SUR UN THÉORÈME DE M. MATSUSHIMA

KENTARO YANO

§ **0.** Dans une Note parue dans ce Journal, M. Matsushima [1] a démontré le

THÉORÈME. *Dans un espace compact de Kähler-Einstein dont la courbure est positive, un vecteur analytique contrevariant u peut s'écrire d'une et d'une seule manière sous la forme $u = v + Fw$ où v et w sont tous les deux les vecteurs de Killing et F le tenseur définissant la structure complexe de l'espace.*

Dans cette Note on va donner deux démonstrations de ce théorème en utilisant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur soit analytique contrevariant. La première est donnée dans § 3 et la deuxième dans § 4.

§ **1.** Considérons un espace V de Riemann compact et orientable de n dimensions dont la métrique $ds^2 = g_{ji}(\xi)\, d\xi^j d\xi^i$ est définie positive. On désigne par d l'opérateur qui opère à un tenseur symétrique gauche u : $u_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ de degré p et donne un tenseur symétrique gauche de degré $p+1$, du: $\nabla_i u_{i_p i_{p-1} \dots i_1} - \nabla_{i_p} u_{i i_{p-1} \dots i_1} - \dots - \nabla_{i_1} u_{i_p \dots i_2 i}$ et par δ l'opérateur qui donne un tenseur symétrique gauche de degré $p-1$, δu : $-g^{ji} \nabla_j u_{i i_{p-1} \dots i_1}$, ∇_j étant l'opérateur de la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\left\{ {h \atop ji} \right\}$. Il est bien connu que $ddu = 0$ et $\delta\delta u = 0$.

On désigne par Δ l'opérateur $\delta d + d\delta$. Pour un vecteur u, on a Δu : $-(g^{ji} \nabla_j \nabla_i u_h - K_h{}^i u_i)$, $K_h{}^i$ étant le tenseur de Ricci. On peut facilement vérifier que $\Delta du = d\Delta u$ et $\Delta \delta u = \delta \Delta u$.

On définit le produit global de deux tenseurs symétriques gauches $a_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ et $b_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ de même degré p par $(a, b) = \dfrac{1}{p!} \displaystyle\int_V a_{i_p i_{p-1} \dots i_1} b^{i_p i_{p-1} \dots i_1} \sqrt{g}\, d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n$, g étant le déterminant formé avec g_{ji}.

Il est bien connu que $(du, v) = (u, \delta v)$, $(\delta u, v) = (u, dv)$ *et* $(\Delta u, u) = (du, du) + (\delta u, \delta u)$. La dernière équation démontre un théorème célèbre: Pour qu'un tenseur symétrique gauche soit harmonique, il faut et il suffit que $\Delta u = 0$.

Received May 25, 1957.

Exactement de la même manière que la précédente, on désigne par D l'opérateur qui opère à un tenseur symétrique u : $u_{i_p i_{p-1}\dots i_1}$ de degré p et donne un tenseur symétrique de degré $p+1$, Du : $\nabla_i u_{i_p i_{p-1}\dots i_1} + \nabla_{i_p} u_{i i_{p-1}\dots i_1} + \dots + \nabla_{i_1} u_{i_p i_{p-1}\dots i_2 i}$, et par δ l'opérateur qui donne un tenseur symétrique de degré $p-1$, δu : $-g^{ji}\nabla_j u_{i i_{p-1}\dots i_1}$. Si l'on pose $\Box = \delta D - D\delta$, on a, pour un vecteur u, $\Box u$: $-(g^{ji}\nabla_j \nabla_i u^h + K_i{}^h u^i)$.

Si l'on définit le produit global de deux tenseurs symétriques $a_{i_p i_{p-1}\dots i_1}$ et $b_{i_p i_{p-1}\dots i_1}$ par la même formule que la précédente, on trouve $(Du, v) = (u, \delta v)$, $(\delta u, v) = (u, Dv)$ *et* $(\Box u, u) = (Du, Du) - (\delta u, \delta u)$. Un vecteur de Killing u est caractérisé par $Du = 0$ (et $\delta u = 0$) et par conséquent satisfait à $\Box u = 0$. La dernière équation démontre le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur u soit un vecteur de Killing, il faut et il suffit que $\Box u = 0$ et $\delta u = 0$.*

§ **2.** Considérons un espace compact de Kähler et désignons par F le tenseur qui définit la structure complexe de l'espace. Alors on a $F_j{}^i F_i{}^h = -A_j^h$, $F_{ji} = -F_{ij}$ et $\nabla_j F_{ih} = 0$.

Un tenseur u_{ji} est dit pur s'il satisfait à $^*Ou = 0$: $\frac{1}{2}(A_j^c A_i^b + F_j{}^c F_i{}^b)u_{cb} = 0$ et hybride s'il satisfait à $Ou = 0$: $\frac{1}{2}(A_j^c A_i^b - F_j{}^c F_i{}^b)u_{cb} = 0$. De même un tenseur $u_i{}^h$ est dit pur s'il satisfait à $^*Ou = 0$: $\frac{1}{2}(A_i^b A_a^h + F_i{}^b F_a{}^h)u_b{}^a = 0$ et hybride s'il satisfait à $Ou = 0$: $\frac{1}{2}(A_i^b A_a^h - F_i{}^b F_a{}^h)u_b{}^a = 0$. Il est facil de voir que les opérateurs O et $^*O$ satisfont aux $O + {}^*O = A$, $O \cdot O = 0$, $O \cdot {}^*O = {}^*O \cdot O = 0$, ${}^*O \cdot {}^*O = {}^*O$, A étant l'opérateur identique.

Or un vecteur u_i est dit analytique covariant si sa dérivée covariante $\nabla_j u_i$ est pure, c'est-à-dire, si l'on a $^*O\nabla u = 0$: $\frac{1}{2}(A_j^c A_i^b + F_j{}^c F_i{}^b)\nabla_c u_b = 0$. Entre les opérateurs Δ et $^*O\nabla$ appliqués à un vecteur covariant, on a les relations $2\Delta u = -\delta^* O\nabla u$ et $(\Delta u, u) = (^*O\nabla u, {}^*O\nabla u)$, qui démontrent le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur soit analytique covariant, il faut et il suffit que $\Delta u = 0$, c'est-à-dire, que le vecteur soit harmonique.*

Un vecteur u^h est dit analytique contrevariant, si sa dérivée covariante $\nabla_j u^h$ est pure, c'est-à-dire, si l'on a $^*O\nabla u = 0$: $\frac{1}{2}(A_i^b A_a^h + F_i{}^b F_a{}^h)\nabla_b u^a = 0$. Entre les operateurs $\Box$ et $^*O\nabla$ appliqués à un vecteur contrevariant, on a les relations $2\Box u = -\delta^* O\nabla u$ et $(\Box u, u) = (^*O\nabla u, {}^*O\nabla u)$, qui démontrent le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur u soit analytique contrevariant, il faut et il suffit que* $\square u = 0$. (*Voir K. Yano* [3]).

§ **3.** Considérons un espace de Kähler-Einstein. Un tel espace est caractérisé par l'équation $K_i^{\ h} = kA_i^h$, k étant une constante. L'opérateur Δ appliqué à un vecteur u prend la forme Δu : $-(g^{ji}\nabla_j\nabla_i u_h - ku_h)$ et $\square$ appliqué à un vecteur u la forme $\square u$: $-(g^{ji}\nabla_j\nabla_i u^h + ku^h)$ et par conséquent on a $\square u = \Delta u - 2ku$, d'où

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur dans un espace compact de Kähler-Einstein soit analytique contrevariant, il faut et il suffit que* $\Delta u = 2ku$.

D'après Bochner [4], si $k > 0$, il n'existe pas un vecteur analytique covariant et si $k < 0$, il n'existe pas un vecteur analytique contrevariant. Si $k = 0$, un vecteur analytique covariant ou contrevariant est parallèle.

Supposons donc que $k > 0$ et prenons un vecteur analytique contrevariant u, alors on a $\Delta u = 2ku$, d'où $\Delta d\delta u = 2kd\delta u$, ce qui montre que $w' = d\delta u$ est un vecteur analytique contrevariant. Or le vecteur $v = u - \frac{1}{2k}w'$ satisfait à $\Delta v = 2kv$, il est donc aussi un vecteur analytique contrevariant. Or $\delta v = \delta u - \frac{1}{2k}\delta w' = \delta u - \frac{1}{2k}\delta d\delta u = \delta u - \frac{1}{2k}\delta\Delta u = \delta u - \delta u = 0$. Donc, le vecteur v, satisfaisant à $\Delta v = 2kv$ et $\delta v = 0$, est un vecteur de Killing. Donc, on a démontré que $u = v + \frac{1}{2k}w'$ où v est un vecteur de Killing et w' un vecteur analytique contrevariant.

Il est facil de voir que si w' est un vecteur analytique contrevariant, alors Fw' : $F_i^{\ h}w'^i$ l'est aussi. D'autre part, w' étant un vecteur gradient, on a $\delta(Fw') = \nabla_j F^{ji}w'_i = F^{ji}\nabla_j w'_i = 0$, d'où, le vecteur $w = -\frac{1}{2k}Fw'$ est un vecteur de Killing. Le vecteur $\frac{1}{2k}w'$ étant de la forme $\frac{1}{2k}w' = Fw$, on a $u = v + Fw$ où v et w sont tous les deux les vecteurs de Killing.

Si le vecteur analytique contrevariant u admet deux telles décompositions $u = v_1 + Fw_1$ et $u = v_2 + Fw_2$, on en tire $(v_1 - v_2) + F(w_1 - w_2) = 0$, d'où, $v_1 - v_2$ étant un vecteur de Killing, $\delta F(w_1 - w_2) = 0$, qui montre que $F(w_1 - w_2)$, étant gradient et ayant la codifférentielle nulle, est nul, d'où $w_1 = w_2$ et par conséquent $v_1 = v_2$, ce qui démontre le théorème de M. Matsushima.

§ **4.** Soit u un vecteur analytique contrevariant: $\Delta u = 2ku$ et $u = h + da + \delta b$ la décomposition de de Rham-Kodaira [2] de u, h étant un vecteur harmonique.

On a $\Delta u = \Delta(h + da + \delta b) = 2k(h + da + \delta b)$, d'où $-2kh + d(\Delta a - 2ka) + \delta(\Delta b - 2kb) = 0$, par conséquent, si $k \neq 0$, on a $h = 0$, $\Delta da = 2kda$, $\Delta\delta b = 2k\delta b$. Donc da et δb sont tous les deux vecteurs analytiques contrevariants. Si l'on pose $da = w'$, $\delta b = v$, on a $\delta v = 0$, $\delta(-Fw') = 0$, donc v et $-Fw' = w$ sont tous les deux les vecteurs de Killing et on a $u = v + Fw$. L'unicité de cette décomposition se démontre de la même manière que la précédente.

Bibliographie

[1] Y. Matsushima: Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. Nagoya Mathematical Journal, **11** (1957), 145-150.

[2] G. de Rham et K. Kodaira: Harmonic integrals. Institute for Advanced Study (1950).

[3] K. Yano: Some integral formulas and their applications. To appear in Michigan Journal of Mathematics.

[4] K. Yano et S. Bochner: Curvature and Betti numbers. Annals of Mathematics Studies, No. 32 (1953).

Université de Tokyo