M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 47 (1972), 59–75

SUR LES NOYAUX DE DIRICHLET CONTINUS

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction et préliminaires

Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et supposons qu'il existe une mesure de Radon positive ξ partout dense dans X. Dans toute la suite X et ξ seront fixés.

Une noyau-fonction continue (relatif à X et à ξ) est, par définition, une fonction non-négative G continue au sens large, localement $\xi \times \xi$-sommable dans l'espace produit $X \times X$ et finie en dehors de l'ensemble diagonal de $X \times X$. On dit que G est symétrique si, quels que soient x et y de X, on a $G(x, y) = G(y, x)$. Quelques principes pour les potentiels par rapport à une noyau-fonction continue ont été étudiés (voir, par exemple, [5] et [6]).

On se propose ici d'étudier les conditions pour qu'une noyau-fonction continue G soit un noyau de Dirichlet (relatif à X et à ξ); c'est-à-dire, il existe un espace de Dirichlet D (relatif à X et à ξ) tel que, quelle que soit f de M_K, le potentiel de $f\xi$ dans D soit égal au potentiel Gf de $f\xi$ par rapport au noyau G. M_K désigne l'ensemble des fonctions ξ-mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact.

Pour une measure de Radon réelle μ dans X, le potentiel G_μ de μ par rapport au noyau G est défini par

$$G_\mu(y) = \int G(x, y) d\mu(y)$$

dès que l'intégrale a un sens pour tout x de X.

On note M la totalité de fonctions réelles et localement ξ-sommables dans X, et la relation d'équivalence $f \sim g$ est définie par $f = g$ ξ-p.p. sur X. On désigne par $\tilde{M} = M/\sim$, et un élément de $\tilde{M}$ sera souvent écrit par son élément représentatif.

Un espace fonctionnel H (relatif à X et à ξ) est, par définition, un

Received June 21, 1971.

espace hilbertien dont tout l'élément est de $\tilde{M}$ et qui vérifie la condition suivante:

(a) A un compact K de X, on peut associer une constante $C(K) > 0$ telle que, quelle que soit u de H,

$$\int_K |u| d\xi \leqq C(K) \|u\| .$$

Un espace de Dirichlet D est, par définition, un espace fonctionnel qui vérifie les deux conditions suivantes:

(b) $C_K \cap D$ est dense dans C_K et dans D.

(c) Quelles que soient u de D et T une contraction normale de la droite réelle R, $T \cdot u$ appartient à D et on a $\|T \cdot u\| \leqq \|u\|$.

Ceux sont les définitions de A. Beurling et J. Deny [1]. On note $\|u\|$ la norme de u et (u, v) le produit scalaire associé. C_K désigne l'espace des fonctions finies, continues dans X et à support compact. On dit qu'une transformation de R à elle-même est une contraction normale si l'on a $T(0) = 0$ et $|T(a_1) - T(a_2)| \leqq |a_1 - a_2|$ $(a_1, a_2 \in R)$.

D'après le théorème de Riesz, à une fonction f de M_K, on associe un élément u_f de H, et un seul tel que, quelle que soit v de H,

$$(u_f, v) = \int v f d\xi ,$$

et u_f s'appelle le potentiel de $f\xi$ dans H. Si, pour une mesure de Radon réelle μ dans X, il existe un élément u_μ dans D tel que, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$(u_\mu, \varphi) = \int \varphi d\mu ,$$

il est alors unique et s'appelle le potentiel de μ dans D.

On introduira les deux principes suivants pour les potentiels par rapport à une noyau-fonction continue G.

Principe complet du maximum: G satisfait au principe complet du maximum si, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X, l'inégalité $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1$ est satisfaite partout sur X dès que $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$ et que $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1$ sur le support S_μ de μ.

Principe d'énergie: G satisfait au principe d'énergie si, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans $X, \int G_\mu(x) d\mu(x) \geqq 0$ dès que

$\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$, et si l'on a $\int G_\mu(x)d\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$.

On dira qu'une noyau-fonction continue G est faiblement régulière si, quels que soit x de X et a > 0,

$$\inf_K \operatorname{cap}_G(\{y \in \mathscr{C}K\,;\, G(x, y) > a\}) = 0\ .$$

où K est compact. Pour un ensemble capacitable A, on note $\operatorname{cap}_G(A)$ la capacité de A relative au noyau G.

2. Le théorème principal

Commençons avec notre résultat principal.

THÉORÈME. *Pour qu'une noyau-fonction continue G soit un noyau de Dirichlet, il faut et il suffit que G vérifie les trois conditions suivantes*:

(1) *G est symétrique.*

(2) *G satisfait au principe complet du maximum et au principe d'énergie.*

(3) *G est faiblement régulière.*

On connaît bien que si une noyau-fonction continue symétrique G satisfait au principe complet du maximum, G est de type positif; c'est-à-dire, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X, $\int G_\mu(x)d\mu(x) \geqq 0$ dès que $\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$ (cf. [3], [6]). Supposons que G est symétrique et de type positif. Alors, en complétant l'ensemble $\{Gf\,;\, f \in M_K\}$ par la norme

$$\|Gf\| = \left(\int Gf(x)f(x)d\xi(x)\right)^{1/2}\ ,$$

on obtient un espace fonctionnel, que s'appelle celui associé au noyau G et s'écrit $H(G)$. Il est, d'autre part, caractérisé par l'espace fonctionnel tel que, quelle que soit f de $M_K, u_f = Gf$.

LEMME 1. *On suppose que $D = H(G)$ est un espace de Dirichlet. On a alors*:

(a) *Quels que soient x de X et $a > 0$,* $\inf(G\varepsilon_x, a) \in H(G)$, *où ε_x est la mesure de Dirac au point x.*

(b) *Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X, u_μ a un sens, alors $\int G_\mu(x)d\mu(x) < +\infty$ et $u_\mu = G_\mu$.*

En effet, soient $(V_\alpha)_\alpha$ une famille fitrante à gauche d'ouverts relativement compacts avec $\bigcap_\alpha V_\alpha = \{x\}$, et f_α une fonction de M_K^+ portée par V_α et avec $\int f_\alpha d\xi = 1$, où M_K^+ est le sous-ensemble des fonctions non-négatives dans M_K. Alors, pour $a > 0$, il existe une mesure de Radon positive ν_α^a dans X telle que $\inf(Gf_\alpha, a) = u_{\nu_\alpha^a}$ et $\int d\nu_\alpha^a \leqq 1$ (cf. [1]). Donc il existe une mesure de Radon positive ν_x^a dans X telle que $\inf(G\varepsilon_x, a) = u_{\nu_x^a}$ et $\int d\nu_x^a \leqq 1$, d'où (a).

Pour une fonction f de M_K^+, la fonction

$$G_a f(x) = \int \inf(G(x, y), a) f(y) d\xi(y)$$

appartient à D. On peut supposer ici que la mesure μ dans l'énoncé (b) est à support compact. On a donc

$$(u_\mu, G_a f) = \int G_a f(x) d\mu(x) .$$

La famille $(G_a f)_{a>0}$ converge fortement vers Gf dans $H(G)$ avec $a \to +\infty$, et elle converge d'une manière croissante vers Gf dans X. Donc

$$(u_\mu, Gf) = \int Gf(x) d\mu(x) .$$

Considérons l'application

$$\{Gf \in D ; f \in M_K\} \ni Gf \to \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x) .$$

Alors, d'après

$$\left|\int G_\mu(x) f(x) d\xi(x)\right| = \left|\int Gf(x) d\mu(x)\right| \leqq \|u_\mu\| \|Gf\| ,$$

cette application peut être prolongée sur D, et ce prolongement est linéaire et borné sur D. Le théorème de Riesz implique $G_\mu \in D$. On a donc

$$(u_\mu, G_\mu) = \lim_{a\to\infty} (u_\mu, G_a \mu) = \lim_{a\to\infty} \int G_a \mu d\mu = \int G_\mu d\mu < +\infty$$

et, quelle que soit f de M_K, $(Gf, G_\mu) = (Gf, u_\mu)$, d'où $u_\mu = G_\mu$.

Soit D un espace de Dirichlet. Pour un ouvert ω de X, la capacité $\mathrm{cap}_D(\omega)$ de ω relative à D est définie par

$$\operatorname{cap}_D(\omega) = \inf\{\|u\|^2; u \in D, u \geqq 1 \ \xi\text{-p.p. dans } \omega\}$$

ou $\operatorname{cap}_D(\omega) = +\infty$ d'accord avec $\{u \in D; u \geqq 1 \ \xi\text{-p.p. dans } \omega\} \neq \emptyset$ ou $=\emptyset$ (cf. [1]). La capacité extérieure d'un ensemble quelconque est définie de la manière usuelle. On dit qu'une propriété a lieu D-q.p. sur un ensemble A si elle a lieu sur A excepté à un ensemble de capacité extérieure nulle.

On connaît bien qu'à u de D, on associe une fonction quasi-continue dans X et qui est égale ξ-p.p. à u. Elle s'appelle un raffinement de u (cf. [1]), et s'écrit u^*.

COROLLAIRE 1. *Soit $H(G)$ le même que dans le lemme* 1. *Si, pour une mesure de Radon positive $\mu, u_\mu \in H(G)$, alors, quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X,*

$$\int u_\mu^* d\nu = \int G_\mu d\nu$$

dès que $u_\nu \in H(G)$.

On peut supposer que S_ν est compact. On a, quel que soit $a > 0$,

$$(u_\nu, G_a\mu) = \int G_a\mu d\nu \ ,$$

car $G_a\mu$ est continue. Faisant $a \to \infty$, on arrive à

$$\int u_\mu^* d\nu = (u_\mu, u_\nu) = \lim_{a\to\infty} (G_a\mu, u_\nu) = \int G_\mu d\nu \ .$$

COROLLAIRE 2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme* 1, *l'application $X \ni x \to \nu_x^a$ est vaguement continue pour tout $a > 0$.*

En effet, on a d'abord $\|u_{\nu_x^a}\| \leqq a^{1/2}$ et, quelle que soit f de M_K,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} (u_{\nu_x^a}, Gf) &= \lim_{x\to x_0} \int \inf(G(x,y), a) f(y) d\xi(y) \\ &= \int \inf(G(x_0,y), a) f(y) d\xi(y) = (u_{\nu_{x_0}^a}, Gf) \ .\end{aligned}$$

L'ensemble $\{Gf \in H(G); f \in M_K\}$ étant dense dans $H(G)$, l'application $x \to u_{\nu_x^a}$ est faiblement continue dans $H(G)$, d'où notre corollaire.

LEMME 2. *Soit $H(G)$ le même que ci-dessus. Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X, $\int G_\mu d\mu < +\infty$, alors u_μ a un sens et $u_\mu = G_\mu$.*

On le montrera en séparant aux parties suivantes:

(1) Il existe une mesure de Radon positive ν dans X telle que u_ν ait un sens et $u_\nu = G_\mu$.

En effet l'application

$$\{Gf \in H(G)\,;\, f \in M_K\} \ni Gf \to \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x)$$

est bornée, car, quelle que soit a une constante >0,

$$\left| \int G_a\mu(x) f(x)\, d\xi(x) \right| \leqq \| G_a\mu \| \| Gf \|$$

et

$$\begin{aligned} \| G_a\mu \|^2 &= \iiint \inf\,(G(z, y), a) d\mu(y) d\nu_x^a(z) d\mu(x) \\ &\leqq \iint G_\mu(z) d\nu_x^a(z) d\mu(x) = \iiint G(z, y) d\nu_x^a(z) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leqq \iint \inf\,(G(x, y), a) d\mu(x) d\mu(y) \leqq \iint G_\mu(x) d\mu(x) , \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x) \right|^2 \leqq \left(\int G_\mu(x)\, d\mu(x) \right) \left(\int Gf(x) f(x) d\xi(x) \right) .$$

Donc cette application peut être prolongée sur $H(G)$, et ce prolongement est linéaire et borné. En vertu du théorème de Riesz, G_μ appartient à $H(G)$ et $G_a\mu$ converge fortement vers G_μ dans $H(G)$ avec $a \to +\infty$. Par conséquent, $\mu_a = \int \nu_x^a d\mu(x)$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive ν dans X avec $a \to +\infty$, et alors u_ν a un sens et $G_\mu = u_\nu$.

(2) Les supports de μ et de ν sont égaux, et, quel que soit A un ensemble μ-mesurable de X, si la capacité intérieure de A relative à $H(G)$ est nulle, alors $\mu(A) = 0$.

En effet, $G_a\mu(x)$ converge d'une manière croissante vers $G_\mu(x)$ et donc, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans X telle que u_λ ait un sens dans $H(G)$,

$$\int G_\mu(x) d\lambda(x) = \int u_\nu^*(x) d\lambda(x) .$$

Supposons $S_\mu \neq S_\nu$. Alors il existe une mesure de Radon positive λ dans X et un ouvert ω de X tels que u_λ ait un sens et que l'on ait

$$\int(G_\lambda(x) - G_{\lambda'}(x))d\mu(x) \neq \int(G_\lambda(x) - G_{\lambda'}(x))d\nu(x) ,$$

où λ' est la mesure balayée de λ sur $\mathscr{C}\omega$ relativement à l'espace de Dirichlet $H(G)$[1], mais cela est une contradiction.

Supposons ensuite $\mu(A) \neq 0$. Alors il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mu(K) > 0$. On a évidemment $\int G_{\mu_K} d\mu_K < +\infty$, où μ_K est la restriction de μ sur K, et donc il existe une mesure de Radon positive ν_K portée par K et telle que u_{ν_K} ait un sens et $G_{\mu_K} = u_{\nu_K}$, mais cela est en contradiction avec $\mathrm{cap}_{H(G)}(K) = 0$.

(3) $\mu = \nu$.

Pour cela, il suffit de montrer que u_μ a un sens dans $H(G)$. Soit φ une fonction de $C_K \cap H(G)$. Alors il existe une mesure de Radon positive λ dans X telle que u_λ ait un sens dans $H(G)$ et que l'on ait

$$|\varphi(x)| \leqq u_\lambda(x) \ \xi\text{-p.p. sur } X \text{ et } \|\varphi\| \geqq \|u_\lambda\|$$

(voir [2]). On a donc $|\varphi| \leqq u_\lambda^*$ D-q.p. sur X, et par suite, d'après (2),

$$\int|\varphi| d\mu \leqq \int u_\lambda^* d\mu .$$

On a ensuite

$$\int u_\lambda^* d\mu = \int G_\lambda d\mu = \int G_\mu d\lambda = \int G_\nu d\lambda \leqq \|u_\lambda\|\|u_\nu\| \leqq \|u_\nu\|\|\varphi\| ,$$

et donc, l'application

$$\varphi \in C_K \cap D \to \int \varphi d\mu$$

est linéaire et bornée dans $H(G)$, et elle est prolongée sur $H(G)$. En vertu du théorème de Riesz, u_μ a un sens dans $H(G)$, d'où $\mu = \nu$. La démonstration du lemme 2 est ainsi complète.

On obtient, en même temps, que si, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans $X, \int G_\mu d\mu < +\infty$, alors

---

(1) Soit D un espace de Dirichlet. Pour une mesure de Radon positive μ dans X telle que u_μ ait un sens et pour un fermé F de X, il existe une mesure de Radon positive μ' portée par F, et une seule telle que l'on ait $u_\mu^* \geqq u_{\mu'}^*$ D-$q.p.$ sur X et $u_\mu^* = u_{\mu'}^*$ D-$q.p.$ sur F. On dit que μ' est la mesure balayée de μ sur F relativement à D.

$$\mu_a = \int \nu_x^a d\mu(x)$$

converge vaguement vers μ avec $a \to +\infty$. Cela indique aussi que la capacité intérieure d'ensemble $\{x \in X\,;\, \nu_x^a \not\to \varepsilon_x\}$ est nulle, où ε_x est la mesure de Dirac au point x.

Mais on ne connaît pas si, pour une mesure de Radon réelle μ dans X telle que $\int G_\mu d\mu < +\infty$, u_μ a un sens.

Considérons les noyau-fonctions continues qui satisfont au principe complet du maximum.

LEMME 3. *Soit G une noyau-fonction continue, symétrique et satisfaisant au principe du maximum. Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X, $\int G_\mu d\mu < +\infty$, G_μ appartient à $H(G)$ et on* a

$$\|G_\mu\|^2 \leqq \int G_\mu(x) d\mu(x) .$$

En effet, on peut supposer évidemment que S_μ est compact. On remarque ici que G satisfait au principe de continuité[(2)], et donc on peut supposer que G_μ est finie et continue dans X. Donc, quelle que soit f de M_K,

$$\iint G(x, y) d|\mu - f\xi|(y) d|\mu - f\xi|(x) < +\infty .$$

Considérons l'application

$$\{Gf\,;\, f \in M_K\} \ni Gf \to \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x) .$$

Alors, G étant de type positif, cette application est bornée et par suite, de la même manière que dans le lemme 2, G_μ appartient à $H(G)$ et on a

$$\|G_\mu\|^2 \leqq \int G_\mu(x) d\mu(x) .$$

Remarque. En ce moment, on ne connaît pas s'il existe une mesure de Radon positive μ dans X telle que

$$\|G_\mu\|^2 < \int G_\mu(x) d\mu(x) .$$

---

(2) Cela signifie que, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X à support compact, G_μ est finie et continue dès que la restriction de G_μ sur S_μ l'est aussi. (cf. [5].)

LEMME 4. *Soit H un espace fonctionnel qui vérifie la condition* (c) *dans l'introduction. Si $H \cap M_K$ est dense dans H et si $H \cap C_K$ est dense dans C_K, H est alors un espace de Dirichlet.*

En effet, H_0 désigne l'adhérent de $C_K \cap H$ dans H, et alors H_0 est évidemment un espace fonctionnel qui vérifie la condition (b) dans l'introduction. Pour une fonction u de H_0, il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap H$ $(=C_K \cap H_0)$ qui converge fortement vers u dans H avec $n \to +\infty$. On a, quelle que soit T une contraction normale de $R, T \cdot \varphi_n \in C_K \cap H$ et $\|T \cdot \varphi_n\| \leqq \|\varphi_n\|$. Donc la suite $(T \cdot \varphi_n)$ est bornée dans H_0. D'autre part, on peut supposer que (φ_n) converge ξ-p.p. vers u dans X avec $n \to +\infty$, et donc $(T \cdot \varphi_n)$ converge aussi ξ-p.p. vers $T \cdot u$ dans X. Pour une fonction f de M_K, u_f et $u_f^{(0)}$ désignent le potentiel de f dans H et le potentiel de f dans H_0. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (T \cdot \varphi_n, u_f) = \lim_{n\to\infty} (u_f^{(0)}, T \cdot \varphi_n) &= \lim_{n\to 8} \int T \cdot \varphi_n(x) f(x) d\xi(x) \\ &= \int T \cdot u(x) f(x) d\xi(x) \ ,\end{aligned}$$

et donc $(T \cdot \varphi_n)$ converge faiblement vers $T \cdot u$ dans H avec $n \to +\infty$, d'où $T \cdot u \in H_0$ et $\|T \cdot u\| \leqq \|u\|$. Par conséquent, H_0 est un espace de Dirichlet.

Montrons ensuite $H = H_0$. Soit $H^{(1)}$ (resp. $H_0^{(1)}$) l'espace fonctionnel obtenu par la complété de l'ensemble $\{u_f + f\,;\, f \in M_K\}$ (resp. $\{u_f^{(0)} + f\,;$ $f \in M_K\}$) par la norme

$$\|u_f + f\|_1 = \left(\int (u_f + f) f \, d\xi\right)^{1/2}$$

$$\left(\text{resp. } \|u_f^{(0)} + f\|_{0,1} = \left(\int (u_f^{(0)} + f) f \, d\xi\right)^{1/2}\right) .$$

Alors

$$H^{(1)} = \{u + f\,;\, u \in H, f \in L^2(\xi)\} \ ,$$

où $L^2(\xi)$ est l'espace hilbertien des fonctions dont les carrés sont ξ-sommables et muni de la norme usuelle. On a, quelles que soient u de H et f de $L^2(\xi)$,

$$\|u + f\|_1 \leqq \left(\|u\|^2 + \int |f|^2 d\xi\right)^{1/2} .$$

Les mêmes énoncés pour $H_0^{(1)}$ ont lieu. Par conséquent, $H_0^{(1)}$ est dense dans $H^{(1)}$, car $H_0^{(1)} \supset M_K$ et M_K est dense dans H. Pour une fonction $u+f$ de $H_0^{(1)}$, la norme de u dans $H^{(1)}$ est évidemment égale à la norme de u dans $H_0^{(1)}$, et par suite, $H_0^{(1)}$ est un sous-espace fermé de $H^{(1)}$. Par conséquent $H_0^{(1)} = H^{(1)}$ et donc, quelle que soit f de M_K,

$$\int u_f^{(0)} f \, d\xi + \int |f|^2 d\xi = \int u_f f \, d\xi + \int |f|^2 d\xi \, ,$$

d'où $u_f^{(0)} = u_f$. Cela implique $H_0 = H$.

Remarque. Au lieu de la première hypothèse dans le lemme, il suffit de supposer que $H \cap L^2$ est dense dans H. Cela résulte du fait que la "résolvante" associée à H est égale à celle associée à H_0. Voir [4].

Démonstration du théorème. On suppose d'abord que G vérifie les conditions (1), (2), (3). D'après (1), (2), G est de type positif, et donc il existe l'espace fonctionnel $H(G)$ associé au noyau G. Montrons que $H(G)$ vérifie la condition (c) dans l'introduction. Pour cela, il suffit de montrer que, quelles que soient f, g de $M_K^+, Gf \leqq Gg + 1$ ξ-p.p. sur X dès que $Gf \leqq Gg + 1$ ξ-p.p. sur l'ensemble $\{x \in X ; f(x) > 0\}$. Cela est un résultat de [2]. On choisit une suite croissante (K_n) des compacts de X telle que l'on ait

$$K_n \subset \{x \in X ; f(x) > 0, Gg(x) + 1 \geqq Gf(x)\}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \xi(K_n) = \xi(\{x \in X ; f(x) > 0\}) \, .$$

On a alors $Gf_n(x) \leqq Gg(x) + 1$ partout sur S_{f_n}, où f_n est la restriction de f sur K_n, et donc, d'après le principe complet du maximum pour $G, Gf_n(x) \leqq Gg(x) + 1$ partout sur X. Faisant $n \to +\infty$, on obtient immédiatement $Gf(x) \leqq Gg(x) + 1$ partout sur X.

Soient μ une mesure de Radon positive dans X, à support compact et avec $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$, et F un fermé de X. On prend une suite crois sante (K_n) des compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = F$, et alors, il existe une mesure de Radon positive μ'_n portée par K_n, et une seule telle que l'on ait

$$G_\mu(x) \geqq G_{\mu'_n}(x) \qquad \text{partout sur } X$$

et

$$G_\mu(x) = G_{\mu'_n}(x) \quad G\text{-p.p.p.} \qquad \text{sur } K_n{}^{(3)}$$

(voir [5] et [6]). L'unicité de μ'_n résulte du principe d'énergie pour G. On dit que μ'_n est la mesure balayée de μ sur K_n relativement au noyau G. En ce moment, si $n \leqq m$, on a $\int d\mu'_n \leqq \int d\mu'_m \leqq \int d\mu$ et $\mu'_n \geqq \mu'_m$ sur K_n, car μ'_n est aussi la mesure balayée de μ'_m sur K_n relativement au noyau G. Pour une mesure de Radon positive ν dans X, à support compact et telle que G_ν soit finie et continue dans X, on a, quelle que soit c une constante >0,

$$\inf_K \operatorname{cap}_G(\{x \in \mathscr{C}K\,;\, G_\nu(x) \geqq c\}) = 0\ ,$$

où K est compact, et on a $G_\nu(x) \leqq C$ sur X, où C est une autre constante > 0. Pour deux nombres $c > 0$ et $\delta > 0$ donnés, il existe un compact K de X tel que

$$\operatorname{cap}_G(\{x \in \mathscr{C}K\,;\, G_\nu(x) \geqq c\}) < \delta^2\ .$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int G_\nu(x)d\mu'_n(x) &= \int_K G_\nu(x)d\mu'_n(x) + \int_{\mathscr{C}K} G_\nu(x)d\mu'_n(x)\\ &\leqq \int_K G_\nu(x)d\mu'_n(x) + c\int d\mu'_n + C\left(\int G_\mu(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2}\delta\ .\end{aligned}$$

Faisant $n \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\int G_\nu(x)\,d\mu'(x) &\leqq \varliminf_{n\to\infty} \int G_\nu(x)d\mu'_n(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \int G_\nu(x)d\mu'_n(x)\\ &\leqq \int_K G_\nu(x)\,d\mu'(x) + c\int d\mu + C\left(\int G_\mu(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2}\delta\ ,\end{aligned}$$

car $(\mu'_n)_{n=n_0}^{\infty}$ converge d'une manière décroissante vers μ' sur K avec $n \to +\infty$, où $K \cap F \subset K_{n_0}$. Faisant $\delta \to 0$ et ensuite $c \to 0$, on arrive à

$$\lim_{n\to\infty} \int G_\nu(x)d\mu'_n(x) = \int G_\nu(x)d\mu'(x)\ .$$

On a évidemment $G_\mu(x) \geqq G_{\mu'}(x)$ partout sur X. On montrera $G_\mu(x) = G_{\mu'}(x)$ G-p.p.p. sur F. Pour une mesure de Radon positive ν portée par F, à support compact et avec $\int G_\nu(x)d\nu(x) < +\infty$, il existe un compact

(3) Une propriété a lieu G-p.p.p. sur un ensemble A de X si, quelle que soit λ une measure de Radon positive dans X telle que l'on ait $\int G\lambda(x)d\lambda(x) < +\infty$ et $S_\lambda \subset A$, elle a lieu presque partout pour λ.

K_n de X tel que $\nu(\mathscr{C}K_n) < 1/n$ et que G_{ν_n} soit fini et continu dans X, où ν_n est la restriction de ν sur K_n. On a donc

$$\int G_\mu(x)\, d\nu_n(x) = \int G_{\mu'}(x) d\nu_n(x)$$

Faisant $n \to +\infty$, on arrive à

$$\int G_\mu(x) d\nu(x) = \int G_{\mu'}(x) d\nu(x) ,$$

d'où $G_\mu(x) = G_{\mu'}(x)$ G-p.p.p. sur F. Une telle mesure μ' est uniquement déterminée, qui résulte du principe d'énergie pour G. La mesure μ' s'appelle aussi la mesure balayée de μ sur F relativement au noyau G. On a évidemment $G_\mu \neq G_{\mu'}$ dès que $S_\mu \not\subset F$.

Montrons ensuite que $C_K \cap H(G)$ est dense dans C_K. Pour cela, il suffit de voir que, quels que soient x_0 de X et V un voisinage de x_0, il existe une fonction non-négative et non-zéro de $C_K \cap H(G)$ et portée par V. Soit $G(x_0, x_0) = +\infty$. Pour un voisinage V ouvert et relativement compact de x_0, il existe une mesure de Radon positive ν_V $(\neq 0)$ dans X, à support $\subset V$ et telle que G_{ν_V} soit finie et continue dans X et que

$$G_{\nu_V}(x_0) - G_{\nu'_V}(x_0) > \max_{x \in V^*} (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu'_V}(x)) ,$$

où ν'_V est la mesure balayée de ν_V sur CV relativement au noyau G et V^* est la frontière de V. Posons

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} G_{\nu_V}(x) - G_{\nu'_V}(x) - \inf (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu'_V}(x), m_V) & x \in V , \\ 0 & x \in \mathscr{C}V , \end{cases}$$

où $m_V = \max_{x \in V^*} (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu'_V}(x))$. Alors φ_V appartient à $C_K \cap H(G)$ et on a $S_{\varphi_V} \subset \overline{V}$[(4)], car $H(G)$ vérifie la condition (c) dans l'introduction. Soit $G(x_0, x_0) < +\infty$. Alors il existe un ouvert $w \ni x_0$ tel que, quel que soit (x, y) de $\omega \times \omega, G(x, y) < +\infty$. Quels que soient V un voisinage ouvert, relativement compact de x_0 et avec $\overline{V} \subset \omega$, et ν_V une mesure de Radon positive $(\neq 0)$ dans X et à support $\subset V$,

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} G_{\nu_V}(x) - G_{\nu'_V}(x) & x \in V \\ 0 & x \in \mathscr{C}V \end{cases}$$

(4) La continuité de $G_{\nu'_V}$ dans V résulte du fait que, quel que soit $a > 0$, $\int G_{\nu_y^a{}'} d\nu_V(y)$ est continue.

appartient à $C_K \cap H(G)$ et on a $S_{\varphi_V} \subset \overline{V}$, car $G_{\nu'_V}$ est finie et continue dans ω. On obtient ainsi que $C_K \cap H(G)$ est dense dans C_K.

Montrons finalement que $H(G) \cap M_K$ est dense dans $H(G)$. D'après le principe de continuité et le principe complet du maximum pour G, l'ensemble $\{Gf\,;\, f \in M_K, Gf$ est fini et continu$\}$ est dense dans $H(G)$, et Gf est borné. Donc il suffit de montrer que l'on a, quelles que soient μ une mesure de Radon positive dans X, à support compact et telle que G_μ soit continu et borné, et (ω_n) une suite croissante d'ouverts relativement compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$,

$$\lim_{n\to\infty} \int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) = 0\ ,$$

où μ'_n est la mesure balayée de μ sur $\mathscr{C}\omega_n$ relativement au noyau G (cf. le lemme 3). Soient $c > 0$ et $\delta > 0$ deux nombres donnés. Alors il existe un compact K de X tel que

$$\mathrm{cap}_G\,(\{x \in \mathscr{C}K\,;\, G_\mu(x) \geqq c\}) < \delta^2\ .$$

Pour un entier n tel que $\omega_n \supset K$, on a

$$\begin{aligned}\int G_{\mu'_n}(x)\, d\mu'_n(x) &= \int G_\mu(x) d\mu'_n(x)\\ &\leqq c\int d\mu'_n + C\left(\int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x)\right)^{1/2}\delta\\ &\leqq c\int d\mu + C\left(\int G_\mu(x) d\mu(x)\right)^{1/2}\delta\ ,\end{aligned}$$

où C est une contante > 0 telle que $C \geqq G_\mu(x)$ sur X. Par conséquent, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) = 0\ ,$$

d'où $H(G) \cap M_K$ est dense dans $H(G)$. En utilisant le lemme 4, on obtient que $H(G)$ est un espace de Dirichlet.

Réciproquement, soit G un noyau de Dirichlet. D désigne l'espace de Dirichlet au noyau G. G est évidemment symétrique. On suppose que, pour deux mesures de Radon positives μ, ν dans X et à support compact, $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1$ sur S_μ et $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$. On prend un nombre $\delta > 0$ fixé. On désigne par μ_n la restriction de μ sur

$$\left\{x \in X \,;\, G_{n\nu}(x) + 1 + \delta = \int \inf\,(G(x, y), n)d\nu(y) + 1 + \delta \geqq G_{\mu}(x)\right\} .$$

Alors on a

$$G_{\mu_n}(x) \leqq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta \qquad \text{sur } S_{\mu_n} \text{ et } \int G_{\nu_n}(x)d\nu_n(x) < +\infty ,$$

où ν_n est la mesure définie dans le lemme 2. D'après le corollaire 1, on a, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans X et telle que u_λ ait un sens,

$$\int G_{\mu_n}(x)\, d\lambda(x) = \int u^*_{\mu_n}(x)d\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int G_{\nu_n}(x)d\lambda(x) = \int G_{n\nu}(x)_\nu d\lambda(x) = \int u^*_{\nu_n} d\lambda(x) .$$

En utilisant les mesures balayées relativement à D, on obtient $G_{\mu_n}(x) \leqq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta$ ξ-p.p. sur X. La fonction $G_{n\nu} + (1 + \delta) - G_{\mu_n}$ étant continue dans $\mathscr{C}S_{\mu_n}$, on a

$$G_{\mu_n}(x) \leqq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta \leqq G_\nu(x) + 1 + \delta$$

partout sur X. La suite (μ_n) converge d'une manière croissante vers μ dans X avec $n \to +\infty$, et donc $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1 + \delta$ partout sur X. Faisant $\delta \to 0$, on arrive à la conclusion que $G_\mu(x) \leqq G_\nu(x) + 1$ partout sur X, d'où G satisfait au principe complet du maximum.

Si l'on a, pour une mesure de Radon réelle μ dans X, $\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$, alors G_μ appartient à D et

$$\int G_\mu(x)d\mu(x) = \|G_\mu\|^2 \geqq 0$$

(cf. le lemme 2). Si $\int G_\mu(x)d\mu(x) = 0$, alors $G_\mu = 0$, d'où $\mu = 0$, car $C_K \cap D$ est dense dans D. Cela implique ce que G satisfait au principe d'énergie.

Montrons finalement que G est faiblement régulière. Supposons qu'il existe un point x_0 de X et un nombre $c_0 > 0$ tels que

$$\inf_K \operatorname{cap}_G (\{y \in \mathscr{C}K \,;\, G(x_0, y) > c_0\}) > 0 .$$

Pour un nombre $c > c_0$, on a

$$\{y \in \mathscr{C}K \,;\, G(x_0, y) > c_0\} = \{y \in \mathscr{C}K \,;\, G_{c\varepsilon_{x_0}}(y) = \inf\,(G(x_0, y), c) > c_0\} .$$

$G_{c\varepsilon_{x_0}}$ appartenant à D, il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap D$ qui converge fortement vers $G_{c\varepsilon_{x_0}}$ dans D avec $n \to +\infty$. Soit (K_n) une suite croissante de compacts de X telle que l'on ait $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$ et $K_n \supset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\varphi_k}$. D'après notre hypothèse, il existe une mesure de Radon positive μ_n dans X, à support compact et telle que l'on ait

$$S_{\mu_n} \subset \{y \in \mathscr{C}K_n \,;\, G_{c\varepsilon_{x_0}}(y) > c_0\}$$

et

$$a \leqq \int G_{\mu_n}(x) d\mu_n(x) = \int d\mu_n \leqq \mathrm{b} \ ,$$

où a, b sont constantes positives. On peut supposer que la suite (G_{μ_n}) converge faiblement vers une fonction u de D dans D avec $n \to +\infty$, et donc

$$(u, G_{c\varepsilon_{x_0}}) = \lim_{n\to\infty} (u_{\mu_n}, G_{c\varepsilon_{x_0}}) = \lim_{n\to\infty} \int G_{c\varepsilon_{x_0}}(y) d\mu_n(y) > ac_0 > 0 \ .$$

D'autre part, on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, u_{\mu_n}) = (G_{c\varepsilon_{x_0}}, u) \ ,$$

d'où une contradiction. Par conséquent, G est faiblement régulière. La démonstration est ainsi complète.

Remarque. Lorsque G est symétrique, faiblement régulière et satisfait au principe complet du maximum, on ne peut pas toujours affirmer que G satisfait au principe d'énergie. Si X est connexe et si $G \neq 0$, le présent énoncé a-t-il lieu?

PROPOSITION. *Soit G une noyau-fonction continue qui vérifie les conditions* (1), (2) *et* (3) *dans le théorème. Alors pour que G soit un noyau d'algèbre de Dirichlet, il faut et il suffit que G soit bornée.*

On dit qu'un espace de Dirichlet D est une algèbre de Dirichlet si, quelles que soient u et v de D, uv appartient à D et s'il existe une constante $C(D) > 0$ telle que $\|uv\| \leqq C(D)\|u\|\|v\|$.

Démonstration de la proposition. On désigne par D l'espace de Dirichlet au noyau G. On suppose d'abord que D est une algèbre de Dirichlet. Pour un point x de X, on choisit une famille $(V_\alpha)_\alpha$ filtrante à gauche d'ouverts relativement compacts de X telle que $\bigcap_\alpha \overline{V}_\alpha = \bigcap_\alpha V_\alpha = \{x\}$. Il existe une mesure de Radon positive ν_α portée par $\overline{V}_\alpha$ telle que

$$\int d\nu_\alpha = \int G_{\nu_\alpha}(x) d\nu_\alpha(x) = \mathrm{cap}_D\,(V_\alpha)$$

(cf. [1] et le lemme 1). On a donc

$$\mathrm{cap}_D\,(V_\alpha) = \int (G_{\nu_\alpha}(x))^2 d\nu_\alpha \leqq C(D)\,(\mathrm{cap}_D\,(V_\alpha))^{3/2}\,,$$

d'où

$$\mathrm{cap}_D\,(V_\alpha) \geqq \left(\frac{1}{C(D)}\right)^2 .$$

Par conséquent, tout le point vaguement adhérent de $(\nu_\alpha)_\alpha$ n'est pas égal à 0, et il est portée par $\{x\}$. Cela implique $G(x, x) \leqq (C(D))^2$, d'où G est bornée sur $X \times X$.

On suppose réciproquement que G est bornée, et alors, quel que soit x de X, u_{ε_x} a un sens et il existe une constante C telle que $\|u_{\varepsilon_x}\| \leqq C$. On a donc, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$\sup_{x\in X} |\varphi(x)| = \sup_{x\in X} |(u_{\varepsilon_x}, \varphi)| \leqq \sup_{x\in X} \|u_{\varepsilon_x}\| \|\varphi\| \leqq C\|\varphi\|\,,$$

et par suite, toute la fonction u de D est continue et bornée dans X et on a

$$\sup_{x\in X} |u(x)| \leqq C\|u\|\,.$$

Quelles que soient u et v deux fonctions de D,

$$|u(x)v(x)| \leqq (\sup_{x\in X} |u(x)|)|v(x)| + (\sup_{x\in X} |v(x)|)|u(x)|$$

et

$$|u(x)v(x) - u(y)v(y)| \leqq (\sup_{x\in X} |u(x)|)|v(x) - v(y)| + (\sup_{x\in X} |v(x)|)|u(x) - u(y)|\,.$$

Donc, en utilisant un théorème de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]), on a $uv \in D$ et

$$\|uv\|^2 \leqq (\sup_{x\in X} |u(x)|)\|v\| + (\sup_{x\in X} |v(x)|)\|u\| \leqq 2C\|u\|\|v\|\,,$$

d'où D est une algèbra de Dirichlet. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 3. *Soit G une noyau-fonction continue qui vérifie les conditions* (1), (2) *et* (3) *dans le théorème. Alors, pour que G soit finie* *dans* $X \times X$, *il faut et il suffit que, quel que soit* ω *un ouvert relativement compact de* X, *le sous-espace fermé* $H_\omega(G)$ *obtenu par la complété de* $\{\varphi \in C_K \cap H(G); S_\varphi \subset \omega\}$ *soit une algèbre de Dirichlet relatif à* ω *et à* ξ.

Cela peut être montré immédiatement de la présente proposition.

RÉFÉRENCES

[1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45**, 1959, p. 208–215.

[2] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**, 1965, p. 87–98.

[3] M. Itô, Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J. **44**, 1971, p. 133–164.

[4] ——, Sur les noyaux d'ordre fractionnaire associés au noyau de Dirichlet, Hiroshima Math. J., **1**, 1971, 123–143.

[5] M. Kishi, Maximum principles in the potential theory, Nagoya Math. J., **23**, 1963, p. 165–187.

[6] N. Ninomiya, Etude sur la théorie du potential pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. Ser. A, **8**, 1957, p. 147–179.

Institut Mathématique, Université de Nagoya