N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 49 (1973), 91–100

LE NOMBRE DE COMBINAISONS LINEAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA ET SES APPLICATIONS

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ et $X = \{F\}$ un ensemble de combinaisons des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, combien de combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna y-a-t-il dans X? On sait que 1) il y en a une infinité dénombrable au plus en général ([5]) et 2) si l'ordre inférieur de f est égal à zéro, il y en a n au plus ([4]).

Dans ce mémoire, on considère sur ce problème du point de vue différente; c'est-à-dire, on donne un exemple de f tel que X admet des combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna dénombrablement infini et démontre que s'il y a $n+1$ combinaisons $F_i (i = 0, \cdots, n)$ telles que $\delta(F_i) = 1$ dans X, X admet au plus $n + \lambda + 1$ combinaisons exceptionnelles aus sens de Nevanlinna y compris $F_0, \cdots, F_n$ où λ est le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes. De plus, on considère sur une généralisation d'un théorème de Niino et Ozawa (Th. 3 [3]) et, en appliquant le résultat ci-dessus, on démontre quelques cas particuliers.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes ([2]) librement.

2. Préliminaires. Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et $\lim_{r\to\infty} T(r, f)/\log r = \infty$, où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan ([1]), et α un nombre admissible pour f (voir [7]). On dit qu'une combinaison linéaire, homogène à coefficients constants:

Received May 24, 1972.

$$F = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \ (\not\equiv 0)$$

est

1) lacunaire si F n'admet pas de zéro dans $|z| < \infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si F n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z| < \infty$ au plus;

3) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de f ;

4) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) \equiv 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 \ ;$$

5) exceptionnelle au sens de α-Nevanlinna si

$$\delta_\alpha(F) \equiv 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r, 0, F)}{T_\alpha(r, f)} > 0 \ .$$

On note que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\begin{matrix} \nearrow 3) \\ \searrow 4) \end{matrix}$ $\nearrow$ 5) et 3) $\Longrightarrow$ 5) pour un nombre α suffisamment grand ([7]).

Soit

$$C_\alpha(f) = \{a(z)\,;\ \text{méromorphe dans } |z| < \infty \quad \text{et} \quad T_\alpha(r, a) = o(T_\alpha(r, f)) \quad \text{quand} \quad r \to \infty\}\ ,$$

où $T_\alpha(r, f) = \int_1^r \frac{T(r, f)}{t^{1+\alpha}}\, dt$ etc. (voir [7]).

LEMME 1. *Soient X et λ comme dans l'introduction, alors, quand $\lambda = 0$, on a*

$$\sum_{F\in X} \delta_\alpha(F) \leqq n + 1$$

(voir [1], [7]).

LEMME 2. *Soient $g_0, \cdots, g_\nu, c_0, \cdots, c_\nu (\nu \geqq 1)$ des fonctions méromorphes dans $|z| < \infty$ telles que*

1) *pour $i \neq j$ quelconque*

$$0 < \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, g_i/g_j)}{T_\alpha(r, f)} < \infty \ ;$$

2) *pour tout* i,

$$N_\alpha(r, 0, g_i) = o(T_\alpha(r, f)) \quad et \quad N_\alpha(r, g_i) = o(T_\alpha(r, f))$$

et

3) *toutes les fonctions* $c_i (i = 0, \cdots, \nu)$ *appartiennent à* $C_\alpha(f)$.

Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0 ,$$

on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0$$

(Lemme 5 [7]).

3. Nombre de combinaisons exceptionnelles. D'abord, on donne le

THÉORÈME 1. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système dans* $|z| < \infty$ *d'order non zéro,* $X = \{F\}$ *un ensemble de combinaisons linéaires homogènes des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *à coefficients constants et linéairement indépendantes* $n + 1$ *à* $n + 1$ *et* α *un nombre admissible pour* f *quelconque. S'il y a* $n + 1$ *combinaisons* F_i *dans* X *telles que* $\delta_\alpha(F_i) = 1 (i = 0, \cdots, n)$, *alors le nombre* $\nu(f)$ *des combinaisons exceptionnelle au sens de* α*-Nevanlinna dans* X *est au plus égal à* $n + \lambda + 1$; *où* λ *est le nombre maximum de relations linéaires homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$.

Démonstration. Quand $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver d'après le lemme 1. Donc, on démontre ce théorème quand $\lambda > 0$. Or, on peut supposer que $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ sont linéairement indépendantes et toutes les autres combinaisons dans X sont représentées par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ à coefficients constants. Soient λ_α le nombre maximum de relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients méromorphes contenus dans $C_\alpha(f)$ et $G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}$ une base de $\{F_i\}_{i=0}^{n}$ sur $C_\alpha(f)$. Alors, on peut supposer que $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\} \subset \{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$. Représentons $F_{n+1-\lambda}, \cdots, F_n$ par $\{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$ et $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\}$. Alors, d'après le lemme 2, pour tout j $(j = 0, \cdots, n)$, il existe un et un seul k_j tel que $F_j / G_{k_j} \in C_\alpha(f)$ comme dans [2, p. 113]. On dit que F_j appartient à la classe $[k_j]$. Cela veut dire que quand on représente F_j par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$, tous les coefficients sauf cels de combinaisons à la classe $[k_j]$ sont égals à zéro.

Soit α_j le nombre de combinaisons dans $\{F_j\}_{j=n+1-\lambda}^{n}$ appartenant à la classe $[j]$ $(j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha)$. Alors,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-\lambda_\alpha} = \lambda .$$

D'autre part, soit $F \in X$ telle que $\delta_\alpha(F) > 0$, et

$$F = a_0 F_0 + \cdots + a_{n-\lambda} F_{n-\lambda} . \tag{1}$$

Alors, il existe au moins une classe (soit $[j_0]$) dans les classes $[0], \cdots,$ $[n - \lambda_\alpha]$ telle que tous les coefficients des éléments appartenant à la classe $[j_0]$ sont égals à zéro à (1).

En effet, d'abord on note que

i) $\lim_{r\to\infty} T_\alpha(r, f)/T_\alpha(r, \tilde{F}) = 1$

ii) $\lim_{r\to\infty} T_\alpha(r, \tilde{F})/T_\alpha(r, G) = 1$

où $\tilde{F} = (F_0, \cdots, F_n)$ et $G = (G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha})$.

Comme i) est visible des définitions de $T(r, f)$ et $T_\alpha(r, f)$, on démontre ii). La relation $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\} \subset \{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$ entraîne que

$$T_\alpha(r, G) \leqq T_\alpha(r, \tilde{F})$$

D'autre part, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \max_{0\leqq j\leqq n} \log|F_j| &= \max_{0\leqq j\leqq n} \left(\log|G_{k_j}| + \log\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right|\right) \\ &\leqq \max_{0\leqq j\leqq n} \left(\log|G_{k_j}| + \log^+\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right|\right) \\ &\leqq \max_{0\leqq j\leqq n} (\log|G_{k_j}|) + \sum_{j=0}^{n} \log^+\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right| \end{aligned}$$

donne l'inégalite

$$T(r, \tilde{F}) \leqq T(r, G) + \sum_{j=0}^{n} m(r, F_j/G_{k_j}) + O(1) ;$$

donc on a

$$T_\alpha(r, \tilde{F}) \leqq T_\alpha(r, G) + \sum_{j=0}^{n} T_\alpha(r, F_j/G_{k_j}) + O(1) .$$

Cela veut dire que

$$1 \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, G)}{T_\alpha(r, \tilde{F})}$$

parce que $F_j/G_{k_j} \in C_\alpha(f)$. On a ii).

Or, s'il existe au moins un coefficient $a_{\nu_j} \neq 0$ tel que $F_{\nu_j}/G_j \in C_\alpha(f)$ pour tout $j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha$ à (1), soient $l(j)$ le nombre des coefficients $a_{\nu_j} \neq 0$ tels que F_{ν_j}/G_j appartient à $C_\alpha(f)$ et

$$l = l(0) + l(1) + \cdots + l(n - \lambda_\alpha) \ (\leqq n + 1 - \lambda) ,$$

alors, comme $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ sont linéairement indépendantes, du lemme 1 et utilisant ii), on a

$$\delta_\alpha(F) + \sum_{a_j \neq 0} \delta_\alpha(F_j) \leqq l .$$

Par conséquent, on a

$$\delta_\alpha(F) = 0 ,$$

qui est contraire à l'hypothèse: $\delta_\alpha(F) > 0$. Cela veut dire qu'au moins une classe (soit $[j_0]$) telle que tous les coefficients a_j où $F_j/G_{j_0} \in C_\alpha(f)$ sont égals à zéro à (1).

S'il existe $\mu(> \lambda)$ combinaisons $H_1, \cdots, H_\mu$ dans X différentes de $\{F_i\}_{i=0}^n$ telles que $\delta_\alpha(H_i) > 0$ $(i = 1, \cdots, \mu)$, d'après ce qui est donné maintenant, pour chaque i, si l'on représente H_i par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$, il existe au moins une classe $[k_i]$, $0 \leqq k_i \leqq n - \lambda_\alpha$, telle que tous les coefficients de F_j appartenant à la classe $[k_i]$ sont égals à zéro. Soit β_j $(j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha)$ le nombre de combinaisons dans $\{H_i\}_{i=1}^\mu$ telles que tous les coefficients de F_{ν_j} où $F_{\nu_j}/G_j \in C_\alpha(f)$ sont égals à zéro. Alors,

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{n-\lambda_\alpha} \geqq \mu .$$

Comme $\mu > \lambda$, il existe au moins un j_0 tel que $\beta_{j_0} > \alpha_{j_0} (0 \leqq j_0 \leqq n - \lambda_\alpha)$. Alors, $\lambda - \alpha_{j_0} + \beta_{j_0} (\geqq \lambda + 1)$ combinaisons dans $\{F_{n+1-\lambda}, \cdots, F_n, H_1, \cdots, H_\mu\}$ admet le zéro comme coefficient d'une combinaison dans $\{F_i\}_{i=0}^{n-\lambda}$ appartenant à la classe $[j_0]$ quand on répresente par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$. Soient $I_0, \cdots, I_\lambda$ $\lambda + 1$ telles combinaisons, alors elles sont représentées par $\{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\} - \{G_{j_0}\}$. Cela veut dire qu'il existe $\lambda + 1$ relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre $n + 1$ combinaisons $\{I_0, \cdots, I_\lambda, F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\} - \{G_{j_0}\}$, qui est absurde. Cela veut dire qu'il faut

$$\mu \leqq \lambda .$$

On a le résultat.

COROLLAIRE. *Le nombre de combinaisons F dans X qui sont exceptionnelles au sens de Borel ou $\delta(F) = 1$ est au plus égal à $n + \lambda + 1$* (*N.B.* 4 [7]).

On obtient ce corollaire du théorème 1 en utilisant la note donnée dans §2.

N.B. 1. Si le nombre de combinaisons F dans X telles que $\delta_a(F) = 1$ est au plus égal à n, le théorème 1 n'est plus vrai. Par exemple, soient $f(z)$ une fonction entière qui admet une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna, $f_0(z) = f_1(z) = \cdots = f_{n-1}(z) = f(z)$, $f_n(z) = 1$ et

$$X = \{w^n f(z) + w^{n-1} f(z) + \cdots + w f(z) + 1 ; \ w \neq \infty\} \cup \{f(z)\} .$$

Alors, il y a n combinaisons lacunaires et une infinité dénombrable de combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna dans X.

N.B. 2. On peut donner quelques généralisations de ce théorème. Par exemple, quand les coefficients des combinaisons dans X sont des fonctions rationnelles, on a $\nu(f) \leqq n + \lambda_p + 1$; où λ_p est le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$.

4. Théorème de Niino-Ozawa. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde entière transcendante à trois branches. Alors, Niino et Ozawa ([3]) ont démontré le

THÉORÈME A. *Si $f(z)$ admet cinq valeurs finies et distinctes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 telles que*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta(a_i, f) + \delta(b_j, f) > 3 \qquad (j = 1, 2) ,$$

alors, au moins deux valeurs entre les a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 sont exceptionnelles au sens de Picard.

Dans ce paragraphe, on considère sur une généralisation de ce théorème. D'abord, on donne le

LEMME 3. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans $|z| < \infty, F_0, \cdots, F_n, G_1, \cdots, G_{n-1}$ $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$ telles que*

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_\alpha(F_i) + \delta_\alpha(G_j) > n + 1 \qquad (j = 1, \cdots, n-1) \tag{2}$$

et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Si $\lambda \geqq n-2$, alors $\lambda = n-1$ nécessairement.

Démonstration. Supposons que $\lambda = n-2$. Alors, on peut supposer que $F_0, \cdots, F_n$, $G_1, \cdots, G_{n-1}$ sont representées par F_0, F_1 et F_2:

$$F_i = \alpha_{0i}F_0 + \alpha_{1i}F_1 + \alpha_{2i}F_2 \quad (i = 3, \cdots, n)$$

$$G_j = \beta_{0j}F_0 + \beta_{1j}F_1 + \beta_{2j}F_2 \quad (j = 1, \cdots, n-1)\ .$$

D'après le lemme 1 et en utilisant que F_0, F_1 et F_2 sont linéairement indépendantes, (2) entraîne que pour tout i et j au moins un des α_{0i}, α_{1i}, α_{2i} et au moins un des $\beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}$ soient égals à zéro. D'autre part, "$\lambda = n-2$" entraîne qu'il y ait un i et un j tels que deux des α_{0i}, α_{1i}, α_{2i} et deux des $\beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}$ sont différents de zéro et de plus $|\alpha_{ki}| + |\beta_{kj}| \neq 0\,(k = 0, 1, 2)$. Par exemple, soient $\alpha_{0i} \neq 0$, $\alpha_{1i} \neq 0$, $\beta_{1j} \neq 0$, $\beta_{2j} \neq 0$, c'est-à-dire,

$$F_i = \alpha_{0i}F_0 + \alpha_{1i}F_1 + 0 \tag{3}$$

$$G_j = 0 + \beta_{1j}F_1 + \beta_{2j}F_2\ . \tag{4}$$

En éliminant F_1 de (3) et (4), on a

$$F_i = \alpha_{0i}F_0 + (\alpha_{1i}/\beta_{1j})G_j - (\alpha_{1i}\beta_{2j}/\beta_{1j})F_2\ .$$

Ici, F_0, G_j et F_2 sont linéairement indépendantes et leurs coefficients sont différents de zéro. Donc, du lemme 1, on a

$$\delta_\alpha(F_0) + \delta_\alpha(G_j) + \delta_\alpha(F_2) + \delta_\alpha(F_i) \leqq 3\ .$$

D'autre part, de (2), on a

$$\delta_\alpha(F_0) + \delta_\alpha(G_j) + \delta_\alpha(F_2) + \delta_\alpha(F_i) > 3\ ,$$

qui est absurde. Cela veut dire que $\lambda \geqq n-1$. Maintenant, f est transcendant, par conséquent $\lambda \leqq n-1$. C'est-à-dire, $\lambda = n-1$.

THÉORÈME 2. *Soient $f, F_0, \cdots, F_n$, $G_1, \cdots, G_{n-1}$ et λ comme dans le lemme 3. Si $\lambda \geqq n-2$ et $\delta_\alpha(F_0) = 1$, alors, ou bien*

1) *il y a $n-1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ (soient $F_1, \cdots, F_{n-1}$) telles que*

$$F_i = a_i F_0 \quad (i = 1, \cdots, n-1, a_i \neq 0, \text{ constante})$$

et

$$G_j = b_j F_n \quad (j = 1, \cdots, n-1, b_j \neq 0, \text{ constante}),$$

(*par conséquent*

$$\delta_\alpha(F_i) = 1 \ (i = 1, \cdots, n-1) \quad et \quad \delta_\alpha(F_n) = \delta_\alpha(G_j) > \frac{1}{2}\,(j = 1, \cdots, n-1));$$

ou bien

2) $$F_i = \alpha_i F_n \ (i = 1, \cdots, n-1, \alpha_i \neq 0, \text{ constante}),$$

et

$$G_j = \beta_j F_0 \ (j = 1, \cdots, n-1, \beta_j \neq 0, \text{ constante}),$$

$\Big($*par conséquent*

$$\delta_\alpha(G_j) = 1 \ (j = 1, \cdots, n-1) \quad et \quad \delta_\alpha(F_1) = \cdots = \delta(F_n) > 1 - \frac{1}{n}\Big).$$

Démonstration. En utilisant le lemme 3, l'hypothèse "$\lambda \geqq n-2$" entraîne que $\lambda = n-1$. Par conséquent, on peut supposer que F_i et G_j sont représentées par f_0 et f_1:

$$F_i = x_i f_0 - y_i f_1 \ (i = 0, \cdots, n)$$

$$G_j = x_{n+j} f_0 - y_{n+j} f_1 \ (j = 1, \cdots, n-1)$$

Brièvement, on écrit $G_j = F_{n+j}$ $(j = 1, \cdots, n-1)$.

Soient $x_i/y_i = z_i$ $(i = 0, \cdots, 2n-1)$ et $f_1/f_0 = g$ où $z_i = \infty$ si $y_i = 0$. Alors, g est transcendante,

(5) $$\delta_\alpha(F_i) = \delta_\alpha(z_i, g) \ (i = 0, \cdots, 2n-1)$$

et $z_i = z_j$ $(i \neq j)$ signifie que $F_i/F_j =$ constante.

Or, on introduit une relation "$\sim$" entre $F_0, \cdots, F_{2n-1}$: $F_i \sim F_j$ si et seulement si $F_i/F_j =$ constante. C'est une relation équivalente dans $\{F_i\}_{i=0}^{2n-1}$. On classifie $\{F_i\}_{i=0}^{2n-1}$ par cette relation. Soient $X_p (p = 1, \cdots, c)$ toutes les classes obtenues. On démontre que $c = 2$ et chaque classe comprend n éléments. Soit X_1 la classe comprenant F_0. En utilisant (5), (2) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_\alpha(z_i, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > n + 1 \quad (j = 1, \cdots, n-1) \tag{6}$$

En appliquant la proposition 4 ([6]), pour chaque j, il y a au moins un $i(j)$ tel que $z_0 = z_{i(j)}$.

Quand $z_0 = z_{n+j} (j \geqq 1)$, on peut démontrer facilement que $z_0 = z_{n+1} = \cdots = z_{2n}$ et $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$; c'est-à-dire, $c = 2$ et $X_1 = \{F_0, G_1, \cdots, G_{n-1}\}$, $X_2 = \{F_1, \cdots, F_n\}$.

Quand $z_0 \neq z_{n+j} (j = 1, \cdots, n-1)$, il y a $n-1$ valeurs dans $\{z_i\}_{i=1}^n$ qui sont égales à z_0 (soient $z_1, \cdots, z_{n-1}$) et $z_n = z_{n+1} = \cdots = z_{2n-1}$. En effet, s'il n'y a que $p(\leqq n-2)$ valeurs dans $\{z_i\}_{i=1}^n$ qui sont égales à z_0 (soient $z_1, \cdots, z_p$), $F_{p+1}, \cdots, F_{2n-1}$ ne sont pas contenues dans une classe. En effet, si le contraire est vrai, $T(r, f) = O(1)$ parce que $2n - 1 - p \geqq n + 1$. C'est une contradiction à l'hypothèse. Par conséquent, il y a un $j (1 \leqq j \leqq n-1)$ tel que $F_{p+1}, \cdots, F_n$, F_{n+j} ne sont pas contenues dans une classe. De (6), on a

$$\delta_\alpha(z_{p+1}, g) + \cdots + \delta_\alpha(z_n, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > n - p . \tag{7}$$

Soient $\tilde{z}_i (i = 1, \cdots, l, l \geqq 2)$ les valeurs distinctes dans $\{z_{p+1}, \cdots, z_n, z_{n+j}\}$, alors, on a de (7)

$$\sum_{i=1}^{l} \delta_\alpha(\tilde{z}_i, g) > 1 . \tag{8}$$

D'autre part, $\tilde{z}_i \neq z_0 (i = 1, \cdots, l)$ et $\delta_\alpha(z_0, g) = 1$. Donc, de (8) on a

$$\delta_\alpha(z_0, g) + \sum_{i=1}^{l} \delta_\alpha(\tilde{z}_i, g) > 2 ,$$

qui est absurde. Cela veut dire que $p = n - 1$ parce que f est transcendant.

Par conséquent, on a de (6)

$$\delta_\alpha(z_0, g) + \delta_\alpha(z_n, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > 2 ,$$

ici, $z_0 \neq z_n$, $z_{n+j} (j = 1, \cdots, n-1)$. Cela veut dire qu'il faut que $z_n = z_{n+j} (j = 1, \cdots, n-1)$:

$$z_n = z_{n+1} = \cdots = z_{2n-1} .$$

Donc, on a $c = 2$ et $X_1 = \{F_0, \cdots, F_{n-1}\}$, $X_2 = \{F_n, G_1, \cdots, G_{n-1}\}$. On a le résultat.

COROLLAIRE 1. *Dans le théorème* 2, *si* $\delta_\alpha(F_0) = \cdots = \delta_\alpha(F_n) = 1$, *on a* $\lambda = n - 1$ *et la même conclusion.*

En effet, du théorème 1, on obtient que $\lambda = n - 1$ parce que $\delta_\alpha(F_i) = 1$ $(i = 0, \cdots, n)$ et $\delta_\alpha(G_j) > 0$ $(i = 1, \cdots, n - 1)$. Donc, on a le résultat tout de suite du théorème 2.

COROLLAIRE 2. *Quand* $n = 3$, *si* F_0 *est lacunaire* (*resp. exceptionnelle au sens de Picard, etc.*), *on peut conclure qu'il y a au moins deux combinaisons lacunaires* (*resp. exceptionnelles au sens de Picard, etc.*) *dans* $\{F_1, F_2, F_3, G_1, G_2\}$ *sans restriction que* $\lambda \geqq 1$.

En effet, d'après le lemme 1, (2) entraîne que $\lambda \geqq 1 = 3 - 2$. Donc, on a le résultat tout de suite du théorème 2.

N.B. Ce corollaire contient une amériolation du théorème A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fontions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5–31.
[2] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929.
[3] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function, Kôdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 98–113.
[4] N. Toda, Sur la croissance de fonctions algébroïdes à valeurs déficientes, Kôdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 324–337.
[5] N. Toda, Sur les combinaison exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 290–319.
[6] N. Toda, On a modified deficiency of meromorphic functions, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 635–658.
[7] N. Toda, Le défaut modifié de systèmes et ses applications, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 491–524.

Université de Nagoya