left|\begin{matrix}?\forall x[\phi^x],\ (a_1/x)\phi^x,\ \ldots,\ (a_n/x)\phi^x?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}$$

puisques la seconde de ces grilles est égale à:

$$\left\{\left|\begin{matrix}?\forall x[\phi^x]\wedge(a_1/x)\phi^x\wedge\ \cdots\ \wedge(a_n/x)\phi^x?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}$$

et que:

$$\forall x[\phi^x]\leftrightarrow\forall x[\phi^x]\wedge(a_1/x)\phi^x\wedge\ \cdots\ \wedge(a_n/x)\phi^x\in T$$

b) si dans la colonne considérée ne figure aucun individu, nous écrirons (justification analogue):

$$(2)\qquad \left\{\left|\begin{matrix}?\forall x[\phi^x]?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}=\left\{\left|\begin{matrix}?\forall x[\phi^x],\ (a/x)\phi^x?\\ ?\end{matrix}\right|\right\}$$

où a est un individu arbitraire.

De même en ce qui concerne une grille:

$$\{\alpha\}=\left\{\left|\begin{matrix}?\\ ?\exists x[\phi^x]?\end{matrix}\right|\right\}$$

a) si l'ensemble, soit $\{a_1, \ldots, a_n\}$, des individus apparaissant dans la colonne considérée n'est pas vide, nous écrirons :

$$(3) \qquad \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\,\exists x[\Phi^x]? \end{matrix}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\,\exists x[\Phi^x], (a_1/x)\Phi^x, \ldots, (a_n/x)\Phi^x ? \end{matrix}\right|\right\}$$

b) sinon :

$$(4) \qquad \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\,\exists x[\Phi^x]? \end{matrix}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{matrix} ? \\ ?\,\exists x[\Phi^x], (a/x)\Phi^x ? \end{matrix}\right|\right\}$$

où a est un individu arbitraire.

Pour chacune des égalités (1), (2), (3), (4), nous dirons que l'on passe de la première à la seconde grille par une *opération de semi-réduction*.

Définitions :

Opérations sémantiques : toute opération de réduction, de décision et de semi-réduction.

Grille semi-réduite : une grille $\{\alpha\}$ sera dite semi-réduite (dans une certaine écriture) s'il n'est plus possible de lui appliquer d'opération sémantique sinon en faisant apparaître dans un bloc un énoncé qui s'y trouve déjà.

Remarque : toute griller réduite (c'est à dire pouvant s'écrire uniquement à l'aide d'atomes) est semi-réduite.

Grille naturellement close : une grille $\{\alpha\}$ sera dite naturellement close (dans une certaine écriture) si dans chacune de ses colonnes un même énoncé apparait simultanément dans le bloc inférieur et le bloc supérieur.

Remarque : toute grille naturellement close est égale à $\{1\}$.

Il est important de noter les différences entre les trois types d'opérations sémantiques :

—Les opérations de réduction ne changent pas les valeurs des grilles et diminuent systématiquement le nombre de symboles logiques.

—Les opérations de décision diminuent le nombre de symboles logiques mais en général changent la valeur d'une grille, elles conservent seulement les qualités "être égale à $\{1\}$" et "être différente de $\{1\}$".

—Les opérations de semi-réduction ne changent pas la valeur d'une grille, par contre elles ne diminuent pas le nombre de symboles logiques, mais font apparaître des énoncés auxquels on peut éventuellement appliquer d'autres opérations sémantiques, et qui ne comportant pas d'individus étrangers peuvent concourir à la cloture naturelle de la grille.

Enoncé clôturable: tout énoncé α pour lequel il existe un nombre fini d'opérations sémantiques transformant:

$$\rho(\alpha) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}$$

en une grille naturellement close.

L'ensemble des opérations sémantiques traduisant exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques, il en résultera notamment le théorème fondamental suivant (cf. E. W. BETH):

$$\text{“}\alpha \in T\text{”} \Longleftrightarrow \text{“}\alpha \text{ est cloturable”}.$$

Index: Definitions axiomes

Ensemble prébooléien

$$F(T, R) \qquad (x, y, z, \dots)$$

Structure définie par:

$$\left.\begin{array}{l} \text{—multiplication: } x \cdot y \\ \text{—négation: } -x \\ \text{—famille } (C_k) \text{ de parties de } F \end{array}\right\} \text{axiomes: } \begin{array}{l} \text{P 1/ } x \in C_k \Longleftrightarrow -x \notin C_k \\ \\ \text{P 2/ } x \cdot y \in C_k \Longleftrightarrow x \in C_k \text{ et } y \in C_k \end{array}$$

C_k: ***ensemble déductif.*** $T \cap C_k$: ***puits*** de F.

Relation d'analogie R: $(x \in C_k$ et $y \in C_k)$ ou $(x \notin C_k$ et $y \notin C_k)$

F/R: anneau booléien quotient, φ application canonique de F dans F/R.

Structure prébooléienne normale pour un anneau booléien: (C_k) est l'ensemble de tous les ultrafiltres.

Préhomomorphisme de $F(T, R)$ dans $F'(T', R')$: application f telle que:
PH 1/ $f(x \cdot y)$ et $f(-x)$ sont analogues à $f(x) \cdot f(y)$ et $-f(x)$.
PH 2/ $f(T) \subset T'$

Préhomomorphisme strict si:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Ensemble individualise

$A(u, v, w, \ldots)$ sur $I(a, b, c, \ldots)$ infini. Structure définie par la donnée d'une application :

$$(a, b) \longrightarrow (u \longrightarrow (a/b)u) \qquad \text{de } I^2 \text{ dans } A^A.$$

(a/b) : *substitution* de a à b

u *indépendant* de a si : $(b/a)u = u$ pour tout b

base de u : ensemble I_u des individus dont dépend u.

$i(a)$: ensemble des u indépendants de a.

Axiomes :

I 1/ $(a/a)u = u$

I 2/ si $b \neq a$: $(b/a)u$ est indépendant de a

I 3/ si u est indépendant de a : $(c/a)(a/b)u = (c/b)u$

I 4/ I_u est une partie finie de I.

Application individualisante si :

$$f((a/b)u) = (a/b)f(u)$$

Anneau booléien individualisé : $B(r, s, t, \ldots)$ si les substitutions sont des endomorphismes.

Notations pour $J \subset I$:

$i(J)$: ensemble des r tels que $I_r \cap J = \emptyset$

B_J : ensemble des r tels que $I_r \subset J$

Ensemble prébooléien individualisé : $E(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ si les substitutions sont des préhomomorphismes.

Anneau booléien quantifié

$B(r, s, t, \ldots)$ anneau booléien individualisé sur I, il est *semi-quantifié* si :

BQ 1/ $\operatorname{Sup}_{b \in I} (b/a)r = \exists ar$ existe quels que soient a et r. il est *quantifié* si en outre :

BQ 2/ $(c/b)\exists ar \leq \exists a(c/b)r$ lorsque a, b, c sont différents et r dépend de a, b, c.

Homomorphisme quantifié : homomorphisme individualisant f tel que :

$$f(\exists ar) \leq \exists af(r)$$

Normalisation de B : homomorphisme N de B dans $Z/(2)$ tel que :

$$N(\exists ar) \leq \operatorname*{Sup.}_{b \in I} N((b/a)r)$$

Ultrafiltre validant de B: ultrafiltre $\mathscr{V}$ tel que:

$$\exists ar \in \mathscr{V} \Longrightarrow \text{il existe } b \text{ tel que } (b/a)r \in \mathscr{V}$$

Anneau booléien quantifié validé: s'il y a des ultrafiltres validants et si leur intersection se réduit à $\{1\}$.

Ensemble prebooleien quantifie

$E(\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Ensembles déductifs $V_k)$ ensemble prébooléien individualisé, il est *semi-quantifié* s'il est muni d'une loi $(a, \alpha) \longrightarrow \exists a\alpha$ telle que:

PQ 1/ $\exists a\alpha \in V_k \Longleftrightarrow$ il existe $b \in I$ tel que $(b/a)\alpha \in V_k$

il est *quantifié* si en outre:

PQ 2/ $(c/b)\exists a\alpha \in V_k \Longrightarrow \exists a(c/b)\alpha \in V_k$ lorsque a, b, c sont différents et α dépend de a, b, c.

Préhomomorphisme quantifié: préhomomorphisme individualisant f tel que: $f(\exists a\alpha)$ est analogue à $\exists af(\alpha)$

il sera *strict* si c'est un préhomomorphisme strict tel que:

$$f(\exists a\alpha) = \exists af(\alpha)$$

Prénormalisation de E: préhomomorphisme n de E dans $Z/(2)$ tel que:

$$n(\exists a\alpha) \leq \operatorname*{Sup.}_{b \in I} n((b/a)\alpha)$$

Structure prébooléienne quantifiée normale pour un anneau booléien quantifié validé, si:

(V_k) est l'ensemble de tous les ultrafiltres validants.

Université de Clermont-Ferrand