CAPACITÉ D'ENSEMBLES DE CANTOR GÉNÉRALISÉS*

MAKOTO OHTSUKA

1. D'abord nous définissons les ensembles de Cantor généralisés. Soient $k_1, k_2, \ldots$ des nombres entiers supérieurs à 1 et soient $p_1, p_2, \ldots$ des nombres finis quelconques également supérieurs à 1. On pose $l_q = 1/(k_q p_q)$. Soit I un intervalle de longueur $d > 0$. On enlève de I $(k_q - 1)$ intervalles de même longueur tels qu'il reste k_q intervalles de même longueur $l_q d$. On appelle cette opération la q-opération appliquée à I. On commence par appliquer l'1-opération à $[0, 1]$, on applique la 2-opération à chacun des intervalles $I_{1\nu}$ $(1 \leqq \nu \leqq k_1)$ qui restent, puis on applique la 3-opération à chacun des intervalles $I_{2\lambda}$ $(1 \leqq \lambda \leqq k_1 k_2)$ qui restent, et ainsi de suite. On appellera l'ensemble limite restant un *ensemble de Cantor généralisé dans* E_1, et le notera $F = F(k_q, p_q)$. Notre définition dans $E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$, l'espace euclidien à n dimensions $(n \geqq 2)$, est la suivante: Soit $F_j = F(k_q^{(j)}, p_q^{(j)})$ un ensemble de Cantor généralisé défini sur l'axe de x_j; nous appellerons l'ensemble produit $F = F_1 \times \ldots \times F_n$ un *ensemble de Cantor généralisé dans* E_n $(n \geqq 2)$. Il sera appelé *symétrique* si $F_1 = \ldots = F_n$.

L'auteur [4] a démontré, sous la condition additionnelle $p_q \geqq p_0 > 1$ $(q = 1, 2, \ldots)$, que pour qu'un ensemble de Cantor généralisé $F(k_q, p_q)$ soit d'α-capacité nulle $(0 \leqq \alpha < 1)$,[1] il faut et il suffit que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{k_1 \cdots k_q} = \infty \qquad (\alpha = 0) \tag{1}$$

ou

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(p_1 \cdots p_q)^{\alpha}}{(k_1 \cdots k_q)^{1-\alpha}} = \infty \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{2}$$

Presque en même temps af Hällström [1 ; 2] s'est aussi occupé de cette question dans le cas $\alpha = 0$, et il a trouvé que (1) est suffisant pour que l'ensem-

Received October 10, 1956.

* Ce travail avait été annoncé dans la note de bas de page 16 de [4], mais depuis ce temps-là certaines améliorations ont été faites.

1) 0-capacité signifie la capacité logarithmique.

ble soit de capacité logarithmique nulle et inversement que si l'ensemble est de capacité logarithmique nulle, alors ou bien (1) est vrai, ou bien on a

$$\sum_{q=2}^{\infty}\frac{\log k_q}{k_1\cdots k_{q-1}}=\infty\ ;$$

il n'a pas supposé $p_q \geqq p_0 > 1$.

Ces deux résultats sont les meilleurs parmi les résultats qui ont été obtenus pour les ensembles de Cantor généralisés à notre sens. Divers cas particuliers avaient déjà été connus ; le critère (2) avait été obtenu par Pólya et Szegö [5] pour $p_1 = p_2 = \ldots = 2$ et pour k_q constant, Nevanlinna avait démontré (1) avec $k_1 = k_2 = \ldots = 2$ et $p_q \geqq p_0 > 1$ (voir [3]), et Salem et Zygmund [7] avaient donné (1) et (2) pour k_q constant et pour $p_q > 1$ quelconque.

Tsuji [8] a aussi défini certains ensembles linéaires de type de Cantor mais, comme af Hällström [2] a remarqué, on peut donner critère pour que les ensembles soient de capacité logarithmique positive en modifiant (1). D'ailleurs il a défini des ensembles plans et des ensembles spatiaux de type de Cantor et il a donné certains critères pour qu'ils soient de capacité logarithmique positive et de capacité newtonienne positive respectivement. Il y a encore un mémoire [6] qui concerne la capacité logarithmique d'un ensemble plan de type de Cantor.

Dans ce mémoire nous évaluerons les capacités des ensembles de Cantor généralisés symétriques dans E_n $(n \geqq 1)$; l'auteur n'obtient aucune condition dans le cas non-symétrique. Le théorème étendra à la fois les résultats de l'auteur et de af Hällström.

2. THÉORÈME. *Soit* $F = F(k_q, p_q) \times \ldots \times F(k_q, p_q)$ *un ensemble de Cantor généralisé symétrique dans* E_n $(n \geqq 1)$. *Pour qu'il soit d'*α*-capacité nulle* $(0 \leqq \alpha < n)$, *il faut et il suffit que*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(p_1\cdots p_q)^{\alpha}}{(k_1\cdots k_q)^{n-\alpha}}=\infty \qquad (0<\alpha<n) \tag{3}$$

ou

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log p_q}{(k_1\cdots k_q)^{n}}=\infty \qquad (\alpha=0). \tag{4}$$

Désignons par $\{I_{q\nu}^{(j)}\}$ les intervalles qui restent lorsque la q-opération est appliquée sur l'axe de x_j, par λ_q leur longueur et par δ_q la longueur des intervalles enlevés lors de la q-opération ;

$$\lambda_q = \frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_q}, \quad \delta_q = \lambda_{q-1} \frac{1 - \frac{1}{p_q}}{k_q - 1} = \frac{p_q - 1}{k_1 \cdots k_{q-1}(k_q - 1) p_1 \cdots p_q}$$

On fera souvent l'usage de l'inégalité double suivante sans le dire explicitement:

$$\frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_{q-1}} \leqq \delta_q + \lambda_q = \frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_q} \frac{k_q p_q - 1}{k_q - 1}$$
$$\leqq \frac{2}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_{q-1}}.$$

Soit μ une mesure positive portée par F de masse totale unité et soit $U_\mu^\alpha(P)$ le potentiel d'ordre α engendré par μ dans E_n. Nous posons

$$\mu(I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)}) = \mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

Considérons les points $\{P_\kappa^{(q)}\}$, $\kappa = 1, \ldots, (k_1 \cdots k_{q-1}(k_q - 1))^n \equiv M_q$, tels que la projection de chaque point sur tout axe coïncide avec un certain point placé au centre d'un intervalle qu'on enlève lors de la q-opération. On désigne par $\rho(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)})$ la distance de $P_\kappa^{(q)}$ à $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ et par $\rho'(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)})$ le diamètre de la réunion de $P_\kappa^{(q)}$ et $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$. Si

$$0 < \Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n) \leqq \rho(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)})$$
$$< \rho'(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{q\nu_n}^{(n)}) \leqq d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n),$$

on a

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \frac{\mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n)}{\{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)\}^\alpha} \leqq U_\alpha^\mu(P_\kappa^{(q)}) \leqq \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \frac{\mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n)}{\{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)\}^\alpha} \qquad (0 < \alpha < n)$$

et

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n) \log \frac{1}{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)} \leqq U_0^\mu(P_\kappa^{(q)})$$
$$\leqq \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n) \log \frac{1}{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)}.$$

Posons u_q égal à la moyenne des valeurs $\{U_\alpha^\mu(P_\kappa^{(q)})\}$, $\kappa = 1, \ldots, M_q$. Alors

$$(5) \qquad \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \frac{1}{\{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)\}^\alpha} \leqq u_q$$
$$\leqq \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \ldots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \frac{1}{\{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \ldots, \nu_n)\}^\alpha} \qquad (0 < \alpha < n)$$

ou

$$(6)\qquad \frac{1}{M_q}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=1}^{k_1\cdots k_q}\mu_q(\nu_1,\ldots,\nu_n)\sum_{\kappa=1}^{M_q}\log\frac{1}{d_\kappa^{(q)}(\nu_1,\ldots,\nu_n)}\leqq u_q$$

$$\leqq\frac{1}{M_q}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=1}^{k_1\cdots k_q}\mu_q(\nu_1,\ldots,\nu_n)\sum_{\kappa=1}^{M_q}\log\frac{1}{\varDelta_\kappa^{(q)}(\nu_1,\ldots,\nu_n)}.$$

En premier lieu nous nous occupons du cas $0<\alpha<n$. Si $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$ se place strictement dans l'intérieur de $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$, nous prenons 2^n points de $\{P_\kappa^{(q)}\}$ qui se trouvent sur la surface du cube de côté $\delta_q+\lambda_q$ et entourant $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$, et nous posons $\varDelta_\kappa^{(q)}=\delta_q/2$ pour ces points; ces points sont à distance $\sqrt{n}\,\delta_q/2$ de $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$. Si $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$ touche la surface de $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ le nombre des points qui sont à distance $\sqrt{n}\,\delta_q/2$ de $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$ est strictement inférieur à 2^n. Dans ce cas, nous prenons les points situés à distance $\sqrt{n}\,\delta_q/2$ d'un certain des cubes $\{I_{q\pi_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\pi_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$ mais se placent dans d'autres $\{I_{q-1,\pi_1'}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\pi_n'}^{(n)}\}$. Ainsi on trouve 2^n points qui entourent $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$ en un certain sens, et on pose $\varDelta_\kappa^{(q)}=\delta_q/2$ pour eux. Ensuite considérons les points de $\{P_\kappa^{(q)}\}$ qui sont situés sur la surface du cube de côté $3(\delta_q+\lambda_q)$ et entourant $I_{q\nu_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q\nu_n}^{(n)}$, et posons $\varDelta_\kappa^{(q)}=\delta_q+\lambda_q$ pour eux. S'il n'y a pas $(2\cdot 2)^n-(2\cdot 1)^n$ tels points, nous comptons certains points dans $\{I_{q-1,\rho_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\rho_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ comme plus haut et posons encore $\varDelta_\kappa^{(q)}=\delta_q+\lambda_q$. On continue ce procédé. Alors

$$\sum_{s=1}^{2k_q}\frac{\{2(s+1)\}^n-(2s)^n}{s^\alpha(\delta_q+\lambda_q)^\alpha}$$

majorera la somme $\sum 1/\{\varDelta_\kappa^{(q)}(\nu_1,\ldots,\nu_n)\}^\alpha$ étendue sur tous les points dans $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ et tous les points dans $\{I_{q-1,\rho_1}^{(1)}\times\ldots\times I_{q-1,\rho_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de celui-ci.

Telle considération nous amène à l'évaluation suivante:

$$M_q u_q\leqq\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=1}^{k_1\cdots k_q}\mu_q(\nu_1,\ldots,\nu_n)\Big\{2^n\frac{2^\alpha}{\delta_q^\alpha}+2^n\sum_{s=1}^{2kq}\frac{(s+1)^n-s^n}{s^\alpha(\delta_q+\lambda_q)^\alpha}$$

$$+2^n(k_q-1)^n\sum_{s=1}^{2k_{q-1}}\frac{(s+1)^n-s^n}{s^\alpha(\delta_{q-1}+\lambda_{q-1})^\alpha}+\ldots+$$

$$+2^n(k_q-1)^n k_{q-1}^n\cdots k_2^n\sum_{s=1}^{2k_1}\frac{(s+1)^n-s^n}{s^\alpha(\delta_1+\lambda_1)^\alpha}\Big\}$$

$$= 2^n\left\{\frac{2^\alpha}{\delta_q^\alpha} + \frac{1}{(\delta_q+\lambda_q)^\alpha}\sum_{s=1}^{2k_q}\frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha}\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(k_q-1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n}{(\delta_1+\lambda_1)^\alpha}\sum_{s=1}^{2k_1}\frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha}\right\}.$$

Puisque $(s+1)^n - s^n \leqq (2^n - 1)s^{n-1}$ pour $s \geqq 1$, on a

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha} \leqq (2^n-1)\sum_{s=1}^{k} s^{n-\alpha-1} \leqq \frac{2^n-1}{n-\alpha}(2k)^{n-\alpha}.$$

Donc

$$u_q \leqq \frac{2^{n+\alpha}}{(k_1\cdots k_{q-1}(k_q-1))^n}\frac{1}{\delta_q^\alpha}$$

$$+ \frac{2^n(2^n-1)4^{n-\alpha}2^n}{n-\alpha}\sum_{i=0}^{q-1}\frac{(p_0\cdots p_i)^\alpha}{(k_0\cdots k_i)^{n-\alpha}} \equiv 2^{n+\alpha}\sigma_q + \Sigma_q$$

avec $k_0 = p_0 = 1$; dans cette évaluation on utilise l'inégalité $k_i/(k_i-1) \leqq 2$ pour $k_i \geqq 2$.

Supposons que la série de (3) soit convergente; alors Σ_q est borné. Si $(k_1 \ldots k_{q_j-1}(k_{q_j}-1))^n\delta_{q_j}^\alpha \geqq 1$ pour $j = 1, 2, \ldots,$ les moyennes $\{u_{q_j}\}_{j=1,2,\ldots}$ sont visiblement bornées par une constante $c < +\infty$. Par suite pour chaque j un au moins de $\{U_\alpha^\mu(P_\kappa^{(q_j)})\}$, soit $U_\alpha^\mu(P_{\kappa_j}^{(q_j)})$, est $< c$. On peut en conclure que $C^{(\alpha)}(F) > 0$. En effet, si $C^{(\alpha)}(F) = 0$, il existerai une mesure positive μ portée par F telle que $U_\alpha^\mu(P) = +\infty$ en chaque point de F; voir [9] pour ce fait. Puisque $P_{\kappa_j}^{(q_j)}$ vient arbitrairement voisin de F lorsque $j \to \infty$, $U_\alpha^\mu(P_{\kappa_j}^{(q_j)}) \to +\infty$ avec j, qui est absurde. Ainsi $C^{(\alpha)}(F) > 0$.

Or, supposons que

$$(k_1\cdots k_{q-1}(k_q-1))^n\delta_q^\alpha \leqq 1 \qquad \text{pour tout } q \geqq q_0 > 1.$$

Alors pour $q \geqq q_0$ on a

$$(p_q-1)^\alpha \leqq \frac{(p_1\cdots p_q)^\alpha}{(k_1\cdots k_q)^{n-\alpha}}2^{n-\alpha},$$

qui tend vers 0 avec $1/q$ d'après notre hypothèse ci-dessus, d'où $p_q \to 1$ lorsque $q \to \infty$. Il existe alors un entier q_1 et un nombre ξ tels que $p_q/2^{(n-\alpha)/\alpha} < \xi < 1$ pour tout $q \geqq q_1$. On aura

$$\sum_{q=q_1}^{\infty}(p_q-1) \leqq 2^{(n-\alpha)/\alpha}\frac{p_1\cdots p_{q_1-1}}{(k_1\cdots k_{q_1-1})^{(n-\alpha)/\alpha}}\sum_{q=q_1}^{\infty}\frac{p_{q_1}\cdots p_q}{(k_{q_1}\cdots k_q)^{(n-\alpha)/\alpha}}$$

$$< 2^{(n-\alpha)/\alpha} \frac{p_1 \cdots p_{q_1-1}}{(k_1 \cdots k_{q_1-1})^{(n-\alpha)/\alpha}} \sum_{q=q_1}^{\infty} \xi^{q-q_1+1} < \infty.$$

Par conséquent, la mesure de Lebesgue de n dimensions de F qui est égale à $\lim_{q\to\infty} 1/(p_1 \cdots p_q)^n$ est positive. Puisque la dimension hausdorffienne est égale à la dimension capacitaire, $C^{(\beta)}(F) > 0$ pour tout β, $0 \leqq \beta < n$, certainement pour α.

Ensuite nous nous servirons de l'inégalité gauche de (5). Pour $\{P_\kappa^{(q)}\}$ placés dans $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ qui contient $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ nous posons

$$d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n) = \Big(\sum_{j=1}^n s_j^2(\delta_q + \lambda_q)^2\Big)^{1/2} \leqq \sqrt{n}\,(k_q - 1)(\delta_q + \lambda_q),$$

où chaque s_j varie de 1 à $k_q - 1$. Pour $\{P_\kappa^{(q)}\}$ placés dans $I_{q-2,\nu_1''}^{(1)} \times \dots \times I_{q-2,\nu_n''}^{(n)} \supset I_{q-1,\nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ mais pas dans $I_{q-1,\nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1,\nu_n'}^{(n)}$ on pose

$$d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n) = \Big(\sum_{j=1}^n s_j^2(\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2\Big)^{1/2} \leqq \sqrt{n}\,k_{q-1}(\delta_{q-1} + \lambda_{q-1}),$$

où chaque s_j varie de 2 à k_{q-1}; pour les points dans le même cube qui est de la forme $I_{q\pi_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\pi_n}^{(n)}$ nous donnons la même valeur de $d_\kappa^{(q)}$. Et ainsi de suite. On aura

$$\begin{aligned} M_q u_q \geqq{} & \sum_{s_1=1}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_n=1}^{k_q-1} \frac{1}{\Big(\sum_{j=1}^n s_j^2(\delta_q + \lambda_q)^2\Big)^{\alpha/2}} \\ & + (k_q - 1)^n \sum_{s_1=2}^{k_{q-1}} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_{q-1}} \frac{1}{\Big(\sum_{j=1}^n s_j^2(\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2\Big)^{\alpha/2}} + \cdots \\ & + (k_q - 1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n \sum_{s_1=2}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_1} \frac{1}{\Big(\sum_{j=1}^n s_j^2(\delta_1 + \lambda_1)^2\Big)^{\alpha/2}} \\ \geqq{} & (n^{\alpha/2}2^{n+\alpha})^{-1}\{(k_1 \cdots k_{q-1}p_1 \cdots p_{q-1})^\alpha (k_q - 1)^n \\ & + (k_1 \cdots k_{q-2}p_1 \cdots p_{q-2})^\alpha k_{q-1}^n (k_q - 1)^n + \cdots \\ & + k_1^n \cdots k_{q-1}^n (k_q - 1)^n\}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_q \geqq \frac{1}{n^{\alpha/2}2^{n+\alpha}} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(p_1 \cdots p_i)^\alpha}{(k_1 \cdots k_i)^{n-\alpha}}.$$

Si $C^{(\alpha)}(F) > 0$, on peut choisir μ tel que $U_\alpha^\mu(P)$ soit uniformément borné par un nombre fini η. Donc la moyenne $u_q < \eta$ et la série de (3) doit converger.

Enfin nous prouverons le théorème dans le cas logarithmique: $\alpha=0$. De (6) il vient comme plus haut

$$M_q u_q \leqq 2^{n+1}\log 2 + 2^n \log(1/\delta_q) + 2^n \sum_{s=1}^{2k_q}\{(s+1)^n - s^n\}\log\frac{1}{s(\delta_q+\lambda_q)}$$

$$+2^n(k_q-1)^n \sum_{s=1}^{2k_{q-1}}\{(s+1)^n - s^n\}\log\frac{1}{s(\delta_{q-1}+\lambda_{q-1})} + \dots$$

$$+2^n(k_q-1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n \sum_{s=1}^{2k_1}\{(s+1)^n - s^n\}\log\frac{1}{s(\delta_1+\lambda_1)}\cdot$$

Distinguons le cas $n\geqq 2$ du cas $n=1$. Dans le cas $n\geqq 2$ nous notons que la fonction $x^{n-1}\log 1/x$ est croissante dans $0\leqq x\leqq e^{-1/(n-1)}$. Puisque $2k_q(\delta_q+\lambda_q)\to 0$ avec $1/q$, nous pouvons trouver q_2 tel que $2k_q(\delta_q+\lambda_q)\leqq e^{-1/(n-1)}$ soit vrai pour tout $q\geqq q_2$. En désignant par Σ_1 la somme

$$2^n(k_q-1)^n \cdots k_{q_2}^n \sum_{s=1}^{2k_{q_2-1}}\{(s+1)^n - s^n\}\log\frac{1}{s(\delta_{q_2-1}+\lambda_{q_2-1})}$$

$$+\dots+\text{le dernier terme,}$$

on a

$$M_q u_q \leqq 2^{n+1}\log 2 + 2^n\log(1/\delta_q) + 2^n(2^n-1)\sum_{s=1}^{2k_q} s^{n-1}\log\frac{1}{s(\delta_q+\lambda_q)}$$

$$+\dots+2^n(2^n-1)(k_q-1)^n\cdots k_{q_2+1}^n\sum_{s=1}^{2k_{q_2}} s^{n-1}\log\frac{1}{s(\delta_{q_2}+\lambda_{q_2})}+\Sigma_1$$

$$\leqq 2^{n+1}\log 2 + 2^n\log(1/\delta_q) + 2^n(2^n-1)2k_q(2k_q)^{n-1}\log\frac{1}{2k_q(\delta_q+\lambda_q)}$$

$$+\dots+\Sigma_1.$$

Comme

$$\sum_{s=1}^{2k}\log(1/s)\leqq\int_2^{2k}\log(1/x)\,dx=[x-x\log x]_2^{2k}$$

$$=2k-2k\log 2k-2(1-\log 2)\leqq 2k-2k\log 2k\leqq -2k\log(k/2),$$

on a dans le cas $n=1$

$$M_q u_q\leqq 2^2\log 2+2\log(1/\delta_q)+2\cdot 2k_q\log\frac{2}{k_q(\delta_q+\lambda_q)}+\dots;$$

dans ce cas nous poserons $q_2=0$.

Ainsi dans tous les cas nous avons

$$(7)\qquad u_q \leqq \frac{2^{n+1}\log 2}{M_q} + \frac{2^n}{M_q}\log\frac{k_1\cdots k_q p_1\cdots p_q}{p_q-1} + \frac{2^{3n}k_q^n}{M_q}\log\frac{2}{k_q(\delta_q+\lambda_q)}$$
$$+\frac{2^{3n}(k_q-1)^n k_{q-1}^n}{M_q}\log\frac{2}{k_{q-1}(\delta_{q-1}+\lambda_{q-1})}+\ldots+\Sigma_1$$
$$\leqq \frac{2^{n+1}\log 2}{M_q}+\frac{2^n}{M_q}\left\{\log(k_1\cdots k_q)+\log\frac{(p_1\cdots p_q)}{p_q-1}\right\}$$
$$+\frac{2^{3n}k_q^n}{M_q}\log(2k_1\cdots k_{q-1}p_1\cdots p_{q-1})$$
$$+\frac{2^{3n}k_{q-1}^n(k_q-1)^n}{M_q}\log(2k_1\cdots k_{q-2}p_1\cdots p_{q-2})+\ldots+\Sigma_1.$$

Observons que

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log(k_1\cdots k_q)}{(k_1\cdots k_q)^n}<\infty$$

et

$$\frac{k_q^n}{M_q}\log(2k_1\cdots k_{q-1})+\frac{k_{q-1}^n(k_q-1)^n}{M_q}\log(2k_1\cdots k_{q-2})+\ldots$$
$$\leqq 2^n\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log(2k_1\cdots k_q)}{(k_1\cdots k_q)^n}<\infty,$$

et écartons les séries dans (7) qui sont visiblement convergentes. Il en reste

$$\frac{2^n}{M_q}\log\frac{p_1\cdots p_q}{p_q-1}+\frac{2^{3n}k_q^n\log(p_1\cdots p_{q-1})}{(k_1\cdots k_{q-1}(k_q-1))^n}$$
$$+\frac{2^{3n}k_{q-1}^n(k_q-1)^n\log(p_1\cdots p_{q-2})}{(k_1\cdots k_{q-1}(k_q-1))^n}+\ldots.$$

Supposons que $p_q\to 1$ lorsque $q\to\infty$. Si on tient compte de l'inégalité $k_q\geqq 2$, on voit facilement que

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(p_1\cdots p_q)^{\beta}}{(k_1\cdots k_q)^{n-\beta}}<\infty$$

pour β quelconque dans $(0, n)$. Nous avons déjà vu qu'alors $C^{(\beta)}(F)>0$, d'où $C^{(0)}(F)>0$. Par suite nous supposons qu'il existe $p_0>1$ tel que $p_{q_j}\geqq p_0$ pour $j=3, 4, \ldots$ Alors les termes qui peuvent croître sont

$$(8)\qquad 2^{4n}\sum_{i=q_2}^{q_J}\frac{\log(p_1\cdots p_i)}{(k_1\cdots k_i)^n}.$$

Remarquons que

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{q} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\log p_i}{(k_1 \cdots k_i)^n} = \sum_{i=2}^{q} \frac{\log(p_1 \cdots p_{i-1})}{(k_1 \cdots k_{i-1})^n k_i^n}$$

$$\leqq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} \leqq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{q} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n}$$

et donc que

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} \leqq \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{q} \frac{\log p_i}{(k_1 \cdots k_i)^n}.$$

Il en résulte que la convergence de la série de (4) assure la convergence de (8), d'où $\{u_{q_j}\}_{j=3,4,\ldots}$ sont uniformément bornés et on peut en déduire $C^{(0)}(F) > 0$ comme dans le cas $\alpha > 0$.

Il reste à démontrer que (4) entraîne $C^{(0)}(F) = 0$. Comme plus haut on a

$$M_q u_q \geqq \frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_n=1}^{k_q-1} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} s_j^2 (\delta_q + \lambda_q)^2}$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n}{2} \sum_{s_1=2}^{k_{q-1}} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_{q-1}} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} s_j^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2} + \cdots$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n}{2} \sum_{s_1=2}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_1} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} s_j^2 (\delta_1 + \lambda_1)^2}$$

$$\geqq \frac{(k_q-1)^n}{2} \log \frac{1}{n(k_q-1)^2 (\delta_q + \lambda_q)^2}$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n (k_{q-1}-1)^n}{2} \log \frac{1}{n k_{q-1}^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2}$$

$$+ \cdots + \frac{(k_q-1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n}{2} \log \frac{1}{n k_1^2 (\delta_1 + \lambda_1)^2}$$

$$\geqq \frac{(k_q-1)^n}{2} \log \frac{1}{n} \cdot \{1 + (k_{q-1}-1)^n + k_{q-1}^n (k_{q-2}-1)^n + \cdots$$

$$+ k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n\} + (k_q-1)^n \log(k_1 \cdots k_{q-1} p_1 \cdots p_{q-1})$$

$$+ (k_q-1)^n (k_{q-1}-1)^n \log\{(k_1 \cdots k_{q-2} p_1 \cdots p_{q-2})/2\} + \cdots$$

La série $(k_q-1)^n M_q^{-1} \{1 + (k_{q-1}-1)^n + k_{q-1}^n (k_{q-2}-1)^n + \cdots + k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n\}$ et la série $(k_q-1)^n M_q^{-1} [\log(k_1 \cdots k_{q-1}) + (k_{q-1}-1)^n \log\{(k_1 \cdots k_{q-2})/2\} + \cdots]$ sont visiblement convergentes lorsque $q \to \infty$. La série qui reste dans l'inégalité pour u_q est

$$\frac{\log(p_1\cdots p_{q-1})}{(k_1\cdots k_{q-1})^n}+\frac{1}{2^n}\frac{\log(p_1\cdots p_{q-2})}{(k_1\cdots k_{q-2})^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$\geqq\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{q-1}\frac{\log(p_1\cdots p_i)}{(k_1\cdots k_i)^n}.$$

Si $C^{(0)}(F)>0$, on peut choisir μ telle que $U_0^\mu(P)$ soit uniformément borné. Il s'ensuit que

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log p_q}{(k_1\cdots k_q)^n}<\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\log(p_1\cdots p_q)}{(k_1\cdots k_q)^n}<\infty,$$

contrairement à (4).

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Bibliographie

[1] G. af Hällström : Zur Berechnung der Bodenordnung oder Bodenhyperordnung eindeutiger Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn., A. I., (1955), no. 193, 16 pp.

[2] G. af Hällström : On the capacity of generalized Cantor sets, Acta Acad. Aboensis Math. Phys., **20** : 8 (1955), 8 pp.

[3] R. Nevanlinna : Eindeutige analytische Funktionen, Berlin (1936).

[4] M. Ohtsuka : Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications, Ann. Inst. Fourier, **5** (1955), pp. 1-28.

[5] G. Pólya und G. Szegö : Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, Crelle J., **165** (1931), pp. 4-49.

[6] A. E. Riiber : Über meromorphe Funktionen mit einem Existenzgebiete, dessen Rand eine Cantor'sche Punktmenge von der Kapazität null ist, Math. Scand., **3** (1955), pp. 229-242.

[7] R. Salem and A. Zygmund : Capacity of sets and Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., **59** (1946), pp. 23-41.

[8] M. Tsuji : On the capacity of general Cantor sets, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), pp. 235-252.

[9] T. Ugaheri : On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., series B, no. 4 (1953), pp. 149-179.

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya