M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 47 (1972) 77-90

SUR L'EXISTENCE ET LA NON-EXISTENCE DES ALGÈBRES DE DIRICHLET

MASAYUKI ITÔ

1. Résultats

Cette mémoire sera consacrée à l'étude sur l'existence et la non-existence des algèbres de Dirichlet sur un ouvert de l'espace euclidien R^n à $n(\geqq 1)$ dimensions. La notion des algèbres de Dirichlet a été introduite par A. Beurling et J. Deny (cf. [1]).

(I) Pour tout ouvert non-vide Ω de l'espace euclidien $R^n(\mathrm{n} \geqq 2)$, il n'existe aucune algèbre de Dirichlet sur Ω.

(II) Pour tout ouvert Ω de la droite réelle R, il existe toujours algèbres de Dirichlet sur Ω.

On discutera finalement son application à une noyau-fonction continue.

2. Préliminaires

Dans toute la suite X désigne un espace localement compact et à base dénombrable. On supposera toujours qu'il existe une measure de Radon positive ξ partout dense dans X; c'est-à-dire, quel que soit ω un ouvert non-vide de $X, \xi(\omega) > 0$. On note $M = M(X; \xi)$ l'ensemble des fonctions réelles et localement ξ-sommables dans X, $M_K = M_K(X; \xi)$ le sous-ensemble des fonctions bornées de M et à support compact, $C_0 = C_0(X)$ l'espace des fonctions finies, continues dans X et s'annulant à l'infini (si X n'est pas compact), et muni de la topologie de convergence uniforme, $C_K = C_K(X)$ l'espace des fonctions, continues dans X, à support compact, et muni de la topologie usuelle.

On désigne respectivement par M^+, M_K^+, C_0^+ et C_K^+ leur sous-ensembles des fonctions non-négatives. La relation d'équivalence $f \sim g$ sur M signifie $f(x) = g(x)$ presque partout pour ξ (noté désormais ξ-p.p.) sur X, et on note $\tilde{M} = M/\sim$.

D'après A. Beurling et J. Deny [1], un espace de Dirichlet D relatif

Received June 21, 1971.

à X et à ξ est, par définition, un espace hilbertien dont l'élément est de $\tilde{M}$ et qui vérifie les trois conditions suivantes:

(a) A un compact K de X, on peut associer une constante $A(K) > 0$ telle que l'on ait, quelle que soit u de D,

$$\int_K |u|\, d\xi \leqq A(K)\, \|u\| .$$

(b) $C_K \cap D$ est dense dans C_K et dans D.

(c) On a, quelles que soient u de D et v une contraction normale de u, $v \in D$ et $\|v\| \leqq \|u\|$.

Un élément de $\tilde{M}$ est souvent écrit par son élément représentatif. On note respectivement $\|u\|$ et (u, v) la norme de u dans D et le produit scalaire associé.

Une contraction normale de u est, par définition, une fonction v telle que, quels que soient x, y de X,

$$|v(x)| \leqq |u(x)| \quad \text{et} \quad |v(x) - v(y)| \leqq |v(x) - u(y)| .$$

Si, pour une mesure de Radon réelle μ dans X, il existe un élément u_μ dans D tel que, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$(u_\mu, \varphi) = \int \varphi d\mu ,$$

il est alors unique et s'appelle le potential de μ dans D. La condition (a) implique que, quelle soit f de M_K, u_f a un sens. On identifie ici f et $f\xi$.

D'après A. Beurling et J. Deny [1], on définira la capacité d'un ouvert ω de X relative à D. On pose

$$E(\omega\,; D) = \{u \in D\,; u(x) \geqq 1 \quad \xi\text{-p.p.} \quad \text{dans } \omega\} ,$$

et alors cela est un ensemble convexe et fermé de D. La capacité $\operatorname{cap}(\omega\,; D)$ de ω relative à D est, par définition, $\inf\{\|u\|^2\,; u \in E(\omega\,; D)\}$ ou bien $+\infty$ d'accord avec $E(\omega\,; D) \neq \emptyset$ ou bien $E(\omega\,; D) = \emptyset$. Pour un compact K de X, on définit

$$\operatorname{cap}(K\,; D) = \inf\{\operatorname{cap}(\omega\,; D)\,;\ \omega \text{ est ouvert} \supset K\} .$$

La capacité intérieure $\operatorname{cap}_i(A\,; D)$ et la capacité extérieure $\operatorname{cap}_e(A\,; D)$ d'un ensemble quelconque A sont définies de la manière usuelle. Si $\operatorname{cap}_i(A\,; D) < +\infty$ (resp. $\operatorname{cap}_e(A\,; D) < +\infty$), il existe alors une mesure

Radon positive ν_A^i (resp. ν_A^e) portée par $\bar{A}$ et telle que l'on ait $u_{\nu_A^i} \in D$ (resp. $u_{\nu_A^e} \in D$) et

$$\mathrm{cap}_i(A\,;D) = \int d\nu_A^i = \|u_{\nu_A^i}\|^2 \qquad \left(\text{resp. } \mathrm{cap}_e(A\,;D) = \int d\nu_A^e = \|u_{\nu_A^e}\|^2\right) .$$

Si $\mathrm{cap}_i(A\,;D) = \mathrm{cap}_e(A\,;D)$, cette quantité s'écrit simplement $\mathrm{cap}(A\,;D)$ et A est dit d'être capacitable par rapport à la capacité relative à D. Il est connu que tout l'ensemble analytique de X est capacitable (cf. [2]).

3. Quelques propriétés des algèbres de Dirichlet

Un espace de Dirichlet D relatif à X et à ξ s'appelle une algèbre de Dirichlet si la condition suivante (d) est vérifiée:

(d) On a, quelles que soient u, v de $D, uv \in D$ et $\|uv\| \leqq C(D)\,\|u\|\,\|v\|$, où $C(D)$ est une constante positive qui dépend seulement de D.

LEMME 1. *Soit D un espace de Dirichlet relatif à X et à ξ. Alors les trois énoncés sont équivalents*:

(1) *D est une algèbre de Dirichlet.*

(2) $\inf\{\mathrm{cap}(\{x\}\,;D)\,;\,x \in X\} > 0.$

(3) *$C_0 \supset D$ et* $\sup\{\max_{x\in X}|u(x)|/\|u\|\,;\,u \in D\} < +\infty.$

A. Beurling et J. Deny ont énoncé, sans aucune démonstration, que (1) implique (2), et sa démonstration était fournie dans [2].

Montrons que (2) implique (3). On pose

$$\inf\{\mathrm{cap}(\{x\}\,;D)\,;\,x \in X\} = c^2 ,$$

et alors il suffit de voir que, quelle que soit φ de $C_K^+ \cap D$,

$$c\,(\max_{x\in X}\varphi(x)) \leqq \|\varphi\| ,$$

car, quelle que soit u de $D, |u| \in D$ et sa norme dans D est $\leqq \|u\|$, et $C_K \cap D$ est dense dans D. Supposons qu'il existe une fonction φ_0 de $C_K^+ \cap D$ et un nombre $\delta > 0$ tels que $\omega_\delta = \{x \in X\,;\,c\varphi_0(x) > (1+\delta)\,\|\varphi_0\|\}$ soit non-vide. Il existe donc une mesure de Radon positive $\nu_\delta (\neq 0)$ dans X, portée par $\bar{\omega}_\delta$, et une seule telle que l'on ait $u_{\nu_\delta} \in D$ et

$$\|u_{\nu_\delta}\|^2 = \int d\nu_\delta = \mathrm{cap}(\omega_\delta\,;D)^{(1)}$$

et par suite, on a

(1) On dit que u_{ν_δ} et ν_δ sont réspectivement le potentiel d'équilibre de ω_δ et la mesure d'équilibre de ω_δ.

$$c\,\|\varphi_0\|\,\|u_{\nu_\delta}\| \geqq c(\varphi_0, u_{\nu_\delta}) = c\int \varphi_0 d\nu_\delta \geqq (1+\delta)\,\|\varphi_0\|\,\|u_{\nu_\delta}\|^2 .$$

Mais cela est en contradiction avec cap $(\omega_\delta; D) \geqq c^2$.

En utilisant la contraction normale généralisée, A. Beurling et J. Deny ont montré, en général, que, quelles que soient u, v de $C_K \cap D$, $uv \in D$ et

$$\|uv\| \leqq (\max_{x\in X} |u(x)|)\,\|v\| + (\max_{x\in X} |v(x)|)\,\|u\| .$$

Voir [1]. Donc l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) en résulte immédiatement.

Dès maintenant dans cette section, D désigne une algèbre de Dirichlet relative à X et à ξ.

COROLLAIRE 1. *Pour une mesure de Radon réelle μ dans X et avec $\int d|\mu| < +\infty$, on a $u_\mu \in D$ et*

$$C(D)\,\|u_\mu\| \leqq \int d|\mu| .$$

En effet l'application $D \ni u \to \int u d\mu$ est linéaire et bornée dans D, car on a

$$\left|\int u d\mu\right| \leqq \max_{x\in X} |u(x)| \int d|\mu| \leqq C(D)^{-1}\,\|u\| \int d|\mu| ,$$

et donc, d'après le théorème de Riesz, on a $u_\mu \in D$ et

$$C(D)\,\|u_\mu\| \leqq \int d|\mu| .$$

On utilise ici l'égalité

$$\max_{u,v\in D} \frac{\|uv\|}{\|u\|\,\|v\|} = (\inf_{x\in X} \operatorname{cap}(\{x\}; D))^{-1/2} = \sup_{u\in D} \frac{\max_{x\in X} |u(x)|}{\|u\|} .$$

D'après ce corollaire, on a, quel que soit x de $X, u_{\varepsilon_x} \in D$, où ε_x est la mesure de Dirac au point x. On pose

$$(g_D(x, y) =)\ g(x, y) = (u_{\varepsilon_x}, u_{\varepsilon_y}) ,$$

et alors $g(x, y) = g(y, x)$ et, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X telle que u_μ ait un sens dans D, g_μ est finie et continue dans X, où $g_\mu(x) = \int g(x, y) d\mu(y)$. Dans ce cas, évidemment $u_\mu = g_\mu$ ξ-p.p. sur X. On dit que g est le noyau de D.

Remarque. Pour un point fixé y de X, la fonction $g(x, y)$ de x appartient à C_0. Mais nous ne connaissons pas si g est finie et continue dans l'espace produit $X \times X$. On affirme seulement que l'application $x \to g(x, x)$ est semi-continue inférieurement, car $x \to u_{\varepsilon_x}$ est faiblement continue dans D.

COROLLAIRE 2. *Soit μ une measure de Radon positive dans X. $D_{(\mu)}$ désigne un espace complété de $C_K \cap D$ par la norme*

$$\|\varphi\|_\mu = \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu + \|\varphi\|^2\right)^{1/2} .$$

Alors $D_{(\mu)}$ est aussi une algèbre de Dirichlet relative à X et à ξ.

$D_{(\mu)}$ est évidemment un espace de Dirichlet, et notre corollaire résulte immédiatement du fait que, quelle soit φ de $C_K \cap D$,

$$\max_{x \in X} |\varphi(x)| \leqq \frac{\|\varphi\|}{C(D)} \leqq \frac{\|\varphi\|_\mu}{C(D)} .$$

Pour une algèbre de Dirichlet D et pour un nombre $p > 0, D_{(p)}$ désigne l'algèbre de Dirichlet obtenu par la complété de $C_K \cap D$ par la norme $\|\varphi\|_{(p)} = \|\varphi\|_{(p\xi)}$. On note g_p le noyau de $D_{(p)}$, et alors $(g_p)_{p>0}$ est une résolvante; c'est-à-dire, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$g_p(x, y) - g_q(x, y) = (q - p)\int g_p(x, z) g_q(z, y) d\xi(z) .$$

On a $g = \lim\limits_{p \to 0} g_p$ et, quel que soit $p > 0$,

$$p\int g_p(x, y) d\xi(y) \leqq 1 .$$

LEMME 2. *Soit D une algèbre de Dirichlet relative à X et à ξ, et supposons $\xi(X) < +\infty$. Alors, à une mesure de Radon réelle μ dans X et avec $\int d|\mu| < +\infty$, on peut associer une autre mesure de Radon réelle μ_2 dans X, avec $\int d|\mu_2| < +\infty$ et tell que $(u_\mu)^2 = u_{\mu_2}$.*

En effect, on a, quelle que soit u de $D, \int |u|^2 d\xi < +\infty$. Donc, pour deux fonctions u, v de D, on a

$$\begin{aligned}(u, v) = \lim_{p \to \infty} \Big(p\int u(x)v(x)\Big(1 - p\int g_p(x, y) d\xi(y)\Big) d\xi(x) \\ + \frac{p}{2}\iint (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) p g_p(x, y) d\xi(y) d\xi(x)\Big)\end{aligned}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(p\int u(x)v(x)\left(1 - p\int g_p(x, y)d\xi(y)\right)d\xi(x) \right.$$
$$\left. + p\iint u(x)(v(x) - v(y))pg_p(x, y)\,d\xi\,d\xi \right) .$$

Cela est un résultat de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]). Notons ν la limite vague de $p\left(1 - p\int g_p(x, y)d\xi(y)\right)\xi$ lorsque $p \to \infty$. On a alors, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$((u_\mu)^2, \varphi) = \int (g_\mu)^2\varphi d\nu$$
$$+ \lim_{p\to\infty} p\iint ((g_\mu(x))^2 - (g_\mu(y))^2)\varphi(x)pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x) .$$

On a ensuite

$$p\iint ((u_\mu(x))^2 - (u_\mu(y))^2)\varphi(x)pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x)$$
$$= 2p\iint (u_\mu(x) - u_\mu(y))u_\mu(x)\varphi(x)pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x)$$
$$- p\iint \varphi(x)(u_\mu(x) - u_\mu(y))^2pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x) .$$

On a, d'autre part,

$$\int (g_\mu(x))^2\varphi(x)d\nu(x) + \lim_{p\to\infty} p\iint (u_\mu(x) - u_\mu(y))u_\mu(x)\varphi(x)pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x)$$
$$= (u_\mu, u_\mu\varphi) = \int \varphi(x)g_\mu(x)d\mu(x) = (\varphi, u_{g_\mu\mu}) .$$

Ayant

$$\frac{p}{2}\iint (u_\mu(x) - u_\mu(y))^2pg_p(x, y)d\xi(y)d\xi(x) \leqq \|u_\mu\|^2 ,$$

on peut supposer que la famille

$$\left(p\int (u_\mu(x) - u_\mu(y))^2pg_p(x, y)d\xi(y)\right)\xi$$

converge vaguement vers une mesure de Radon positive η dans X de masse totale finie avec $p \to \infty$. On a finalement $\int (g_\mu)^2 d\nu < +\infty$, car

$$(g_\mu(x))^2 \leqq \max_{y\in X} |g_\mu(y)|\,|g_\mu(x)| \leqq \max_{y\in X} |g_\mu(y)|\, g_{|\mu|}(x)$$

et

$$\int (g_\mu)^2 d\nu \leqq \max_{x \in X} |g_\mu(x)| \int g_{|\mu|} d\nu \leqq \max_{x \in X} |g_\mu(y)| \int d|\mu| < +\infty .$$

Par conséquent, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$((u_\mu)^2, \varphi) = (u_{2g_\mu \mu} - u_{(g_\mu)^2\nu} - u_\eta, \varphi) ,$$

d'où notre lemme.

LEMME 3. *Soit g le noyau de D. Pour une mesure de Radon positive μ dans X à masse totale finie et pour un fermé F de X, il existe une mesure de Radon positive μ' dans X, portée par F, et une seule telle que que l'on ait $g_\mu(x) \geqq g_{\mu'}(x)$ partout sur $X, g_\mu(x) = g_{\mu'}(x)$ partout sur F et $\int d\mu \geqq \int d\mu'$.*

D'après le corollaire 1, u_μ a un sens dans D. Donc notre lemme résulte du théorème de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]) et du lemme 1. On doit utiliser ici g_μ, car u_μ est un élément de $\tilde{M}$ dont l'élément représentatif est égal à g_μ. On dit que μ' est la mesure balayée de μ sur F relativement à D (ou au noyau g).

LEMME 4. *Soient ω un ouvert relativement compact de X et K un compact $\subset \omega$. Si une suite (μ_n) de mesures de Radon positives portées par K converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ dans X, on a alors, quelle que soit f une fonction continue et bornée dans X,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu'_n = \int f d\mu' .$$

où μ'_n et μ' sont respectivement les mesures balayées de μ_n et de μ sur $\mathscr{C}\omega$ relativement à D.

En effect, on désigne par g le noyau de D. On a

$$\sup_{\substack{1 \leqq n \leqq \infty \\ x \in X}} (g_{\mu_n}(x) - g_{\mu'_n}(x)) < +\infty ,$$

où $\mu_\infty = \mu$ et $\mu'_\infty = \mu'$. On pose, quels que soient x, y de ω,

$$g_\omega(x, y) = g(x, y) - g_{\varepsilon'_y}(x) ,$$

et alors $g_\omega(x, x) > 0$ pour tout x de ω et

$$g_{\mu_n}(x) - g_{\mu'_n}(x) = \int g_\omega(x, y) d\mu_n(y) .$$

Il existe donc une mesure de Radon positive ν dans X, portée par K et telle que

$$g_\nu(x) - g_{\nu'}(x) = \int g_\omega(x, y) d\nu(y) \geqq \sup_{\substack{1 \leqq n \leqq \infty \\ x \in X}} (g_{\mu_n}(x) - g_{\mu'_n}(x))$$

sur K. Rappelons le principe complet du maximum pour g_ω(2) et le théorème de représentation de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]). On a alors $\nu' \geqq \mu'_n$ et $\nu' \geqq \mu'$ dans l'intérieur de $\mathscr{C}\omega$. Donc, pour un nombre $\delta > 0$ donné, il existe un autre compact F de X tel que

$$\mu'_n(\mathscr{C}F) < \delta \quad \text{et} \quad \nu'(\mathscr{C}F) < \delta .$$

D'autre part, (μ'_n) est vaguement bornée, car $\int d\mu'_n \leqq \int d\mu_n$. On a ensuite, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$\lim_{n \to \infty} (u_{\mu'_n}, \varphi) = \lim_{n \to \infty} (u_{\mu_n}, \varphi') = (u_\mu, \varphi') = (u_{\mu'}, \varphi) ,$$

où φ' est la projection de φ sur le sous-espace $D'_{\mathscr{C}\omega}$ de D qui est l'adhérent de l'ensemble $\{u_\nu \in D \,;\, S_\nu \subset \mathscr{C}\omega, \nu$ est une mesure de Radon réelle dans $X\}$. On note S_ν le support de ν. Cela résulte du fait que $u_{\mu'_n}$ est la projection de u_{μ_n} sur $D'_{\mathscr{C}\omega}$. Donc, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi d\mu'_n = \int \varphi d\mu' .$$

$C_K \cap D$ étant dense dans C_K, (μ'_n) converge vaguement vers μ' dans X avec $n \to \infty$. Par conséquent, notre lemme en résulte immédiatement.

LEMME 5. *Pour un ouvert ω de X, le sous-espace fermé D_ω obtenu par l'adhérent de l'ensemble $\{\varphi \in C_K \cap D \,;\, S_\varphi \subset \omega\}$ est une algèbre de Dirichlet relative à ω et à ξ.*

Il est facile de voir que D_ω vérifie les quatre conditions (a), (b), (c) et (d). On obtient facilement que le noyau de D_ω est égal à g_ω dans le lemme 4 et que $D'_{\mathscr{C}\omega}$ est l'espace orthogonal de D_ω dans D.

4. Les algèbres de Dirichlet sur un ouvert de R^n

Pour un ouvert Ω de l'espace euclidien R^n ($n \geqq 1$), un espace de Dirichlet (resp. une algèbre de Dirichlet) sur Ω signifie celui (resp. celle)

(2) Cele signifie que, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans ω et à support compact, $g_\omega\mu(x) \leqq g_\omega\nu(x) + 1$ sur ω dès que la même inégaité a lieu sur S_μ.

relatif à Ω et à la mesure de Lebesgue. Si, pour un ouvert non-vide Ω de R^n, il existe une algèbre de Dirichlet sur Ω, alors, quelle que soit ω un ouvert $\subset\Omega$, il existe aussi une algèbre de Dirichlet sur ω. On supposera donc que Ω est borné. Supposons qu'il existe un ouvert borné Ω de R^n tel qu'il existe une algèbre de Dirichlet D sur Ω, et on note g son noyau. Pour un point x de Ω et pour un nombre $r > 0$, $\nu_{x,r}$ désigne la mesure balayée de ε_x sur $\mathscr{C}B(x\,;r)$ relativement à D dès que l'adhérent de $B(x\,;r)$ appartient à Ω, où $B(x\,;r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r. On note

$$a_{x,r} = (g(x,x) - g_{\nu_{x,r}}(x))\omega_n(r)\ ,$$

où $\omega_n(r)$ est la volume de la boule de rayon r. L'ensemble $\{x \in \Omega\,;$ dis. $(x, \mathscr{C}\Omega) > r\}$ est noté par Ω_r. Alors les applications $\Omega_r \ni x \to g(x,x)$ et $\Omega_r \ni x \to g\nu_{x,r}(x)$ est semi-continue inférieurement, car

$$g_{\nu_{x,r}}(x) = \int g_{\varepsilon_x}(y)d\nu_{x,r}(y) = \|u_{\nu_{x,r}}\|^2$$

et l'application $x \to \nu_{x,r}$ est vaguement continue, et donc $x \to u_{\nu_{x,r}}$ est faiblement continue dans D.

LEMME 6. *Pour une mesure de Radon réelle μ dans Ω et avec $\int d|\mu| < +\infty$, l'intégrale*

$$\int_{\Omega_r}\int \frac{(g_\mu(x) - g_\mu(y))^2}{a_{x,r}} d\nu_{x,r}(y)dx$$

est bornée lorsque $r \to 0$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r}\int &\frac{(g_\mu(x) - g_\mu(y))^2}{a_{x,r}} d\nu_{x,r}(y)dx + \int_{\Omega_r}(g_\mu(x))^2\frac{1 - \int d\nu_{x,r}}{a_{x,r}}dx \\ &= 2\int_{\Omega_r}\frac{g_\mu(x)\left(g_\mu(x) - \int g_\mu(y)d\nu_{x,r}(y)\right)}{a_{x,r}}dx \\ &\quad - \int_{\Omega_r}\frac{(g_\mu(x))^2 - \int (g_\mu(y))^2 d\nu_{x,r}(y)}{a_{x,r}}dx\ .\end{aligned}$$

On a ensuite, pour tout $r > 0$,

$$\left| \int_{\Omega_r} \frac{g_\mu(x)\left(g_\mu(x) - \int g_\mu(y) d\nu_{x,r}(y)\right)}{a_{x,r}} dx \right|$$
$$\leqq \int_{\Omega_r} \int \frac{(g(x, y) - g_{\nu_{x,r}}(y)) d|\mu|(y)}{a_{x,r}} |g_\mu(x)| dx$$
$$= \iint_{\Omega_r} \frac{g(x, y) - g_{\nu_{x,r}}(y)}{a_{x,r}} |g_\mu(x)| dx d|\mu|(y)$$
$$\leqq \left(\max_{x \in \Omega} |g_\mu(x)|\right) \iint_{\Omega_r} \frac{g(x, y) - g_{\nu_{x,r}}(y)}{a_{x,r}} dx d|\mu|(y)$$
$$\leqq \left(\max_{x \in \Omega} |g_\mu(x)|\right) \int d|\mu| \, .$$

D'autre part, d'après le lemma 2, il existe une mesure de Radon réelle ν dans Ω, avec $\int d|\nu| < +\infty$ et telle que l'on ait $(u_\mu)^2 = u_\nu$. Donc, de la même manière que ci-dessus, on a

$$\left| \int_{\Omega_r} \frac{(g_\mu(x))^2 - \int (g_\mu(y))^2 d\nu_{x,r}(y)}{a_{x,r}} dx \right| \leqq \int d|\nu| \, .$$

Ayant $\int d\nu_{x,r} \leqq \int d\varepsilon_x = 1$, on obtient que l'intégrale

$$\int_{\Omega_r} \int \frac{(g_\mu(x) - g_\mu(y))^2}{a_{x,r}} d\nu_{x,r}(y) dx$$

est bornée lorsque $r \to 0$.

On note

$$b_{x,r} = \int |x - y|^2 \, d\nu_{x,r}(y) \, ,$$

et alors, d'après le lemme 4, l'application $\Omega_r \ni x \to b_{x,r}$ est continue. On désigne par $C_K^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles, infiniment dérivables dans Ω et à support compact.

LEMME 7. *Soit Ω un ouvert de R^n $(n \geqq 2)$. Alors il existe un suite décroissante (r_m) des nombres positifs tendant vers 0 et telle que, quelles que soient φ, ψ de $C_K^\infty(\Omega)$,*

$$d(\varphi, \psi) = \lim_{m \to \infty} \int_{\Omega_{r_m}} \int \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y))}{b_{x,r_m}} d\nu_{x,r_m}(y) dx$$

existe et que $d(\cdot, \cdot)$ ne s'annule pas identiquement.

En effect, pour un entier $p \geqq 3$, on a

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Omega_r}\int\frac{|x-y|^p}{b_{x,r}}d\nu_{x,r}(y)dx = 0 \ ,$$

car, quelle que soit f une fonction continue et bornée dans Ω,

$$\lim_{r\to 0}\int f d\nu_{x,r} = f(x) \ .$$

On utilise ici le fait que Ω est borné. On a donc, quelles que soient φ, ψ de $C_K^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{r\to 0}\Bigg(\int_{\Omega_r}\int\frac{(\varphi(x)-\varphi(y))(\psi(x)-\psi(y))}{b_{x,r}}d\nu_{x,r}(y)dx$$
$$-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{\Omega_r}\frac{\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}}{b_{x,r}}dx\int(x_i-y_i)(x_j-y_j)d\nu_{x,r}(y)\Bigg) = 0 \ ,$$

où $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)$. On pose

$$f_{ij,r}(x) = \frac{1}{b_{x,r}}\int(x_i-y_i)(x_j-y_j)d\nu_{x,r}(y)$$

dans Ω_r, et alors $|f_{ij,r}(x)| \leqq 1$ dans Ω_r. Donc il existe une suite dècroissante (r_m) des nombres positives tendant vers 0 et telle que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_{r_m}}\int\frac{(\varphi(x)-\varphi(y))(\psi(x)-\psi(y))}{b_{x,r_m}}d\nu_{x,r_m}(y)dx$$

existe. On a toujours $f_{ii,r} \geqq 0$ et

$$\sum_{i=1}^n f_{ii,r}(x) = 1$$

dans Ω_r. Donc il existe une fonction ρ de $C_K^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_{r_m}}\int\frac{(\rho(x)-\rho(y))^2}{b_{x,r_m}}d\nu_{x,r_m}(y)dx > 0 \ ,$$

d'où notre lemme.

D'après le présent lemme, on voit que, quelles que soient φ, ψ de $C_K^\infty(\Omega)$,

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^n\sum_{n=1}^n\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}d\nu_{ij} \ ,$$

où ν_{ij} est une mesure réelle dans Ω.

Montrons notre théorème principal.

THÉORÈME.

(I) Pour tout ouvert non-vide Ω de l'espace euclidien R^n $(n \geqq 2)$, il n'existe aucune algèbre de Dirichlet sur Ω.

(II) Pour tout ouvert Ω de la droite réelle R, il existe toujours algèbres de Dirichlet sur Ω.

Démonstration. Supposons qu'il existe un ouvert non-vide et borné Ω de R^n $(n \geqq 2)$ tel qu'il existe une algèbre de Dirichlet D sur Ω. La suite (r_m) est celle obtenue dans le présent lemme 7. On définit une mesure $\mu_m(\cdot, \cdot)$ dans $\Omega_{r_m} \times \Omega_{r_m}$ comme suit; quelles que soient f, g de $C_K(\Omega_{r_m})$,

$$\iint f(x)g(y)d\mu_m(x, y) = \int_{\Omega_{r_m}} \frac{f(x)}{b_{x,r_m}} dx \int_{\Omega_{r_m}} g(y)d\nu_{x,r_m}(y) .$$

On désigne par $\check{\mu}_m$ la symétricité de μ_m et par $\tilde{\mu}_m = \frac{1}{2}(\mu_m + \check{\mu}_m)$, et alors, quelles que soient φ, ψ de $C_K^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} d(\varphi, \psi) &= \lim_{m\to\infty} \iint (\varphi(x) - \psi(y))(\varphi(x) - \psi(y))d\tilde{\mu}_m(x, y) \\ &= \lim_{m\to\infty} 2\iint \varphi(x)(\psi(x) - \psi(y))d\tilde{\mu}_m(x, y) . \end{aligned}$$

Soit D_d un espace de Dirichlet sur Ω obtenu par la complété de $C_K^\infty(\Omega)$ par la norme

$$\|u\|_d = \left(\int |u|^2 dx + d(u, u)\right)^{1/2} .$$

On peut voir facilement, en général, que, pour une fonction φ de C_K, φ appartient à D_d et on a

$$\|\varphi\|_d = \left(\int |\varphi|^2 dx + \lim_{m\to\infty} \iint (\varphi(x) - \varphi(y))^2 d\tilde{\mu}_m(dx, dy)\right)^{1/2}$$

dès que la présente limite existe et, quelle que soit ψ de $C_K^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{m\to\infty} \iint (\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y))d\tilde{\mu}_m(dx, dy)$$

existe et elle est finie. Donc, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans Ω et avec $\int d|\mu| < +\infty$, g_μ appartient à D_d et on a, d'après $\lim_{r\to 0} a_{x,r}/b_{x,r} = 0$,

$$\|g_\mu\|_d = \left(\int |g_\mu|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

dès que g_μ est à support compact dans Ω, où g est le noyau de D. On a donc, quelle que soit φ de $C_K^\infty(\Omega)$,

$$(g_\mu, \varphi)_d = \int g_\mu(x)\varphi(x)dx \ ,$$

où $(\cdot, \cdot)_d$ est le produit scalaire dans D_d, qui implique que le potentiel de g_μ dans D_d est égal à g_μ. D'autre part, l'ensemble de tels potentiels g_μ est dense dans C_K, et donc $d(\varphi, \psi) = 0$ sur $C_K^\infty(\Omega) \times C_K^\infty(\Omega)$. Mais cela est une contradiction.

Montrons l'énoncé (II). Soient $1 < \alpha \leqq 2$ et $p > 0$. Alors la fonction $\lambda_{\alpha,p}(x) = p + |x|^\alpha$ sur R étant définie-négative (cf. [1]) et partout positive, l'espace hilbertien D obtenu par la complété de $C_K^\infty(R)$ par la norme

$$\|u\| = \left(\int |\hat{u}(x)|^2 (p + |x|^\alpha) dx\right)^{1/2}$$

est un espace de Dirichlet sur R (cf. [1]), où la signe $\wedge$ représente la transformation de Fourier sur R. D'autre part, la fonction $(\lambda_{\alpha,p})^{-1}$ est de type positif et à masse totale finie, et donc il existe une fonction k finie et continue et de type positif sur R telle que $\hat{k} = (\lambda_{\alpha,p})^{-1}$. Il est évident que $k(x - y)$ est le noyau de D. Par conséquent, D est une algèbre de Dirichlet sur R, et d'après le lemme 5, on a l'énoncé (II). La démonstration est ainsi complète.

5. Une application

Soit Ω un ouvert de R^n ($n \geqq 1$). Une noyau-fonction continue G sur Ω est une fonction non-négative, continue au sens large dans $\Omega \times \Omega$, finie en dehors de l'ensemble diagonal et localement sommable pour la mesure de Lebesgue dans R^{2n}. Dans la mémoire précédente [3], on montre:

Pour qu'une noyau-fonction continue et symétrique G sur Ω soit un noyau d'espace de Dirichlet, il faut et il suffit que G satisfasse au principe complet du maximum et au principe d'énergie et que G soit faiblement régulière.

G satisfait au principe complet du maximum si, quelle que soient μ, ν mesures positives dans Ω à support compact, l'inégalité $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1$ est satisfaite partout sur Ω dès que la même inégalité a lieu sur S_μ

et que $\int G_\mu(x)d\mu(x) < +\infty$, où $G_\mu(x) = \int G(x, y)d\mu(y)$.

G satisfait au principe d'énergie si, quelle que soit μ une mesure réelle dans Ω, $\int G_\mu(x)d\mu(x) \geqq 0$ dès que $\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$ et si $\int G_\mu(x)d\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$.

G est faiblement régulière si, quels que soient x de Ω et a un nombre positif,

$$\inf\{\mathrm{cap}_G(\{y \in \mathscr{C}K ; G(x, y) \geqq a\}) ; K : \text{compact}\} = 0 ,$$

où cap_G désigne la capacité relative au noyau G.

Proposition. *Si G est faiblement régulière, symétrique et satisfait au principe complet du maximum, au principe d'énergie, alors $G(x, x) = +\infty$ pour tout x de Ω dès que $n \geqq 2$.*

On suppose qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que

$$\omega_a = \{x \in \Omega ; G(x, x) < a\}$$

ne soit pas non-vide. Pour un point x de ω_a, on désigne par ε'_x la mesure balayée de ε_x sur $\mathscr{C}\omega_a$ relativement au noyau G. Posons

$$D_a = \overline{\{\varphi \in C_K(\Omega) \cap D ; S_\varphi \subset \omega_a\}} ,$$

où D désigne l'espace de Dirichlet sur Ω au noyau G et l'adhérence signifie celle dans D. Alors D_a est un espace de Dirichlet sur ω_a et son noyau est égal à

$$G_a(x, y) = G(x, y) - \int G(x, z)d\varepsilon'_y(z) .$$

La fonction G_a étant bornée, D_a est une algèbre de Dirichlet sur ω_a. Mais cela est en contradiction avec notre théorème.

Références

[1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45**, 1959, p. 208–215.

[2] J. Deny, Publications du séminaire de mathématiques d'Orsay, 1re année, 1961/62.

[3] M. Itô, Sur les noyaux de Dirichlet continus, Nagoya Math. J. vol. **47**, 1972, p. 59–75.

Institut mathématique, Université de Nagoya