SUR LES ESPACES HOMOGENES KAHLERIENS D'UN GROUPE DE LIE RÉDUCTIF

YOZÔ MATSUSHIMA

La recherche de la structure des espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie semi-simple fait l'objet de plusieurs travaux recents.[1] L'étude détaillée a été faite au cas compact. Il a été montré en particulier que ces espaces homogènes compacts sont des variétés algébriques (même rationnelles) et simplement connexes.

Le but essentiel de ce travail est de montrer que tout espace homogène kählérien compact est produit direct d'un tore complexe et d'un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie compact semi-simple (Théorème 3). Pour ce but nous étudierons au paragraphe 1 la structure des espaces homogènes symplectiques d'un groupe de Lie réductif. La structure et la situation du groupe d'isotropie seront clarifiées dans le théorème 1. Au paragraphe 2 on en déduit un théorème sur la structure des espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif (Théorème 2). Le théorème 3 est une conséquence immédiate du théorème 2.

1. Une variété différentiable de dimension paire sera dite symplectique s'il existe une forme extérieure K de degré deux partout de rang maximal telle que $dK=0$. Une variété kählérienne est symplectique.

Un espace homogène G/B d'un groupe de Lie connexe G sera dit homogène symplectique s'il est symplectique et si la forme K définissant cette structure est invariante par G. G/B est homogène kählérien s'il est kählérien et si la structure complexe et la métrique kählérienne sous-jacentes sont invariantes par G. Un espace homogène kählérien est homogène symplectique.

Un groupe de Lie connexe sera appelé réductif si son algèbre de Lie est réductive.[2] Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réductif et soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}+\mathfrak{s}$,

Received April 6, 1956; Revised April 25, 1956.

[1] Voir [1], [3], [5], [6]. Nos résultats se rattachent étroitement à ceux de Borel [1].

[2] Voir [4].

où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{s}$ est un idéal semi-simple. Désignons par C et S les sous-groupes invariants de G correspondant aux idéaux $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{s}$ respectivement. C est le centre connexe de G et S sera appelé *la partie semi-simple* de G.

THÉORÈME 1. *Soit G/B un espace homogène symplectique d'un groupe de Lie réductif et soit G effectif sur G/B. Alors la composante connexe de l'unité de B est contenue dans la partie semi-simple S de G. De plus, il existe un élément W dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de S vérifiant les conditions suivantes.*

a) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de B est la sous-algèbre de $\mathfrak{s}$ de tous les éléments $X \in \mathfrak{s}$ tels que $[X, W] = 0$.*

b) *$ad(b) \cdot W = W$ pour tout $b \in B$.*

Si la composante connexe de l'unité de B est compacte, B est connexe et égal au centralisateur dans S d'un tore de S. Dans ce dernier cas le centre de S se réduit à *l'unité et $G = C \times S$, et C est égal au center de G.*

Désignons par π la projection canonique de G sur G/B et posons $\pi(e) = o$, e étant l'unité de G. L'espace tangent de G (resp. de G/B) au point e (resp. au point o) s'identifie avec l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$). Désingnons encore par π la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. Puisque G est effectif sur G/B, $\mathfrak{b}$ ne contient pas d'idéal $\neq (0)$ de $\mathfrak{g}$.

Soit maintenant K la 2-forme définissant la structure homogène symplectique de G/B et soit $F = \pi^* \cdot K$. Considérons la valeur de F (resp. de K) au point e (resp. au point o). On a alors les relations suivantes.

a) $K(\pi X, \pi Y) = F(X, Y)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

b) $F(X, Y) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ si et seulement si $Y \in \mathfrak{b}$, puisque la valeur de K au point O est une fonction bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

c) $F(ad(b) \cdot X, ad(b) \cdot Y) = F(X, Y)$ pour tout $b \in B$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$.

La valeur de F au point e est un cocycle de l'algèbre de cochaînes $C^*(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les projections canoniques de $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + \mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{s}$ respectivement (si $\mathfrak{c} = (0)$, $\rho_1 = 0$ et ρ_2 est l'application identique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. De même pour le cas $\mathfrak{s} = (0)$). Puisque $H^1(\mathfrak{s}) = H^2(\mathfrak{s}) = (0)$[3] et $dC^*(\mathfrak{c}) = (0)$, le 2-cocycle F de $\mathfrak{g}$ s'écrit

$$F = \rho_1^*(F_1) + \rho_2^*(dF_2), \tag{1}$$

où $F_1 \in C^2(\mathfrak{c})$ et $F_2 \in C^1(\mathfrak{s})$. Soit maintenant B_2 la forme de Killing de l'algèbre

[3] Voir [4]. On désigne par $H^k(\mathfrak{s})$ l'espace de cohomologie de $\mathfrak{s}$ de dimension k.

de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$. Puisque B_2 est non dégénérée, il existe un élément W de $\mathfrak{s}$ tel que $F_2(X) = B_2(X, W)$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$. Alors $dF_2(X, Y) = F_2([X, Y])$ $= B_2([X, Y], W)$ pour $X, Y \in \mathfrak{s}$. Il résulte alors du (1) que

$$(2) \qquad F(X, Y) = F_1(\rho_1 \cdot X, \rho_1 \cdot Y) + B_2([\rho_2 \cdot X, \rho_2 \cdot Y], W)$$

quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Il en résulte en particulier que

$$(3) \qquad F(X, Y) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{c}$ et tout $Y \in \mathfrak{s}$.

Soient maintenant $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{b}$. Puisque $\rho_2 \cdot X = 0$, on a $F(X, Y) = F_1(\rho_1 \cdot X, \rho_1 \cdot Y) = 0$ par les relations b) et (2) et par suite $F(X, \rho_1 \cdot Y) = F_1(\rho_1 \cdot X, \rho_1 \cdot Y) = 0$. D'autre part $F(X, \rho_1 \cdot Y) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$ par (3). Il en résulte que $F(X, \rho_1 \cdot Y) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, d'où $\rho_1 \cdot Y \in \mathfrak{b}$ par la relation b). Puisque $\mathfrak{b}$ ne contient pas d'idéal $\neq (0)$ de $\mathfrak{g}$ et que $\rho_1 \cdot Y \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}$, on a $\rho_1 \cdot Y = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{b}$. Ceci montre que $\mathfrak{b}$ est contenue dans $\mathfrak{s}$. La composante connexe de l'unité de B est contenue donc dans S. Puisque $F(X, Y) = 0$ pour $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{s}$, la condition pour qu'un élément $Y \in \mathfrak{s}$ appartienne à $\mathfrak{b}$ est que $F(X, Y)$ $= B_2([X, Y], W) = B_2(X, [Y, W]) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$, donc que $[Y, W] = 0$. Soit maintenant $b \in B$. Puisque $F(X, Y) = B_2([X, Y], W)$ pour $X, Y \in \mathfrak{s}$ et que $\mathfrak{s}$ est stable par $ad(b)$, on a, par la relation c), $B_2(ad(b) \cdot [X, Y], W) = B_2([X, Y], W)$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{s}$. D'autre part, B_2 étant invariante par $ad(b)$, on a $B_2(ad(b) \cdot [X, Y], ad(b) \cdot W) = B_2([X, Y], W)$. Il en résulte que $B_2([X, Y], ad(b) W) = B_2([X, Y], W)$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{s}$. Puisque $\mathfrak{s}$ est semi-simple, on a $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$ et par suite $B_2(X, ad(b) \cdot W) = B_2(X, W)$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$ et ceci entraîne que $ad(b) \cdot W = W$.

Supposons maintenant que la composante connexe de l'unité B_0 de B soit compacte. Soit T la fermeture du groupe à un paramètre w engendré par W. Puisque $w \subset B_0$ et B_0 est compact, T est un tore de S. Il résulte de ce que nous avons déjà démontré et de la définition de T que B_0 est la composante connexe de l'unité du centralisateur $C(T)$ de T dans S. Puisque S est semi-simple et la composante connexe de l'unité B_0 de $C(T)$ est compacte, $C(T)$ est connexe[4] et donc égal à B_0. Soit maintenant b un élément de B. Comme nous l'avons déjà montré, on a la relation $ad(b) \cdot W = W$ et ceci entraîne que b appartient au centralisateur de T dans G. D'autre part on peut écrire b sous la

4) Voir [1].

forme $b = c \cdot s$, où $c \in C$ et $s \in S$. C étant le centre connexe de G, $c^{-1} \cdot b = s$ appartient au centralisateur de T dans S, c'est-à-dire à B_0. Alors $c = bs^{-1}$ appartient à B et puisque B ne contient pas de sous-groupe invariant $\neq (e)$ de G, c est égal à l'unité. Il en résulte que $b = s$, donc que $b \in B_0$. B est ainsi connexe. Le centre discret Z de S est un sous-groupe invariant de G et contenu dans B. Z se réduit alors à (e). Il en résulte que $C \cap S = (e)$ et donc que $G = C \times S$. Il est clair alors que C est égale au centre de G. Le théorème 1 est donc démontré.

2. Soient V_1 et V_2 deux variétés kählériennes. La variété $V = V_1 \times V_2$ se munit d'une structure kählérienne canoniquement définie par celles de V_1 et V_2. Nous dirons que la variété kählérienne V est *produit kählérien* de V_1 et V_2.

THÉORÈME 2. *Soit G/B un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie réductf G et soit G effectif sur G/B. Alors B est compact, connexe et égal au centralisateur dans S d'un tore de S, S étant la partie semi-simple de G. De plus le centre C de G et l'espace homogène S/B se munissent de structures kählériennes homogènes et G/B s'identifie avec le produit kählérien de C et S/B.*

Pour démontrer le théorème 2 on utilisera les lemmes suivants.

LEMME 1. *Les notations étant celles du théorème 2, l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de B contient une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de S.*

Désignons par $\tilde{B}$ le groupe linéaire d'isotropie de G/B au point o.[5] Puisque les opérations de B sur G/B sont des isométries de la variété kählérienne G/B, $\tilde{B}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ et l'homomorphisme canonique de B sur $\tilde{B}$ est un isomorphisme. Il en résulte que la composante connexe de l'unite B_0 de B est produit direct d'un groupe compact par un groupe vectoriel. Alors le groupe linéaire $ad_{\mathfrak{b}}(B_0)$ est compact, où $x \to ad_{\mathfrak{b}}(x)$ désigne la représentation adjointe de B_0. Soit $X \to ad_{\mathfrak{b}}(X)$ la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$. Puisque $ad_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b})$ est l'algèbre de Lie du groupe linéaire compact $ad_{\mathfrak{b}}(B_0)$, les valeurs propres de $ad_{\mathfrak{b}}(X)$ sont imaginaires pures. Il en résulte que $Tr\ ad_{\mathfrak{b}}(X)^2 \leqq 0$.

D'autre part, d'après le théorème 1, $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{s}$ et donc l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ est somme directe de deux sous-espaces $\mathfrak{c} + \mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$ et

---

[5] o est l'image de $e \in G$ dans G/B.

chacun de ces sous-espaces est stable par $\tilde{B}$. Désignons par $\hat{B}$ le groupe linéaire de l'espace vectoriel $\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$ induit par $\tilde{B}$. $\hat{B}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de $\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}$, toute opération de $\tilde{B}$ induit l'application identique de $\mathfrak{c}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$. Il en résulte que l'homomorphisme canonique de B sur $\hat{B}$ est un isomorphisme. Soit maintenant $X \to ad_{\mathfrak{s}}(X)$, $X \in \mathfrak{b}$, la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{s}$. Puisque $\mathfrak{b}$ est stable par les $ad_{\mathfrak{s}}(X)$, $ad_{\mathfrak{s}}(X)$ définit un endomorphisme $\varepsilon(X)$ de $\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$ tel que $\varepsilon(X)(Y \bmod \mathfrak{b}) = ad_{\mathfrak{s}}(X)\cdot Y \bmod \mathfrak{b}$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$. Il est clair que les $\varepsilon(X)$, $X \in \mathfrak{b}$, forment l'algèbre de Lie de $\hat{B}$. Puisque $\hat{B}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal, les endomorphismes $\varepsilon(X)$ sont semi-simples et leurs valeurs propres sont imaginaires pures. D'autre part, la représentation $X \to \varepsilon(X)$ de $\mathfrak{b}$ est fidèle, car $B \cong \hat{B}$. Il résulte de ce que nous avons démontrè que $T_r\,\varepsilon(X)^2 < 0$ pour tout élément $X \neq 0$ de $\mathfrak{b}$. Soit maintenant B_2 la forme de Killing de $\mathfrak{s}$. On voit facilement que $B_2(X, X) = T_r\,ad_{\mathfrak{s}}(X)^2 = T_r\,\varepsilon(X)^2 + T_r\,ad_{\mathfrak{b}}(X)^2$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. Puisque $T_r\,ad_{\mathfrak{b}}(X)^2 \leqq 0$ et $T_r\,\varepsilon(X)^2 < 0$ pour $X \neq 0$, on a $B_2(X, X) < 0$ pour tout élément $X \neq 0$ de $\mathfrak{b}$. Soit maintenat $\mathfrak{m}$ le sous-espace de $\mathfrak{s}$ constitué de tous les éléments X de $\mathfrak{s}$ tels que $B_2(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{b}$. $\mathfrak{m}$ est stable par les $ad_{\mathfrak{s}}(X)$, $X \in \mathfrak{b}$. Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$, on a $B_2(X, X) = 0$ et donc $X = 0$, d'où $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{b} = (0)$. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}$ (somme directe). Alors $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{s}/\mathfrak{b}$ comme $\mathfrak{b}$-module et donc l'endomorphisme de $\mathfrak{m}$ induit par $ad_{\mathfrak{s}}(X)$, $X \in \mathfrak{b}$, s'identifie avec $\varepsilon(X)$. Soit maintenant W un élément de $\mathfrak{b}$ vérifiant les conditions énoncées dans le théorème 1. Puisque $\mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}$ et $ad_{\mathfrak{s}}W \cdot \mathfrak{b} = 0$ et que $\varepsilon(W)$ est semi-simple, on voit que $ad_{\mathfrak{s}}W$ est semi-simple. Il existe alors une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{s}$ contenant W.[6] Puisque $\mathfrak{s}$ est semi-simple, $\mathfrak{h}$ est abélienne et par suite $[W, \mathfrak{h}] = (0)$, d'où $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$. Le lemme 1 est donc démontré.

LEMME 2. *Les notations étant celles du théorème 2, la composante connexe de l'unité B_0 de B est compacte.*

Pour démontrer ce lemme nous utiliserons les notations dans la démonstration du lemme 1. B_0 est produit direct d'un groupe compact par un groupe vectoriel V et, d'après le lemme 1, B_0 contient un sous-groupe de Cartan H de S.

Puisque V est dans le centre de B_0, V est contenu dans H. Nous allons montrer que l'image $\hat{H}$ de H dans $\hat{B}_0$ est compact. Soit $\mathfrak{h}$ l'algebre de Lie de

---

[6] Voir [2].

H. La complexifiée $\mathfrak{h}^C$ de $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}^C$, $\mathfrak{s}^C$ étant la complexifiée de $\mathfrak{s}$. Désignons par Σ l'ensemble des racines α de $\mathfrak{s}^C$ par rapport à $\mathfrak{h}^C$ telles que l'élément E_α de $\mathfrak{s}^C$ vérifiant la condition $[X, E_\alpha] = \alpha(X)\cdot E_\alpha$ pour tout $X \in \mathfrak{h}^C$ n'appartienne pas à $\mathfrak{b}^C$. On voit alors que les images des E_α, $\alpha \in \Sigma$, dans $\mathfrak{s}^C/\mathfrak{b}^C$ forment une base de $\mathfrak{s}^C/\mathfrak{b}^C$. Puisque $\hat{H}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de $\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$, $\alpha(X)$ est imaginaire pure quels que soient $\alpha \in \Sigma$ et $X \in \mathfrak{h}$. Soit maintenant X un élément de $\mathfrak{h}^C$ tel que $\alpha(X)$ soit imaginaire pure pour toute $\alpha \in \Sigma$. X s'écrit $X = X_1 + \sqrt{-1}\cdot X_2$, où X_1, $X_2 \in \mathfrak{h}$. Puisque les valeurs $\alpha(X_1)$, $\alpha(X_2)$ et $\alpha(X)$ sont imaginaires pures pour toute $\alpha \in \Sigma$, on voit que $\alpha(X_2) = 0$ pour toute $\alpha \in \Sigma$. Il en résulte que $X_2 = 0$, puisque la représantation $H \to \hat{H}$ de H est fidèle. On a donc démontré qu'un élément X de $\mathfrak{h}^C$ appartient à $\mathfrak{h}$ si et seulement si $\alpha(X)$ est imaginaire pure pour toute $\alpha \in \Sigma$. D'autre part on sait qu'il existe une base $(X_1, \ldots, X_l)$ de $\mathfrak{h}^C$ telle que $\alpha(X_k)$ soient rationnels pour toute racine α. Alors $(\sqrt{-1}\cdot X_1, \ldots, \sqrt{-1}\cdot X_l)$ est une base de $\mathfrak{h}$. On voit facilement que les images dans $\hat{H}$ des groupes à un paramètre de H engendrés par $\sqrt{-1}\cdot X_k$ sont compacts. Il en résulte immédiatement que $\hat{H}$ est compact. Puisque $H \cong \hat{H}$, H est aussi compact. Le sous-groupe fermé V de H qui est vectoriel se réduit donc à (e). Ceci entraîne que B_0 est compact.

LEMME 3. *Soit I l'opérateur d'une structure complexe invariante d'un espace homogène G/B d'un groupe de Lie connexe G et soit I_o la valeur de I au point o.*[5] *Il existe alors un endomorphisme J de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions suivantes.*

1) $\pi\cdot J = I_o\cdot\pi$, *π étant la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.*

2) $J\cdot\mathfrak{b} = (0)$.

3) $J^2\cdot X \equiv -X (\mathit{mod}\ \mathfrak{b})$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$.

4) $J(ad(b)\cdot X) \equiv ad(b)(JX) (\mathit{mod}\ \mathfrak{b})$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *et* $b \in B$.

5) $[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \in \mathfrak{b}$.

quels que soient X, $Y \in \mathfrak{g}$.

Réciproquement, soit J un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions 2), 3), 4), 5). Il existe alors une structure complexe invariante I de G/B et une seule qui vérifie la condition 1).

Pour la démonstration voir [5].

Nous allons démontrer maintenant le théorème 2. Il résulte du théorème 1 et du lemme 2 la première partie du théorème. Nous démontrerons dans la suite que les sous-variétés CB/B et S/B se munissent des structures kählériennes invariantes par les opérations des groupes CB et S respectivement et que G/B est produit kählérien de ces deux variétés kählériennes.

Soient g la métrique kählérienne invariante et I la structure complexe invariante de G/B. La forme de Kähler K associée à g vérifie la relation $K(X, Y) = g(IX, Y)$ quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur G/B. La forme K définit une structure homogène symplectique de G/B. Soit J un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ associé à I dans le lemme 3. Nous utiliserons les notations dans la démonstration du théorème 1. Montrons d'abord que $J\cdot\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c}+\mathfrak{b}$. Soient, en effet, $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{b}$. Alors $J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY] - J[JX, JY] = -[JX, Y] \in \mathfrak{b}$. Posons $JX = X_1 + X_2$, où $X_1 \in \mathfrak{c}$ et $X_2 \in \mathfrak{s}$. Alors $[JX, Y] = [X_2, Y] \in \mathfrak{b}$ pour tout $Y \in \mathfrak{b}$. X_2 appartient donc au normalisateur $\mathfrak{n}(\mathfrak{b})$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{s}$. Puisque $\mathfrak{b}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ par le lemme 1, $\mathfrak{n}(\mathfrak{b})$ est égal à $\mathfrak{b}$. Il en resulte que $X_2 \in \mathfrak{b}$ et donc que $JX \in \mathfrak{c}+\mathfrak{b}$, d'où $J\cdot\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c} + \mathfrak{b}$. Montrons maintenant que

$$g(\pi\cdot X, \pi\cdot Y) = 0 \tag{4}$$

pour tout $X \in \mathfrak{c}$ et tout $Y \in \mathfrak{s}$. En effet, $g(\pi X, \pi Y) = -K(\pi JX, \pi Y) = F(Y, JX) = F_1(\rho_1\cdot Y, \rho_1\cdot JX) + B_2([\rho_2\cdot Y, \rho_2\cdot JX], W)$. Puisque $Y \in \mathfrak{s}$ et $JX \in \mathfrak{c}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{s}$, on a $\rho_1\cdot Y = 0$ et $\rho_2\cdot JX \in \mathfrak{b}$. Il en résult que $F_1(\rho_1\cdot Y, \rho_1\cdot JX) = B_2([\rho_2\cdot Y, \rho_2\cdot JX], W) = 0$ et par suite $g(\pi\cdot X, \pi\cdot Y) = 0$. Nous allons montrer maintenant que $\mathfrak{s}$ est stable par J. Soient, en effet, $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{s}$. Alors $g(\pi\cdot X, \pi\cdot JY) = g(\pi\cdot X, I_0\cdot\pi Y) = -g(I_0\cdot\pi\cdot X, \pi\cdot Y) = -g(\pi\cdot JX, \pi\cdot Y)$. Puisque $JX \in \mathfrak{c}+\mathfrak{b}$, on a $\pi\cdot JX \in \pi\cdot\mathfrak{c}$. Il résulte alors de (4) que $g(\pi\cdot JX, \pi\cdot Y) = 0$ et par suite $g(\pi\cdot X, \pi\cdot JY) = 0$. Il résulte de là et de (4) que $JY \in \mathfrak{s}$. $\mathfrak{s}$ est donc stable par J. Les restrictions de J aux sous-algèbres $\mathfrak{c}+\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ définissent alors des structures complexes invariantes sur les espaces homogènes CB/B et S/B. Il est clair que les restrictions de la métrique kählérienne g de G/B à ces sous-variétés induissent des métriques kählériennes invariantes. Donc les espaces homogènes CB/B et S/B se munissent de structures homogènes kählériennes. D'autre part, comme nous l'avons déjà démontré, B est compact connexe et donc $G = C \times S$ par le théorème 1. Alors $G/B = (CB/B) \times (S/B)$ comme une variété différentiable. Il résulte immédiatement de ce que nous avons déjà démontré que G/B est produit kählérien de CB/B et S/B. D'autre part, puisque

$C \cap B = (e)$, on a $CB/B \approx C$ et la structure homogène kählérienne de CB/B induit celle de C. Le théorème 2 est donc démontré.

THÉORÈME 3. *Tout espace homogène kählérien compact est produit kählérien d'un tore complexe et d'un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie compact semi-simple.*

Soit V un espace homogène kählérien compact. Désignons par $I(V)$ (resp. par $K(V)$) le plus grand groupe connexe d'isométries (resp. le plus grand groupe connexe d'automorphismes) de la variété kählérienne V. On voit facilement que $K(V)$ est un sous-groupe fermé de $I(V)$. V étant compact, le groupe $I(V)$ est compact et par suite $K(V)$ est aussi compact. La variété V est un espace homogène kählérien de $K(V)$. Le théorème 3 est une conséquence immédiate du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, Kaehlerian coset spaces of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci., **40** (1954), 1147-1151.
[2] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, t. 3.
[3] M. Goto, Algebraic homogeneous spaces, Amer. Journ. of Math., **76** (1954), 811-818.
[4] J. L. Koszul, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), 65-127.
[5] J. L. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, Canadian Journ. of Math., **7** (1955), 562-576.
[6] A. Lichnerowicz, Espaces homogènes Kahlériens, Coll. Géom. Diff. Strasbourg (1953).

Université de Nagoya