ÜBER DIE ORDNUNG GEWISSER UNTERGRUPPEN VON $GL(q, p)$

KIRIO NAKAMURA

Es ist wohlbekannt (Burnside [1]), dass $(S_{p_1}(GL(m, p)) < p^m$ für ein beliebiges m und für eine von $p(\neq 2)$ verschiedene ungerade Primzahl p_1.

In den folgenden Zeilen beweisen wir die Ungleichung

$$(1) \qquad (\mathfrak{M}) < p^q \qquad (p \neq 2,\ q \neq p).$$

für eine irreduzible nilpotente Untergruppe $\mathfrak{M}$ von $GL(q, p)$ (v.d. Waerden [2]) mit einer ungeraden und p-regulären Ordnung $(\mathfrak{M})$ und für eine von p verschiedene Primzahl q.

Beweis von (1). Es sei $\mathfrak{N}$ eine abelsche Gruppe von der Ordnung p^q und vom Typus $(p, \ldots, p)$. Wir konstruieren das Holomorph $\mathfrak{G}$ der Automorphismengruppe $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir führen einen Widerspruch unter der Annahme,

$$(2) \qquad (\mathfrak{M}) > (\mathfrak{N}).$$

Sei $\mathfrak{M}'$ eine von $\mathfrak{M}$ verschiedene Konjugierte von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ und sei $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1$. Wäre $\mathfrak{M}_1 = 1$, so wäre $(\mathfrak{G}) \geqq (\mathfrak{M})^2 > (\mathfrak{M})(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G})$, was unmöglich ist. Also muss $\mathfrak{M}_1 \neq 1$ sein. Sei $S_{p_1}(\mathfrak{M}_1)$ die p_1-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}_1$, wobei p_1 ein Primfaktor von $(\mathfrak{M}_1)$ ist. Sei $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ der Zentralisator von $S_{p_1}(\mathfrak{M}_1)$ in $\mathfrak{G}$, dann enthält er das p_1-Sylowkomplement $\mathfrak{M}^{p_1}$ in $\mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{M}'^{p_1}$. Wäre $\mathfrak{M}^{p_1} = \mathfrak{M}'^{p_1}$, dann würden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ beide im Zentralisator vom Zentrum von $\mathfrak{M}^{p_1}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{M}$ stimmte der Zentralisator dann mit $\mathfrak{G}$ überein, was ein Widerspruch ist. Also ist $\mathfrak{M}^{p_1} \neq \mathfrak{M}'^{p_1}$. Daher enthält $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ eine Untergruppe $\mathfrak{N}_1 \neq 1$ von $\mathfrak{N}$ als Normalteiler, weil $\mathfrak{M}^{p_1}$ also auch $\mathfrak{M}'^{p_1}$ in $Z_{\mathfrak{G}}(S_{p_1}(\mathfrak{M}_1))$ enthalten sind und $\{\mathfrak{M}^{p_1}, \mathfrak{M}'^{p_1}\} \supsetneqq \mathfrak{M}$ ist. Hier bezeichnet $\{\mathfrak{M}^{p_1}, \mathfrak{M}'^{p_1}\}$ die von $\mathfrak{M}^{p_1}$ und $\mathfrak{M}'^{p_1}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir dürfen annehmen, dass $\mathfrak{N}_1$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{M}^{p_1}\mathfrak{N}_1$ ist.

Received July 31, 1957.

Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}$ und Minimalität von $\mathfrak{N}_1$ muss $\prod_{s_i \in S_{p_1}(\mathfrak{M})} \mathfrak{N}_1^{s_i} = \mathfrak{N}$ sein. Wäre $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$, so würde $Z_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \geqq S_{p_1}(\mathfrak{M}_1)$, also $Z_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \neq \mathfrak{N}$ sein, was wieder ein Widerspruch ist. Folglich zerfällt $\mathfrak{M}^{p_1}$ in Bestandteile gleichen Grades, die also eindimensional und überdies zueinander ähnlich sind. Denn die zugehörigen Teilräume von $\mathfrak{N}$ sind zueinander $\mathfrak{M}^{p_1}$-isomorph. Daraus folgt

$$(\mathfrak{M}^{p_1}) \mid (p-1). \tag{3}$$

Es sei nun p_1^n die in $(p^q-1)\ldots(p-1)$ aufgehende höchste p_1-Potenz. Da $(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}^{p_1})(S_{p_1}(\mathfrak{M}))$ und $(S_{p_1}(\mathfrak{M})) \leqq p_1^n$ ist, haben wir einen Widerspruch gegen (2), wenn nur $(\mathfrak{M}^{p_1})p_1^n < p^q$ gezeigt ist. Der Beweis soll durch Fallunterscheidung geführt werden.

Fall I) $p_1 \mid p-1$. Es sei $p_1^x \| p-1$. Wegen $(p_1, (\mathfrak{M}^{p_1})) = 1$ und (3) ist $p_1^x(\mathfrak{M}^{p_1}) \mid p-1$, also

$$p_1^x(\mathfrak{M}^{p_1}) < p. \tag{4}$$

Fall I a) $p_1 \neq q$. Dann ist

$$p_1^x \| p^q - 1. \tag{5}$$

Nach Burnside [1] gilt

$$p_1^y < p^{q-1}, \tag{6}$$

wo y die Zahl mit $p_1^y \| (p^{q-1}-1)\ldots(p-1)$ ist. Aus (4) und (6) folgt $p_1^{x+y}(\mathfrak{M}^{p_1}) < p^q$. Aber, wegen (5) und Definition von x, y und n, ist $x+y=n$. Also $p_1^n(\mathfrak{M}^{p_1}) < p^q$.

Fall I b) $p_1 = q$. Dann ist $p_1^{x+1} \| p^q - 1$. Es ist $\frac{p}{p_1^x} > 2$, also $\frac{p^{q-1}}{p_1^{x(q-1)}} > 2^{q-1} > q$ wegen $q > 2$. Hieraus folgt wegen $p_1 = q$ und (4)

$$\frac{p^q}{p_1^{x+1}(\mathfrak{M}^{p_1})p_1^{x(q-1)}} = \frac{p}{p_1^x(\mathfrak{M}^{p_1})} \times \frac{p^{q-1}}{p_1^{x(q-1)}q} > 1.$$

Hier ist $p_1^{x+1+x(q-1)} = p_1^n$. Daher ist $p_1^n(\mathfrak{M}^{p_1}) < p^q$.

Fall II) $p_1 \nmid p-1$. Es sei r die kleinste natürliche Zahl mit $p_1 \mid p^r - 1$ $(1 < r \leqq q)$.

Fall II a) $1 < r < q$. Es ist $p_1 \nmid p^q - 1$. Denn sonst wäre $p_1 \mid p^{r'} - 1$ mit $q = sr + r'$ $(r > r' > 0)$, was unmöglich ist. Nach Burnside [1] gilt $p_1^y < p^{q-1}$, wo y die Zahl mit $p_1^y \| (p^{q-1}-1)\ldots(p-1)$ ist. Nun ist $p_1^n = p_1^y$, da $p_1 \nmid p^q - 1$ ist. Weiter ist $(\mathfrak{M}^{p_1}) < p$. Folglich ist $p_1^n(\mathfrak{M}^{p_1}) < p^q$.

Fall II b) $r=q$. Dann ist $p_1^n \| p^q-1$. Offenbar ist $p_1^n(\mathfrak{M}^{p_1}) | p^q-1$ und $p_1^n(\mathfrak{M}^{p_1}) < p^q$.

Damit sind alle Fälle erledigt und die Ungleichung (1) ist also bewiesen.

Literatur

[1] W. Burnside, On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (second paper), Proceedings of the London Math. Society, volume **2** (1905), S. 432.

[2] B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Berlin, Springer, 1935, S. 6.

Mathematisches Institut
Universität zu Nagoya