N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 47 (1972) 145-154

DIRECTION DE JULIA DE SYSTÈMES ET SOMME DE FONCTIONS NORMALES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Dans ce mémoire, on étend quelques résultats obtenus dans [10] au système et comme application, on considère sur la somme de fonctions normales.

Soient D un domaine dans le plan $|z| < \infty$, $g_0(z)$, $g_1(z), \cdots, g_n(z)$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions holomorphes dans D n'ayant pas de zéros communs à toutes et $g = (g_0, \cdots, g_n)$ un système de ces $n+1$ fonctions dans D. On dit qu'une combinaison linéaire à coefficients constants

$$a_0 g_0(z) + a_1 g_1(z) + \cdots + a_n g_n(z) \qquad (\not\equiv 0)$$

est

1) lacunaire dans D si elle n'admet pas de zéro dans D;

2) exceptionnelle au sens de Picard dans D si elle n'admet qu'un nombre fini de zéros dans D au plus.

Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique du système f définie par Cartan [1].

DÉFINITION 1 (Direction de Julia). On dit que $J: \arg z = \theta_J$ $(0 \leqq \theta_J < 2\pi)$ est une *direction de Julia* du système f s'il n'y a qu'au plus $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard dans $\Delta_\varepsilon(\theta_J) = \{z; |\arg z - \theta_J| < \varepsilon\}$, ε étant positif quelconque.

Received December 21, 1970.
Revised December 15, 1971.

Sur les fonctions exceptionnelles au sens de Julia que l'on utilise souvant, Ostrowski [7] et Lehto-Virtanen [5] étudient beaucoup de choses en détail.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([6], [8]) librement.

2. Systèmes à au moins une direction de Julia. Correspondant aux fonctions algébroïdes dans $|z| < \infty$ ([10]), on a le

THÉORÈME 1. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$. S'il y a au moins un rapport entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ n'étant pas exceptionnel au sens de Julia, le système f admet au moins une direction de Julia.*

On peut démontrer facilement ce théorème en modifiant un peu la démonstration du théorème 1 dans [10].

LEMME. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans le plan $|z| < \infty$ où $f_0, \cdots, f_n$ sont entières. Alors, pour tout $i \neq j$, on a*

$$T(r, f_i/f_j) - O(1) < T(r, f) < \sum_{k \neq j} T(r, f_k/f_j) + O(1)$$

où $f_j \not\equiv 0$ ([1], [9]).

COROLLAIRE 1. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ tel que*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty .$$

Alors, le système f admet au moins une direction de Julia.

En effet, d'après le lemme, il existe au moins un rapport f_i/f_j tel que

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f_i/f_j)}{(\log r)^2} = \infty .$$

Alors, grâce à un résultat dans [5], la fonction f_i/f_j n'est pas exceptionnelle au sens de Julia. Donc, en vertu du théorème 1, le système f admet au moins une direction de Julia.

COROLLAIRE 2. *Soit $f = (1, f_1, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans* *le plan* $|z| < \infty$. *Alors, le système* f *admet au moins une direction de Julia.*

En effet, d'après le lemme, il existe au moins une fonction f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ qui est transcendante. Par conséquent, la fonction $f_i = f_i/1$ n'est pas exceptionnelle au sens de Julia [7]. Donc, grâce au théorème 1, le système f admet au moins une direction de Julia.

THÉORÈME 2. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan* $|z| < \infty$ *à au moins une direction de Julia et* A *une* $(n+1, n+1)$*-matrice régulière à éléments constants. Mettons*

$$(F_0, \cdots, F_n)^t = A(f_0, \cdots, f_n)^t ,$$

alors, un nouveau système $F = (F_0, \cdots, F_n)$, *qui est transcendant dans le plan* $|z| < \infty$, *admet au moins une direction de Julia.*

En effet, soit $\arg z = \theta_f$ une direction de Julia de f. Alors, on peut prouver facilement qu'elle est aussi une direction de Julia de F.

N.B. 1. L'inverse du théorème 1 n'est pas valide en général. En effet, on peut donner facilement un exemple-contre en utilisant une fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ qui est exceptionnelle au sens de Julia, mais admet au moins une direction de Julia, qui est donnée par Zinno [12].

3. Systèmes sans direction de Julia. Dans ce paragraphe, on recherche sur le système qui n'admet pas de direction de Julia.

THÉORÈME 3. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan* $|z| < \infty$ *sans direction de Julia et*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \quad (\not\equiv 0) , \qquad G = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i \quad (\not\equiv 0)$$

deux combinaisons linéaires à coefficients constants. Alors, le rapport F/G *est exceptionnel au sens de Julia.*

Démonstration. Supposons que F/G ne soit pas constante. Alors au moins une valeur des $a_i b_j - a_j b_i$ $(i \neq j)$ n'est pas égale à zéro. On peut supposer que $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$ et $f_0 \not\equiv 0$, $f_1 \not\equiv 0$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots b_n \\ & & 1 \, . \quad 0 \\ & 0 & \quad \ddots \\ & & \quad\quad 1 \end{pmatrix},$$

alors $|A| = a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$ et

$$(F, G, f_2, \cdots, f_n)^t = A(f_0, f_1, \cdots, f_n)^t\ .$$

Par conséquent, d'après le théorème 2 le système $(F, G, f_2, \cdots, f_n)$ n'admet pas de direction de Julia. Cela veut dire que F/G est exceptionnelle au sens de Julia en vertu du théorème 1.

COROLLAIRE 3. *Soit f un système comme dans le théorème* 3. *Alors, le système f n'admet pas de combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants et exceptionnelles au sens de Picard, c'est-à-dire, chaque combinaison à coefficients constants*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \qquad (\not\equiv 0)$$

admet le zéro une infinité dénombrable de fois.

Démonstration. Par l'hypothèse, tous les rapports entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont exceptionnels au sens de Julia et d'après le lemme au moins un rapport est transcendant, de sorte que chaque fonction f_i est transcendante ou égale à zéro identiquement. Il y a au moins deux fonctions transcendantes et elles admettent le zéro une infinité dénombrable de fois. Soit F la combinaison donnée dans ce corollaire. Alors, d'après le théorème 3, les fonctions

$$F/f_i \qquad (i\,;\, a_i \neq 0, f_i \not\equiv 0)$$

sont exceptionnelles au sens de Julia, de sorte que F admet le zéro une infinité dénombrable de fois dans le plan $|z| < \infty$.

THÉORÈME 4. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ sans direction de Julia tel qu'une des fonctions $f_0, \cdots, f_n$ (soit f_0) est un produit canonique. Alors, chaque combinaison $(\not\equiv 0)$ linéaire des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients constants n'admet pas de valeurs asymptotiques finies en point à l'infini.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, l'inégalité (voir [1])

$$N(r, 0, f_0) \leqq T(r, f) + O(1)$$

entraîne que l'ordre de f_0 est zéro. De plus, grâce au lemme, pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a

$$T(r, f_i) \leqq T(r, f) + T(r, f_0) + O(1) ,$$

de sorte que toutes les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont d'ordre nul. Soit

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire à coefficients constants. Alors, F est transcendante d'après le corollaire 3. Si F admet une valeur asymptotique finie, il faut que l'ordre de F soit plus grand que $1/2$ d'après un resultat connu bien de Wiman. Mais, l'ordre de F est nul parce que $f_0, \cdots, f_n$ sont d'ordre nul. Cela veut dire que F n'admet pas de valeurs asymptotiques finies en point à l'infini.

DÉFINITION 2. Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ et

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire à coefficients constants. On dit que F est *exceptionnelle au sens de Valiron* si

$$\varDelta(F) = 1 - \liminf_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 .$$

THÉORÈME 5. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ sans direction de Julia et*

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire quelconque à coefficients constants. Alors, on a

$$\varDelta(F) = 0 .$$

Démonstration. On peut supposer que $a_0 f_0 \not\equiv 0$. D'après le théorème 3, F/f_0 es exceptionnelle au sens de Julia et F est transcendante. En appliquant un résultat d'Ostrowski [7] à F/f_0, il y a un nombre K_F indépendant de r tel que pour tout $r > 0$

$$|n(r, 0, F) - n(r, 0, f_0)| < K_F \ ,$$

par conséquent, on a

$$|N(r, 0, F) - N(r, 0, f_0)| < O(\log r) \ ,$$

de sorte que f étant transcendant

$$\Delta(F) = \Delta(f_0) \ . \tag{1}$$

Maintenant, considérons la fonction $w(z)$ définie par l'équation

$$f_0(z)w^n + f_1(z)w^{n-1} + \cdots + f_n(z) = 0 \ .$$

Alors, d'après un résultat de Valiron [11], on a

$$|T(r, w) - T(r, f)/n| < O(1)$$

et

$$N(r, w) = N(r, 0, f_0)/n \ .$$

Par conséquent, on a

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, w)}{T(r, w)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f_0)}{T(r, f)} \tag{2}$$

De plus, comme on a démontré dans [10], on peut donner dans notre cas

$$\Delta(\infty, w) = 0 \ .$$

En conséquence, de (1) et (2), on a

$$\Delta(F) = 0 \ .$$

COROLLAIRE 4.

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} = 0 \ .$$

N.B. 2. Ce théorème est une précision du corollaire 3.

4. Somme de fonctions normales. Soient h_1, h_2 deux fonctions exceptionnelles au sens de Julia. On ne sait pas si la somme de deux fonctions

$$h_1 + h_2$$

est exceptionnelle au sens de Julia en général. On donne ici une condition suffisante pour qu'une somme de fonctions exceptionnelle au sens de Julia le soit aussi.

Soient $g_1, \cdots, g_n$ $(n \geqq 2)$ n fonctions transcendantes, exceptionnelles au sens de Julia et g un produit canonique des pôles des fonctions $g_1, \cdots, g_n$. On met

$$f_0 = g, f_1 = gg_1, \cdots, f_n = gg_n .$$

Alors, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros commnus à toutes. Dans ce cas, on a le

THÉORÈME 6. *Si le système $f = (f_0, \cdots, f_n)$ n'admet pas de directions de Julia, alors*

i) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$, $(\alpha_i) \neq (0)$, *est exceptionnelle au sens de Julia,*
ii) *pour tout $i \neq j$, g_i/g_j est exceptionnelle au sens de Julia.*

Démonstration. Considérons la combinaison

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i .$$

Alors, d'après le théorème 3, F/f_0 est exceptionnelle au sens de Julia. Maintenant,

$$\frac{F}{f_0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i}{f_0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$$

et la fonction

$$\frac{F}{f_0} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$$

est exceptionnelle au sens de Julia.

Puis, en vertu du théorème 1, l'hypothèse entraîne que pour tout $i \neq j$

$$f_i/f_j = g_i/g_j$$

est exceptionnelle au sens de Julia.

5. Dans le cercle-unité. Dans ce paragraphe, on considère des analogues aux résultats donnés dans les paragraphes 2, 3 et 4 pour le système défini dans le cercle-unité.

Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans $|z| < 1$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont holomorphes sans zéros communs à toutes dans $|z| < 1$.

DÉFINITION 3. On dit que $J : \arg z = \theta_f$ est un *rayon de Julia* de f s'il n'y a qu'au plus $2n$ combinaisons des fonctions $f_0, \cdots, f_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard dans $\Delta_\varepsilon(\theta_f) \cap (|z| < 1)$, ε étant positif quelconque.

THÉORÈME 7. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans le cercle-unité tel qu'au moins un rapport entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ n'est pas normal. Alors, le système f admet au moins un rayon de Julia.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, on peut supposer que f_1/f_0 $(\not\equiv 0)$ n'est past normale. Alors, il y a une suite $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenue dans $|z| < 1$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} (1 - |z_k|)\rho(g(z_k)) = \infty$$

où $\rho(g(z))$ est la dérivée sphérique de $g(z)$ ([4]). Soient

$$z_k = r_k \exp(i\theta_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

et θ_0 un des points d'accumulation de l'ensemble $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Alors, on peut démontrer que $\arg z = \theta_0$ est un rayon de Julia de f comme dans le cas du plan.

THÉORÈME 8. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans le cercle-unité sans rayon de Julia et*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \quad (\not\equiv 0)\ , \qquad G = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i \quad (\not\equiv 0)$$

deux combinaisons linéaires à coefficients constants. Alors, la fonction F/G est normale dans $|z| < 1$.

En effet, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 3.

Soient g_1, g_2 deux fonctions normales dans le cercle-unité. On sait que la somme

$$g_1 + g_2$$

n'est pas normale nécessairement. Correspondant an cas du plan $|z| < \infty$, on donne ici une condition suffisante pour qu'une somme de fonctions normales le soit aussi.

Soient $g_1, \cdots, g_n$ ($n \geqq 2$) n fonctions normales, non-constantes dans le cercle-unité et g un produit canonique des pôles des $g_1, \cdots, g_n$. (S'il n'y a pas de pôle, soit $g = 1$.) On met

$$f_0 = g, f_1 = gg_1, \cdots, f_n = gg_n ,$$

alors, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont holomorphes sans zéros communs à toutes dans $|z| < 1$. Dans cette situation, on a le

THÉORÈME 9. *Si le système $f = (f_0, \cdots, f_n)$ n'admet pas de rayon de Julia, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i , \qquad (\alpha_i) \neq (0)$$

et

$$g_i / g_j \qquad (i \neq j)$$

sont normales dans $|z| < 1$.

On peut démontrer ce théorème comme dans le théorème 6 en utilisant le théorème 8 au lieu du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons de p fonctions holomorphes données, Mathematica, **7** (1933), 5–31.

[2] J. Dufresnoy, Théorie nouvelle des familles complexes normales; application à l'étude des fonctions algébroïdes, Ann. E.N.S., (3) **61** (1944), 1–44.

[4] O. Lehto et K. I. Virtanen, Boundary behavior and normal meromorphic functions, Acta Math., **97** (1957), 47–65.

[5] O. Lehto et K. I. Virtanen, On the behavior of meromorphic functions in the neighborhood of an isolated singularity, Ann. Acad. Sci. Fenn., **240** (1957), 1–9.

[6] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[7] A. Ostrowski, Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, Math. Zeit., **24** (1925), 215–258.

[8] H. L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norshe Vid. Akad. Oslo, **8** (1934), 1–72.

[9] N. Toda, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroïdes ou de systèmes, Kodai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 114–121.

[10] N. Toda, Sur les directions de Julia des fonctions algébroïdes dans $|z| < \infty$, Nagoya Math. J., **37** (1970), 53–60.
[11] G. Valiron, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math. France, **59** (1931), 17–39.
[12] T. Zinno, Some properties of Julia's exceptional functions and an example of Julia's exceptional functions with Julia's direction, Ann. Acad. Sci. Fenn., **464** (1970), 1–12.

Université de Nagoya