ESPACES FIBRÉS ASSOCIÉS ET PRÉ-ASSOCIÉS

J. L. KOSZUL

Introduction. Dans la première partie de cet article, on généralise une construction donnée dans [2], conduisant à l'homologie des espaces classifiants de groupe Γ. Cette construction utilise au départ un espace fibré principal Y de groupe Γ, le cas traité dans [2] étant celui où $Y=\Gamma$. Elle permet de définir dans le module de cohomologie de la base X de Y une filtration par une suite de sous-modules dont l'intersection est le module des classes caractéristiques. Dans la seconde partie, la filtration précédente est étendue à $H^1(X, \mathbf{G})$ où $\mathbf{G}$ est le faisceau des germes d'applications continues de X dans un groupe topologique G. On obtient ainsi dans $H^1(X, \mathbf{G})$ des sous-ensembles $Q_2 \subset Q_1 \subset H^1(X, \mathbf{G})$. Cette classification s'étend au cas holomorphe. Les espaces fibrés principaux de base X de groupe G correspondant à Q_2 sont les espaces fibrés de groupe G associés à Y. Les espaces fibrés correspondant à Q_1 sont appelés des espaces fibrés *pré-associés* à Y. Ce sont encore des espaces fibrés trivialisés par la projection de Y sur X. Pour cette raison, ils peuvent être définis par un facteur $k: Y\times\Gamma \to G$. Pour qu'un facteur k corresponde à un espace fibré P pré-associé à Y, il faut et il suffit qu'il existe une application continue $g: Y^2 \to G$ telle que

$$g(y, y')k(y', s) = k(y, s)g(ys, y's)$$

quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$. Le choix d'une application g vérifiant cette condition présente de grandes analogies avec le choix d'une connexion dans l'espace P. En fait, dans le cas différentiable, et pour un groupe Γ discret, on montre que g *détermine* une connexion dans P.

I

1. Complexes topologiques. Soit T la catégorie préadditive dont les objets sont les espaces topologiques, le groupe Hom (X, Y) des homomorphismes d'un

Received March 6, 1959.

espace X dans un espace Y étant le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des applications continues de X dans Y. La composition des homomorphismes est définie, par linéarité, à partir de la composition des applications. On passe de la manière habituelle de la catégorie T à la catégorie $T(1)$ des complexes de T ou ***complexes topologiques.*** Un complexe topologique X_* est donc défini par une famille (X_p) (p entier) d'espaces topologiques et par la donnée, pour tout entier p, d'un homomorphisme $d_p \in \mathrm{Hom}(X_p, X_{p-1})$ tel que $d_{p-1}d_p = 0$ pour tout p. Etant donnés deux complexes topologiques X_* et Y_*, un ***homomorphisme*** h_* de X_* dans Y_* est une famille d'homomorphisme $h_p \in \mathrm{Hom}(X_p, Y_p)$ vérifiant la condition $d_p h_p = h_{p-1} d_p$ pour tout p. Deux homomorphismes h_* et h'_* de X_* dans Y_* sont ***homologues*** si il existe une famille d'homomorphismes $k_p \in \mathrm{Hom}(X_p, Y_{p+1})$ tels que $d_{p+1}k_p + k_{p-1}d_p = h_p - h'_p$ quel que soit p.

Pour tout espace topologique X, on notera $R(X)$ le complexe topologique défini par

$$R_p(X) = X^{p+1} \quad \text{pour } p \geq 0, \qquad R_p(X) = \phi \quad \text{pour } p < 0$$
$$d_p = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i d_{p,i} \quad \text{pour } p > 0, \qquad d_p = 0 \quad \text{pour } p \leq 0$$

où $d_{p,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ est l'application $(x_0, x_1, \ldots, x_p) \to (x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$ de $R_p(X)$ dans $R_{p-1}(X)$. Toute application continue d'un espace X dans un espace Y définit de manière évidente un homomorphisme de $R(X)$ dans $R(Y)$.

Homologie singulière des complexes topologiques. Pour tout entier p, on désigne par σ^p le simplexe euclidien type de dimension p et par d^p l'homomorphisme de σ^p dans σ^{p+1} somme alternée des applications canoniques de σ^p sur les faces de σ^{p+1}. Etant donné un complexe topologique X_*, on appelle module des ***chaînes singulières*** de type (p, q) (à coefficients entiers) de X_*, le Z-module $S_p(X_q) = \mathrm{Hom}(\sigma^p, X_q)$. On appelle complexe des chaînes singulières de X_* le complexe double $S_*(X_*)$ somme directe de la famille des $S_p(X_q)$ avec les opérateurs bord ∂' et ∂'' définis par

$$\partial' c = (-1)^{p+q+1} c d^{p-1}$$
$$\partial'' c = d_q c$$

pour tout $c \in S_p(X_q)$. L'opérateur bord total sera noté $\partial = \partial' + \partial''$.

Pour tout anneau commutatif A, le complexe $S_*(X_*) \underset{Z}{\otimes} A$ est appelé le complexe des chaines singulières de X_* à coefficients dans A et se note $S_*(X_*, A)$. Le complexe $\mathrm{Hom}_Z(S_*(X_*), A)$ est appelé le complexe des cochaînes singulières de X_* à coefficients dans A et se note $S^*(X_*, A)$. On définit les modules d'homologie (resp. de cohomologie) de X_* à coefficients dans A en posant $H_p(X_*, A) = H_p(S_*(X_*, A))$ (resp. $H^p(X_*, A) = H^p(S^*(X_*, A))$). Si h_* est un homomorphisme du complexe topologique X_* dans le complexe topologique Y_*, h_* définit un homomorphisme du complexe $S_*(X_*)$ dans $S_*(Y_*)$ et par conséquent des homomorphismes $h_p : H_p(X_*, A) \to H_p(Y_*, A)$ et $h^p : H^p(Y_*, A) \to H^p(X_*, A)$ pour tout entier p. Deux homomorphismes homologues définissent les mêmes homomorphismes pour les modules d'homologie et de cohomologie.

2. Complexes $R(X)/G$. Soient G un groupe topologique et X un espace où le groupe G opère de manière continue à droite. On fait opérer G à droite dans chaque espace $R_p(X) = X^{p+1}$ en posant $(x_0, x_1, \ldots, x_p)s = (x_0 s, x_1 s, \ldots, x_p s)$ pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in X^{p+1}$ et tout $s \in G$. Chaque application $d_{p,i} : X^{p+1} \to X^p$ commute avec les opérations de G et définit, par passage aux quotients une application continue $\mathbf{d}_{p,i} : X^{p+1}/G \to X^p/G$. On définit un complexe topologique $R(X)/G$ en prenant pour espace d'indice p l'espace $R_p(X)/G = X^{p+1}/G$ et pour opérateur $\mathbf{d}_p : X^{p+1}/G \to X^p/G$ l'homomorphisme $\sum_{i=0}^{i=p}(-1)^i\mathbf{d}_{p,i}$. Les projections canoniques $q_p : X^{p+1} \to X^{p+1}/G$ constituent un homomorphisme canonique q_* du complexe $R(X)$ sur le complexe $R(X)/G$.

Soient X et Y deux espaces où le groupe G opère continuement à droite et soit f une application continue de X dans Y qui commute avec les opérations de G. Soit f_* l'homomorphisme de $R(X)$ dans $R(Y)$ défini par f. Chaque application $f_p : X^{p+1} \to Y^{p+1}$ commute avec les opérations de G et définit par passage aux quotients une application continue $\mathbf{f}_p : X^{p+1}/G \to Y^{p+1}/G$. Les applications $\mathbf{f}_p$ constituent un homomorphisme $\mathbf{f}_*$ du complexe $R(X)/G$ dans le complexe $R(Y)/G$.

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux espaces topologiques où le groupe G opère continuement à droite et soient f et g deux applications continues de X dans Y commutant avec les opérations de G. Les homomorphismes $\mathbf{f}_*$ et $\mathbf{g}_*$ de $R(X)/G$ dans $R(Y)/G$ sont homologues.*

En effet, pour tout entier $p \geq 0$, soit k_p l'homomorphisme de X^{p+1} dans Y^{p+2} défini par $k_p = \sum_{i=0}^{i=p} k_{p,i}$ où $k_{p,i}$ est l'application continue définie par

$$k_{p,i}(x_0, x_1, \ldots, x_p) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_i), g(x_i), \ldots, g(x_p));$$

un calcul direct montre que $g_p - f_p = d_{p+1}k_p + k_{p-1}d_p$. Comme chaque application $k_{p,i}$ commute avec les opérations de G dans X^{p+1} et Y^{p+2}, l'homomorphisme k_p définit un homomorphisme $\mathbf{k}_p : X^{p+1}/G \to Y^{p+2}/G$ et $\mathbf{g}_p - \mathbf{f}_p = \mathbf{d}_{p+1}\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_{p-1}\mathbf{d}_p$, ce qui démontre le théorème.

Appliquant ce qui précède au cas où G est réduit à son élément neutre, on voit que si I est un espace réduit à un point, alors pour tout espace topologique X, l'application de X sur I définit un isomorphisme canonique de $H_p(R(X), A)$ sur $H_p(R(I), A)$ pour tout entier p. Comme d'autre part, $H_p(R(I), A)$ est visiblement canoniquement isomorphe à $H_p(I, A)$, on voit que pour tout espace topologique X, $H_p(R(X), A) = (0)$ pour $p \neq 0$ et $H_0(R(X), A)$ est canoniquement isomorphe à A.[1)]

Théorème 2. *Soit X un espace fibré principal de groupe G. Les applications continues de G dans X qui commutent avec les opérations de G (c'est à dire de la forme $s \to as$ avec $a \in X$) définissent un isomorphisme canonique de $H_*(R(G)/G, A)$ sur $H_*(R(X)/G, A)$ et un isomorphisme canonique de $H_*(R(X)/G)$ sur $H_*(R(G)/G, A)$.*

On se bornera à indiquer le principe de la démonstration qui utilise un "complexe topologique double" D formé avec les espaces $(G^p \times X^q)/G$. On définit des homomorphismes de D dans $R(G)/G$ et dans $R(X)/G$. On montre que ces homomorphismes donnent des isomorphismes pour les modules d'homologie. On vérifie enfin que l'isomorphisme $H_*(R(G)/G, A) \to H_*(R(X)/G, A)$ ainsi obtenu est l'homomorphisme défini par les applications $G \to X$ de la forme $s \to as$.

On observera que, si X est un espace fibré principal de groupe G, alors chaque espace $R_p(X)$ du complexe topologique $R(X)$ est un espace fibré principal de groupe G. D'autre part $R(X)$ est acyclique d'après ce qu'on a vu plus haut.

Théorème 3. *Si X est un espace fibré principal de groupe G et C un espace fibré classifiant de groupe G ([4]), alors $H_*(R(X)/G, A)$ est canoniquement isomorphe à $H_*(C, A)$ et $H^*(R(X)/G, A)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(C, A)$.*

---

1) C'est aussi un cas particulier du Théorème 1 de [2].

Le Théorème est démontré dans [2] pour le cas $X=G$. Le cas général en résulte d'après le Théorème 2.

Soit $X\times R(G)$ le complexe topologique dont l'espace d'indice n est $X\times R_n(G)$ et où $d_n=(l_X, d_n)$, l_X désignant l'application identique de X sur X. Les projections $b_n : X\times R_n(G)\to R_n(G)$ définissent un homomorphisme b_* de $X\times R(G)$ dans $R(G)$. On définit d'autre part un homomorphisme f_* de $X\times R(G)$ dans X (considéré comme complexe topologique) en posant $f_n=0$ pour $n\neq 0$ et $f_0(x, s)=x$ pour tout $x\in X$ et $s\in G=R_0(G)$. On a un homomorphisme c_* de X dans $R(X)$ défini par $c_0=l_X$ et $c_n=0$ pour $n\neq 0$. Enfin, pour tout $a\in X$, on désigne par a_* l'homomorphisme de $R(G)$ dans $R(X)$ défini par l'application $s\to as$ de G dans X. Le diagramme

$$\text{(D)}\qquad \begin{array}{ccc} X\times R(G) & \xrightarrow{b_*} & R(G) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle a_*} \\ X & \xrightarrow{c_*} & R(X) \end{array}$$

n'est pas commutatif. Cependant les homomorphismes a_*b_* et c_*f_* sont *homologues*. Pour tout entier $n\geq 0$, soit k_n l'application de $X\times G^{n+1}$ dans X^{n+2} définie par

$$k_n(x, s_0, s_1, \dots, s_n)=(x, as_0, as_1, \dots, as_n).$$

Pour tout n, on a $\mathrm{d}_{n+1}k_n+k_{n-1}d_n=a_nf_n-c_nb_n$. Les homomorphismes du diagramme (D) étant des combinaisons linéaires d'applications qui commutent avec les opérations de G, on déduit de (D) le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (X\times R(G))G & \xrightarrow{\mathbf{b}_*} & R(G)/G \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{f}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{a}^*} \\ X/G & \xrightarrow{\mathbf{c}_*} & R(X)/G \end{array}$$

Comme les applications k_n commutent avec les opérations de G, on voit que les homomorphismes $\mathbf{a}_*\mathbf{f}_*$ et $\mathbf{c}_*\mathbf{b}_*$ sont homologues. On a donc finalement, en cohomologie, un diagramme commutatif:

$$\text{(D}'\text{)}\qquad \begin{array}{ccc} H^*((X\times R(G))/G, A) & \xleftarrow{\mathbf{b}_*} & H^*(R(G)/G, A) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathbf{f}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{a}^*} \\ H^*(X/G, A) & \xleftarrow{\mathbf{c}^*} & H^*(R(X)/G, A) \end{array}$$

Il est démontré dans [2] que $\mathbf{f}^*$ est bijectif et que $\mathbf{f}^{*-1}\mathbf{b}^*$ est l'homomorphisme caractéristique de l'espace fibré principal X. Compte tenu du Théorème 2, la commutativité du diagramme (D′) prouve le résultat suivant.

THÉORÈME 4. *L'homomorphisme caractéristique de l'espace fibré principal X est composé de l'isomorphisme* $\mathbf{a}^{*-1} : H^*(R(G)/G, A) \to H^*(R(X)/G, A)$ *et de l'homomorphisme canonique* $\mathbf{c}^* : H^*(R(X)/G, A) \to H^*(X/G, A)$.

Soit X un espace fibré principal de groupe G. Pour tout entier n, soit K^n_* le complexe topologique

$$X/G \leftarrow X^2/G \leftarrow \cdots X^{n+1}/G \leftarrow \emptyset \cdots$$

qui s'obtient en tronquant le complexe $R(X)/G$. Il existe pour tout n un homomorphisme canonique de X/G dans K^n_* défini par l'application identique de X/G sur K^n_0. Cet homomorphisme définit pour tout p un homomorphisme canonique de $H^p(K^n_*, A)$ dans $H^p(X/G, A)$ dont l'image sera notée Q^p_n. On obtient ainsi dans $H^p(X/G, A)$ une filtration :

$$H^p(X/G, A) = Q^p_0 \supset Q^p_1 \subset \cdots Q^p_{p+1} = Q^p_{p+2} = \cdots = Q^p_\infty$$

où Q^p_∞ est le sous-module des classes caractéristiques de degré p. Pour tout $p > 0$, le sous-module Q^p_1 est dans le noyau de l'homomorphisme de $H^*(X/G, A)$ dans $H^*(X, A)$ défini par la projection. En effet, l'image par cet homomorphisme d'une classe appartenant à Q^p_1 est une classe de cohomologie de X à laquelle les projections $d_{1,0}$ et $d_{1,1}$ de X^2 sur X font correspondre une même classe de cohomologie de X^2.

II

3. Espaces fibrés associés et pré-associés. Soit Y un espace fibré principal de groupe Γ et de base $X = Y/\Gamma$. Pour tout entier n on désigne par q_n l'application de Y^{n+1} sur Y^{n+1}/Γ. Soit d'autre part G un groupe topologique. Dans l'ensemble $H^1(X, G)$ des classes d'espaces fibrés principaux de base X et de groupe G, on va définir une filtration

$$H^1(X, \mathbf{G}) = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2$$

analogue à celle qui a été définie plus haut pour la cohomologie singulière à coefficients constants.

Les applications $\mathbf{d}_{1,i} : Y^2/\Gamma \to Y/\Gamma$ et $\mathbf{d}_{2,j} : Y^3/\Gamma \to Y^2/\Gamma$ ($i = 0, 1,\ j = 0, 1, 2$) vérifient les relations

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_{1,0}\mathbf{d}_{2,0} = \mathbf{d}_{1,0}\mathbf{d}_{2,1} \\ (1) \qquad &\mathbf{d}_{1,0}\mathbf{d}_{2,2} = \mathbf{d}_{1,1}\mathbf{d}_{2,0} \\ &\mathbf{d}_{1,1}\mathbf{d}_{2,1} = \mathbf{d}_{1,1}\mathbf{d}_{2,2}. \end{aligned}$$

Pour tout espace fibré principal de base $X = Y/\Gamma$ et de groupe G, ces applications définissent des fibrés principaux images réciproques de base Y^2/Γ:

$$P_0 = P\mathbf{d}_{1,0}, \qquad P_1 = P\mathbf{d}_{1,1}.$$

L'espace fibré P sera appelé un espace fibré *pré-associé* à Y lorsque P_0 et P_1 sont isomorphes. Le sous-ensemble Q_1 de $H^1(X, G)$ sera l'ensemble des classes de fibrés pré-associés à Y.

Lemme 1. *Pour qu'un espace fibré principal P de base X soit pré-associé à Y, il faut qu'il soit trivialisé par la projection $q_0 : Y \to X$.*

En effet, si P est préassocié à Y, $Pq_0d_{1,0}$ et $Pq_0d_{1,1}$ sont deux espaces fibrés isomorphes de base Y^2. Soit b un point de Y et soit f l'application continue de Y dans Y^2 définie par $f(y) = (b, y)$. L'espace fibré $Pq_0 = Pq_0d_{1,0}f$ est isomorphe à l'espace fibré $Pq_0d_{1,1}f$ qui est trivial puisque l'application $d_{1,1}f$ est constante.

Considérons maintenant les espaces fibrés images réciproques de P_1 et P_0 par les applications $\mathbf{d}_{2,j} : Y^3/\Gamma \to Y^2/\Gamma$:

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= P_0\mathbf{d}_{2,0}, \qquad P_{0,1} = P_0\mathbf{d}_{2,1}, \qquad P_{0,2} = P_0\mathbf{d}_{2,2} \\ P_{1,0} &= P_1\mathbf{d}_{2,0}, \qquad P_{1,1} = P_1\mathbf{d}_{2,1}, \qquad P_{1,2} = P_1\mathbf{d}_{2,2}. \end{aligned}$$

Les relations (1) montrent qu'il existe des isomorphismes canoniques

$$P_{0,1} \xrightarrow{\lambda_1} P_{0,0}, \qquad P_{1,0} \xrightarrow{\lambda_2} P_{0,2}, \qquad P_{1,1} \xrightarrow{\lambda_3} P_{1,2}.$$

Supposons que P soit pré-associé à Y. Tout isomorphisme h de P_0 sur P_1 définit un isomorphisme h_j de $P_{0,j}$ sur $P_{1,j}$ ($j = 0, 1, 2$). Ainsi h définit un diagramme:

(H)
$$\begin{tikzcd} P_{0,1} \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & P_{0,0} \arrow[r, "h_0"] & P_{1,0} \arrow[r, "\lambda_2"] & P_{0,2} \arrow[dll, "h_2"] \\ & P_{1,1} \arrow[r, "\lambda_3"] & P_{1,2} & \end{tikzcd}$$

On dira que l'espace fibré P est *associé* à Y lorsque l'isomorphisme h peut être choisi de telle sorte que ce diagramme soit commutatif. L'ensemble $Q_2 \subset H^1(X, \mathbf{G})$

sera l'ensemble des classes de fibrés associés à Y. Cette terminologie se trouvera justifiée dans le paragraphe suivant.

4. Facteurs des espaces fibrés associés et pré-associés. Les notations restant celles du paragraphe précédent, soit $F(Y, G)$ l'ensemble des facteurs sur Y à valeurs dans G, c'est à dire l'ensemble des applications continues k de $Y \times \Gamma$ dans G telles que

$$k(y, s)k(ys, t) = k(y, st)$$

quels que soient $y \in Y$, $s, t \in \Gamma$. Tout facteur k définit un espace fibré principal de base X et de groupe G: c'est le quotient de $Y \times G$ par Γ, les opérations de Γ dans $Y \times G$ étant définies par $(y, a)s = (ys, ak(y, s))$ quels que soient $y \in Y$, $s \in \Gamma$ et $a \in G$. En associant à tout facteur $k \in F(Y, G)$ la classe $[k]$ de cet espace fibré, on définit une application canonique de $F(Y, G)$ dans $H^1(X, \mathbf{G})$. L'image de cette application est l'ensemble des classes de fibrés trivialisés par la projection $q_0 : Y \to X$, autrement dit c'est le "noyau" de l'application $H^1(X, \mathbf{G}) \to H^1(Y, \mathbf{G})$ définie par q_0. Pour que deux facteurs k et $k' \in F(Y, G)$ aient même image dans $H^1(X, \mathbf{G})$, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents en ce sens qu'il existe une application continue $r : Y \to G$ telle que

$$r(y)k'(y, s) = k(y, s)r(ys)$$

quels que soient $y \in Y$ et $s \in \Gamma$.

THÉORÈME 5. *Soit k un facteur sur Y à valeurs dans G. Pour que les espaces fibrés de classe $[k]$ soient pré-associés à Y, il faut et il suffit qu'il existe une application continue g de Y^2 dans G telle que*

$$\text{(PA)} \qquad g(y, y')k(y', s) = k(y, s)g(ys, y's)$$

quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$.

Soit en effet P un espace fibré de classe $[k]$. Il existe une application continue r de Y dans P compatible avec les projections sur X telle que $r(ys) = r(y)k(y, s)$ pour tout $y \in Y$ et tout $s \in \Gamma$. Soit r_i $(i = 0, 1)$ l'application continue de Y^2 dans l'espace fibré $P_i = P\mathbf{d}_{1,i}$ définie par

$$r_i(y, y') = (q_1(y, y'), rd_{1,i}(y, y')).$$

Les applications r_i sont compatibles avec les projections sur Y^2/Γ et vérifient les relations :

$$r_i(ys, y's) = r_i(y, y')\, k_i(y, y', s)$$

où $k_i(y, y', s) = k(d_{1,i}(y, y'), s)$ quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$. Soit h un isomorphisme de P_0 sur P_1. L'application g de Y^2 dans G définie par

$$h(r_0(y, y')) = r_1(y, y')\, g(y, y')$$

est continue et vérifie la relation

$$g(y, y')\, k_0(y, y', s) = k_1(y, y', s)\, g(ys, y' s)$$

c'est à dire (PA). Réciproquement, on voit facilement que si g est une application continue de Y^2 dans G qui vérifie la condition (PA) alors il existe un isomorphisme $h : P_0 \to P_1$ (et un seul) tel que $h(r_0(y, y')) = r_1(y, y')\, g(y, y')$ quels que soient $y, y' \in Y$.

THÉORÈME 6. *Soit k un facteur sur Y à valeurs dans G. Pour que les espaces fibrés de classe $[k]$ soient associés à Y, il faut et il suffit qu'il existe une application continue $g : Y^2 \to G$ telle que*

$$\text{(PA)} \qquad g(y, y')\, k(y', s) = k(y, s)\, g(ys, y's)$$

$$\text{(A)} \qquad g(y, y')\, g(y', y'') = g(y, y'')$$

quels que soient $y, y', y'' \in Y$ et $s \in \Gamma$.

Soit en effet P un espace fibré de classe $[k]$ et r une application continue de Y dans P telle que $r(ys) = r(y)\, k(y, s)$ pour tout $y \in Y$ et tout $s \in \Gamma$. Posons comme plus haut $r_i(y, y') = (q_1(y, y'), rd_{1,i}(y, y'))$ et $k_i(y, y', s) = k(d_{1,i}(y, y'), s)$ où $i = 0, 1$. Pour $i = 0, 1$ et $j = 0, 1, 2$ on définit une application continue $r_{i,j}$ de Y^3 dans $P_{i,j} = P_i \mathbf{d}_{2,j}$ en posant :

$$r_{i,j}(y, y', y'') = (q_2(y, y', y''), r_i d_{2,j}(y, y', y''))$$

quels que soient y, y', y''. Le diagramme constitué par les applications $r_{i,j}$ et les isomorphismes canoniques $P_{0,1} \xrightarrow{\lambda_1} P_{0,0}$, $P_{1,0} \xrightarrow{\lambda_2} P_{0,2}$, $P_{1,1} \xrightarrow{\lambda_3} P_{1,2}$ est commutatif. Supposons maintenant que P soit préassocié à Y. Soit h un isomorphisme de P_0 sur P_1 et soit h_j l'isomorphisme de $P_{0,j}$ sur $P_{1,j}$ défini par h. Soit g l'application continue de Y^2 dans G définie par la condition $hr_0(y, y') = r_1(y, y')\, g(y, y')$ quels que soient $y, y' \in Y$. On a

$$h_j\, r_{0,i}(y, y', y'') = r_{1,j}(y, y', y'')\, g(d_{2,j}(y, y', y''))$$

et par suite

$$\lambda_3 h_1 r_{0,1}(y, y', y'') = r_{1,2}(y, y', y'')g(y, y'')$$
$$h_2 \lambda_2 h_0 \lambda_1 r_{0,1}(y, y', y'') = r_{1,2}(y, y', y'')g(y, y')g(y', y'')$$

quels que soient y, y', y'' Y. Ceci montre que, pour que le diagramme (H) défini par h soit commutatif, il faut et il suffit que g vérifie, en plus de la condition (PA) la condition (A). Le Théorème en résulte aussitôt.

THÉORÈME 7. *Soit k un facteur sur Y à valeurs dans G. Pour qu'il existe une application continue g de Y^2 dans G vérifiant les conditions (PA) et (A) du Théorème* 6, *il faut et il suffit que k soit équivalent à un homomorphisme continu de Γ dans G.*

En effet, si k est un homomorphisme continu de Γ dans G, l'application constante g de Y^2 sur l'élément neutre de G vérifie les conditions (PA) et (A). D'autre part, si g est une application continue de Y^2 dans G vérifiant ces conditions, alors si $b \in Y$, k est équivalent au facteur k' défini par $k'(y, s) = g(y, b)^{-1}k(y, s)g(ys, b)$. Compte tenu de (A), on a $k'(y, s) = g(b, b)^{-1}$ $g(y, b)^{-1}k(y, s)g(ys, bs)g(bs, b) = g(b, b)^{-1}k(b, s)g(bs, b) = k'(b, s)$, ce qui montre que k' est un homomorphisme de Γ dans G.

Avec les Théorèmes 6 et 7, on voit que les espaces fibrés de groupe G associés à Y se déduisent de Y par le procédé habituel d'extension du groupe de structure et sont donc des espaces fibrés associés à Y au sens ordinaire.

Exemple. Supposons que Y soit le revêtement universel d'un espace topologique X connexe localement compact et dénombrable à l'infini, Γ étant le groupe des automorphismes de Y. Soit $0 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \mathbf{R}^n \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens dans laquelle Δ est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}^n$. Puisque Y est simplement connexe, si k est un facteur sur Y à valeurs dans G, il existe une application continue h de $Y \times \Gamma$ dans R^n telle que $k(y, s) = \rho h(y, s)$ pour tout $y \in Y$ et tout $s \in \Gamma$. On a $h(y, s) + h(ys, t) - h(y, st) \in \Delta$ quels que soient $y \in Y$ et $s, t \in \Gamma$. Par conséquent, $m(y, y', s) = h(y, s) - h(y', s)$ est un facteur sur Y^2 (considéré comme espace fibré principal de groupe Γ) à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Comme tout espace fibré principal de base Y^2/Γ de groupe $\mathbf{R}^n$ est trivial, ce facteur m est équivalent au facteur constant nul. Autrement dit, il existe une application continue $r : Y^2 \to \mathbf{R}^n$ telle que $m(y, y', s) = r(y, y')$

$-r(ys, y's)$ quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$. Posons $g(y, y') = \rho r(y, y')$. On a $g(y, y')k(y', s) = \rho(r(y, y') + h(y', s)) = \rho(r(ys, y's) + h(y, s)) = k(y, s)g(ys, y's)$. Par conséquent *tout espace fibré principal de groupe G qui est trivialisé par $Y \to X$ est pré-associé à Y.*

5. Restriction du groupe de structure pour les espaces fibrés pré-associés. On conserve les notations des paragraphes 3 et 4.

LEMME 2. *Soit k un facteur sur Y à valeurs dans G tel que les espaces fibrés de classe $[k]$ soient pré-associés à Y. Il existe une application continue g de Y^2 dans G qui vérifie, en plus de la condition (PA) la condition*

(N) $$g(y, y) = e \quad \text{(élément neutre de } G\text{)}$$
pour tout $y \in Y$.

En effet, si g' est une application continue de Y^2 dans G vérifiant la condition (PA), alors

$$g'(y, y')g'(y', y')^{-1}k(y', s) = k(y, s)g'(ys, y's)g'(y's, y's)^{-1},$$

donc, en posant $g(y, y') = g'(y, y')g'(y', y')^{-1}$, on obtient une application g qui vérifie les conditions (PA) et (N).

Dans ce qui suit, on suppose que k est un facteur sur Y à valeurs dans G et que g est une application vérifiant les conditions (PA) et (N). Pour tout $b \in Y$, on notera $G(b)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme

$$g(b, y)g(y, y')g(b, y')^{-1}$$

où $y, y' \in Y$. Quels que soient $b, b' \in Y$, on a $G(b) = g(b, b')G(b')g(b, b')^{-1}$. D'autre part, pour tout $s \in \Gamma$, $k(b, s)g(b, bs)^{-1}$ est dans le normalisateur de $G(b)$ dans G. On désigne par $H(b)$ le sous-groupe de G engendré par $G(b)$ et les éléments de la forme $k(b, s)g(b, bs)^{-1}$ avec $s \in \Gamma$. On a $H(b) = g(b, b')H(b')g(b, b')^{-1}$ quels que soient $b, b' \in Y$. L'application $s \to k(b, s)g(b, bs)^{-1}$ composée avec l'homomorphisme canonique de $H(b)$ sur $H(b)/G(b)$ donne un homomorphisme surjectif de Γ sur $H(b)/G(b)$.

THÉORÈME 8. *Le groupe de structure des espaces fibrés préassociés à Y de classe $[k]$ peut être restreint au sous-groupe $H(b)$ de G et l'espace fibré de groupe $H(b)$ obtenu est encore trivialisé par l'application $Y \to X$.*

En effet, le facteur k est équivalent au facteur k' défini par $k'(y, s) = g(b, s)k(y, s)g(b, ys)^{-1} = k(b, s)g(bs, ys)g(b, ys)^{-1} = k(b, s)g(b, bs)^{-1}v$, avec $v \in G(b)$, c'est à dire que k est équivalent à un facteur à valeurs dans le sous-groupe $H(b)$ de G.

6. Espaces fibrés pré-associés et formes de connexions. Dans ce paragraphe, on suppose que Y est un espace fibré principal *différentiable* de base X et de groupe G; on suppose de plus que G est un groupe de Lie. Soit P un espace fibré différentiable de base X et de groupe G trivialisé par la projection $q : Y \to X$ et soit r une application différentiable de Y dans P compatible avec les projections sur X. On désigne par k le facteur différentiable sur Y, à valeurs dans G, tel que $r(ys) = r(y)k(y, s)$ quels que soient $y \in Y$ et $s \in \Gamma$. Pour toute forme de connexion γ sur P,[2] la forme $\omega = \gamma r$, image réciproque de γ par r, est une forme différentielle de degré 1 sur Y, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, telle que

$$\text{(C)} \qquad k(y, s)\,\omega(dys + yds) - \omega(dy)\,k(y, s) = k(dy, s) + k(y, ds)$$

quels que soient les vecteurs dy d'origine $y \in Y$ et ds d'origine $s \in \Gamma$. Réciproquement, soit ω une forme différentielle de degré 1 sur Y à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui vérifie la condition (C). Sur $Y \times G$, on considère la forme η telle que

$$\eta(dy, da) = a\omega(dy)\,a^{-1} - da\,a^{-1}$$

quels que soient les vecteurs dy d'origine $y \in Y$ et da d'origine $a \in G$. On vérifie facilement qu'il existe sur P une forme γ et une seule telle que η soit image réciproque de γ par l'application $(y, a) \to r(y)\,a^{-1}$ de $Y \times G$ sur P. Et cette forme γ est une forme de connexion sur P. Ainsi, l'application $\gamma \to \gamma r$ est une bijection de l'ensemble des formes de connexion sur P sur l'ensemble des formes différentielles sur Y à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui vérifient la condition (C).

La condition (C) est équivalente aux deux conditions:

$$\text{(C.1)} \qquad k(y, s)\,\omega(dy, s) - \omega(dy)\,k(y, s) = k(dy, s)$$

---

[2] Pour la notion de forme de connexion, voir par exemple K. Nomizu [6]. On utilise ici les conventions d'écriture suivantes. Pour toute application différentiable f, on désigne par $f(dy)$ le vecteur image d'un vecteur dy par l'application "dérivée" de f. Si $(y, s) \in Y \times \Gamma$, on désigne par (dy, s) le vecteur de la variété $Y \times \Gamma$ image du vecteur dy de Y par l'application $z \to (z, s)$. De meme (y, ds) est l'image de ds par l'application $t \to (y, dt)$. On pose $(dy, ds) = (dy, s) + (y, ds)$. L'image de (dy, s) (resp. (y, ds)) par l'application $Y \times \Gamma \to Y$ qui est définie par les opérations de Γ dans Y se note dys (resp. yds).

pour tout $s \in \Gamma$ *et tout vecteur* dy *d'origine* $y \in Y$,

(C.2) $$k(y, s)\,\omega(yds) = k(y, ds)$$

pour tout $y \in Y$ *et tout vecteur* ds *d'origine* $s \in \Gamma$.

Supposons maintenant que P soit un espace fibré pré-associé à Y. Il existe alors une application *différentiable* g de $Y^2 \to G$ telle que les conditions (PA) et (N) soient satisfaites. De (PA) on déduit que

$$g(y, dy')\,k(y', s) + g(y, y')\,k(dy', s) = k(y, s)\,g(ys, (dy')s)$$

pour tout $s \in \Gamma$, $y \in Y$ et tout vecteur dy' d'origine $y' \in Y$. Pour $y = y'$ on obtient $g(y, dy)\,k(y, s) + k(dy, s) = k(y, s)\,g(ys, (dy)s)$ ce qui signifie que la *forme différentielle* ω *sur* Y *définie par* $\omega(dy) = g(y, dy)$ *vérifie la condition* (C.1).

Si le groupe Γ est discret, la relation (C.2) est trivialement vérifiée. Dans ce cas, le choix d'une application $g : Y^2 \to G$ vérifiant les conditions (PA) et (N) déterminera donc une forme de connexion sur l'espace fibré principal P. Les groupes d'holonomie de cette connexion sont liés aux groupes $H(b)$ et $G(b)$ définis par g(cf. §5). D'une manière précise, si r désigne l'application différentiable de Y dans P telle que $r(ys) = r(y)\,k(b, s)$, et si γ est la forme de connexion sur P telle que $g(y, dy) = \gamma r(dy)$, alors, *pour tout point* $b \in Y$ *le groupe d'holonomie de* γ *au point* $r(b)$ *est contenu dans* $H(b)$ *et le groupe d'holonomie restreinte de* γ *au point* $r(b)$ *est contenu dans* $G(b)$. Soit en effet $c(t)$ un lacet différentiable d'origine et d'extrémité $q(b)$ dans X et soit $y(t)$ le chemin d'origine b dans Y tel que $qp(t) = c(t)$ ($t \in I = [0, 1]$). Le chemin $ry(t)$ est un relèvement de $c(t)$ dans P ayant pour origine $r(b)$. Le relèvement de $c(t)$ dans P ayant pour origine $r(b)$ qui est *intégral* pour la forme de connexion γ s'écrit $(ry(t))\,\theta(t)$ où θ est un chemin d'origine e dans G. Si s est l'élément de Γ défini par $y(1) = bs$, alors $ry(1) = r(b)\,k(b, s)$ est l'élément du groupe d'holonomie au point $r(b)$ défini par le lacet $c(t)$ et $k(b, s)\,\theta(1)$. On a $\gamma((ry(dt))\,\theta(t) + (ry(t))\,\theta(dt)) = 0$ pour tout vecteur dt d'origine $t \in I$, par conséquent, $\theta(t)^{-1}(\gamma ry(dt))\,\theta(t) + \theta(t)^{-1}\theta(dt) = 0$. Puisque $\gamma r(dy) = g(y, dy)$, ceci donne $g(y(t), y(dt)) = -\theta(dt)\,\theta(t)^{-1}$. D'autre part, d'après la définition de $G(b)$ (cf. §5) l'application $u : I^2 \to G$ définie par

$$g(b, y(t))\,g(y(t), y(t')) = u(t, t')\,g(b, y(t'))$$

a ses valeurs dans la composante connexe par arcs de l'élément neutre de $G(b)$

qui est un sous-groupe de Lie de G ([3]). En dérivant la relation précédente par rapport à t' puis en posant $t=t'$, on obtient

$$g(b, y(t))g(y(t), y(dt)) = u(t, dt)g(b, y(t)) + g(b, y(dt))$$

pour tout vecteur dt d'origine $t \in I$. Il en résulte que $u(t, dt) = -f(dt)f(t)^{-1}$ où $f(t) = g(b, y(t))\theta(t)$. Par conséquent, $f(t) \in G(b)$ pour tout $t \in I$ et en particulier $f(1) = g(b, y(1))\theta(1) = g(b, bs)\theta(1) \in G(b)$. On a donc $k(b, s)\theta(1) = k(b, s)g(b, bs)^{-1}g(b, bs)\theta(1) \in H(b)$. Si le lacet $c(t)$ est homotope à 0 dans X, alors $y(1) = b$, donc $s = e$ et $k(b, s)\theta(1) = \theta(1) = f(1) \in G(b)$, ce qui démontre l'assertion.

7. Cas des espaces fibrés holomorphes. Soient Γ un groupe de Lie complexe et Y un espace fibré holomorphe de groupe Γ et de base X. On définit comme au paragraphe 3 les espaces fibrés principaux holomorphes de base X associés et pré-associés à Y, les isomorphismes intervenant dans la définition étant alors des isomorphismes holomorphes. Les facteurs étant maintenant des applications holomorphes de Y dans un groupe de Lie complexe G, les Théorèmes 5, 6 ainsi que le Lemme 2 subsistent en y remplaçant le mot "continu" par "holomorphe". La condition, pour un espace fibré principal de base X d'être pré-associé à Y devient très restrictive dans le cadre holomorphe. Compte tenu du paragraphe 6, on voit par exemple que, *si Y est un revêtement galoisien de X, tout espace fibré principal holomorphe pré-associé à Y possède une connexion holomorphe* ([1]).

Dans le cas où $Y = C^n$ et où Γ est un sous-groupe discret opérant par translations dans C^n, tout espace fibré principal holomorphe P de base $X = Y/\Gamma$ qui possède une connexion holomorphe est préassocié à Y. En effet, puisque P est trivialisé par $Y \to X$ il existe une application holomorphe r de Y dans P compatible avec les projections sur X. Soit k le facteur holomorphe sur Y défini par $r(y+s) = r(y)k(y, s)$ pour $y \in Y$ et $s \in \Gamma$. Soit γ une forme de connexion holomorphe sur P. Pour tout $(y, y') \in Y^2$ on désigne par $\theta(y, y', \quad)$ l'application différentiable de l'intervalle $I = [0, 1]$ dans G telle que le chemin $t \to r(y + t(y'-y))\theta(y, y', t)$ soit un chemin intégral d'origine $r(y)$ pour la forme de connexion γ. Si $\omega = \gamma r$, on a donc $\theta(y, y', 0) = e$ et $\theta(y, y', dt) = -\omega(y + dt(y'-y))\theta(y, y', t)$ pour tout vecteur dt d'origine t dans I. Puisque γ est holomorphe, il en est de même de la forme ω sur Y et il en résulte que, pour chaque valeur de t, l'application $(y, y') \to \theta(y, y', t)$ est une application holomorphe de $\dot{Y}^2$ dans G. Quel que soit $s \in \Gamma$, $t \to r(y+s+t(y'-y))\theta(y+s, y'+s, t) = r(y+t(y'-y))k(y, s)\theta(y+s, y'+s, t)$ et $t \to r(y+t(y'-y))\theta(y, y', t)$ sont deux chemins intégraux dans P qui se projettent suivant le même chemin sur X et qui ont respectivement pour origines $r(y+s) = r(y)k(y, s)$ et $r(y)$. Par suite, $k(y+t(y'-y), s)\theta(y+s, y'+s, t) = \theta(y, y', t)k(y, s)$ quels que soient $y, y' \in Y$, $s \in \Gamma$ et $t \in I$. Pour $t=1$, on a donc $k(y', s)\theta(y+s, y'+s, 1) = \theta(y, y', 1)k(y, s)$, c'est à dire que l'application holomorphe g de Y^2 dans G définie par $g(y, y') = \theta(y, y', 1)^{-1}$ vérifie la condition (PA).

Dans le cas où $n > 1$ et où X est compact, S. Murakami a démontré l'existence d'espaces fibrés holomorphes de base X qui possèdent des connexions holomorphes mais ne possèdent pas de connexion holomorphe intégrable [5]. Il en résulte que, pour $n > 1$, il existe des espaces fibrés holomorphes pré-associés à Y qui ne sont pas associés à Y.

REFÉRENCES

[1] A. M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in Fibre Bundle*, Trans. of the Amer. Math. Soc. vol. **85** (1957), pp. 181–207.

[2] J. L. Koszul, *Multiplicateurs et classes caracteristiques*, Trans. of Amer. Math. Soc. **89** (1958), pp. 256–267.

[3] H. M. Yamabe, *On arc-wise connected subgroups of a Lie group*, Osaka Math. J. vol. **2** (1957), pp. 13–14.

[4] J. Milnor, *Construction of universal bundles*, II, Ann. of Math. vol. **63** (1956), pp. 430–436.

[5] S. Murakami, *Sur certains espaces fibres principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes*, Osaka Math. J. vol. **11** (1959), pp. 43–62.

[6] K. Nomizu, *Lie groups and differential Geometry*, Math. Soc. of Japan **2** (1956).

Université de Strasbourg