

## PUISSANCE FRACTIONNAIRE D'UN NOYAU POSITIF DONT LE CARRE EST ENCORE UN NOYAU

MASANORI KISHI

### § 1. Introduction

Le noyau de Riesz-Frostman dans l'espace euclidien à  $d(\geq 3)$  dimensions est à la puissance fractionnaire du noyau de Newton. On trouve la conformité dans la théorie des espaces de Dirichlet; on construit un noyau à la puissance fractionnaire d'un noyau associé à l'espace de Dirichlet spécial, qui détermine à nouveau un espace de Dirichlet spécial [2]. En notant que le noyau de Dirichlet est positif et symétrique, et satisfait au principe complet du maximum, on s'interroge: est-il possible de construire de bons noyaux à la puissance fractionnaire pour des noyaux de genre plus large?

Dans cette note nous considérerons des noyaux positifs dont les carrés (= les composés avec eux-mêmes) sont encore des noyaux et qui satisfont au principe de domination, et construirons des noyaux à la puissance fractionnaire en utilisant des résolvantes.

### § 2. Noyaux positifs et potentiels

Soient  $X$  un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et  $\xi$  une mesure de Radon positive sur  $X$ . Désignons par  $\mathcal{E}$  la famille des ensembles  $\xi$ -mesurables et par  $\mathcal{E}_0$  la sous famille de  $\mathcal{E}$  constituée par les ensembles relativement compacts. Nous considérons un noyau positif  $N$  relatif à  $X$  et à  $\xi$  [4]; il est une fonction positive sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ , telle que pour tout ensemble fixe  $e_1 \in \mathcal{E}$ ,  $N(e_1, e)$  et  $N(e, e_1)$  sont dénombrablement additives sur  $\mathcal{E}$ , et si  $e_1$  est relativement compact, elles sont absolument continues par rapport à  $\xi$  et les dérivées sont localement  $\xi$ -sommables. Désignons par  $\mathcal{M}^+$  la famille des fonctions positives sur  $X$  qui sont  $\xi$ -mesurables. Deux fonctions de  $\mathcal{M}^+$  qui sont égales  $\xi$ -p.p. sur un ensemble  $e$  de  $\mathcal{E}$  sont considérées comme identiques sur  $e$ . Toute fonction  $f$  de  $\mathcal{M}^+$  détermine de manière unique à des ensembles de  $\xi$ -mesure nulle près, un ensemble de

---

Received February 18, 1971

$\mathcal{E}$ , où  $f(x) > 0$ , que nous notons  $Sf$ . Nous posons  $\mathcal{B}^+ = \{f \in \mathcal{M}^+; f \text{ est bornée } \xi\text{-p.p.}\}$  et  $\mathcal{B}_0^+ = \{f \in \mathcal{B}^+; Sf \in \mathcal{E}_0\}$ .

Nous définissons le potentiel de  $f \in \mathcal{M}^+$  par rapport à  $N$  par la relation

$$Nf(e) = \int f(y)N(e, dy).$$

Cela est absolument continu d'après la définition du noyau. Nous notons  $Nf(x)$  la dérivée de  $Nf(e)$  par rapport à  $\xi$ . La famille des fonctions de  $\mathcal{M}^+$  dont les potentiels sont localement  $\xi$ -sommables est désignée par  $\mathcal{L}^+(N)$  ou simplement par  $\mathcal{L}^+$ . Evidemment nous avons  $\mathcal{B}_0^+ \subset \mathcal{L}^+$ . De la même manière nous définissons le potentiel adjoint  $\check{N}f(x)$  de  $f$  par rapport au noyau adjoint  $\check{N} : \check{N}(e_1, e_2) = N(e_2, e_1)$ .

Etant donnés deux noyaux positifs  $N_1$  et  $N_2$ , nous posons

$$(1) \quad N_1N_2(e_1, e_2) = \int \check{N}_1\chi_{e_1}(x)N_2\chi_{e_2}(x)d\xi(x),$$

où  $\chi_e$  désigne la fonction caractéristique. Si cette relation définit un noyau positif,  $N_1N_2$  est appelé le noyau composé de  $N_1$  et  $N_2$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $N_1N_2$  soit un noyau est la convergence de l'intégrale (1) pour tous les ensembles  $e_1$  et  $e_2$  de la famille  $\mathcal{E}_0$ . Nous notons le noyau unité  $U : U(e_1, e_2) = \xi(e_1 \cap e_2)$ .

Nous dirons que  $N$  satisfait au principe de domination si le fait que  $Nf(x) \leq Ng(x)$  sur  $Sf$  ( $f, g \in \mathcal{B}_0^+$ ) implique la même inégalité dans  $X$ . En remplaçant  $Ng$  par  $Ng + 1$ , nous obtenons le principe complet du maximum. Notons que si  $N$  satisfait au principe de domination (principe complet du maximum, resp.) et si  $Nf(x) \leq Ng(x)$  ( $Nf(x) \leq Ng(x) + 1$ , resp.) sur  $Sf$  pour  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{L}^+$ , alors la même inégalité est vraie dans  $X$ .

### § 3. Résolvantes

Une résolvante associée à un noyau positif  $N$  relatif à  $X$  et à  $\xi$  est, par définition, une famille  $\{N_p\}$  ( $p > 0$ ) de noyaux positifs relatifs à  $X$  et à  $\xi$ , telle qu'on ait, quel que soit  $p > 0$ ,

$$(2) \quad N - N_p = pNN_p = pN_pN.$$

On connaît les propositions suivantes (voir [4], [6], [8]).

PROPOSITION 1. *Si  $N$  satisfait au principe de domination, il existe au plus une résolvante associée à  $N$ .*

PROPOSITION 2. Soient  $f \in \mathcal{B}_0^+$  et  $e \in \mathcal{E}_0$ . La fonction  $(0, \infty) \ni p \rightarrow N_p f(e)$  est décroissante et analytique.

Nous posons  $N_0 f(e) = \lim_{p \downarrow 0} N_p f(e)$ . Alors  $N_0$  est un noyau positif majoré par  $N$ .

PROPOSITION 3. Supposons que  $N = N_0$ . Alors, quel que soit  $p > 0$ ,  $N + p^{-1}U = p^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n$ .

D'après cette proposition,  $N + p^{-1}U$  satisfait au principe de domination. Cela n'est pas loin de dire que  $N$  lui-même satisfait au principe de domination.

DEFINITION. Nous dirons que  $N$  est positif en moyenne, si  $N(e, X) > 0$  pour tout ensemble  $e \in \mathcal{E}_0$  avec  $\xi(e) > 0$ .

PROPOSITION 4. Si  $N$  est positif en moyenne et si  $N + p^{-1}U$  satisfait au principe de domination pour tout  $p > 0$ , alors  $N$  satisfait au principe de domination.

COROLLAIRE. Supposons qu'il existe une résolvante associée à  $N$  telle que  $N = N_0$ . Si  $N$  est positif en moyenne,  $N$  satisfait au principe de domination.

PROPOSITION 5. Supposons qu'il existe une résolvante associée à  $N$  telle que  $N = N_0$ . Alors  $N$  satisfait au principe complet du maximum si et seulement si  $pN_p 1(x) \leq 1$  dans  $X$ .

Notons que  $N = N_0$  si  $N^2$  est un noyau.

#### § 4. Construction de résolvantes

On sait bien que si  $N$  est borné (c-à-d, il existe une constante  $M$  telle que  $N1(x) \leq M$  sur  $X$ ) et satisfait au principe de domination, alors il existe une seule résolvante associée à  $N$ . Nous allons construire une résolvante dans le cas où  $N$  n'est pas borné.

LEMME 1. Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux ensembles de  $\mathcal{E}$  avec  $a_1 \subset a_2$ . Posons  $N^{(i)}(e_1, e_2) = N(e_1 \cap a_i, e_2 \cap a_i)$  ( $i = 1, 2$ ), en supposant que  $N$  satisfait au principe de domination. Si  $\{N_p^{(i)}\}$  ( $p > 0$ ) est une résolvante associée à  $N^{(i)}$ , on a, quelle que soit  $f \in \mathcal{B}_0^+$  avec  $Sf \subset a_1$ ,  $N_p^{(1)} f(x) \geq N_p^{(2)} f(x)$  sur  $a_1$ .

Démonstration. La fonction  $g_i = N_p^{(i)} f$  est dans la famille  $\mathcal{L}^+(N)$ . En notant que  $N^{(i)} f = \chi_{a_i} N(\chi_{a_i} f)$ , nous obtenons sur  $a_i$

$$Nf = N^{(i)} f = N_p^{(i)} f + pN^{(i)} N_p^{(i)} f = g_i + pN^{(i)} g_i,$$

d'où nous déduisons, en écrivant  $g_1 - g_2 = h = h^+ - h^-$ ,

$$h^+ + pN(\chi_{a_1}h^+) = h^- + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-).$$

Donc nous avons sur  $S(\chi_{a_1}h^+)$

$$pN(\chi_{a_1}h^+) \leq pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-).$$

Cette inégalité est vraie sur  $X$  par le principe de domination, et donc

$$\begin{aligned} h^- + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-) \\ = h^+ + pN(\chi_{a_1}h^+) \leq h^+ + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-) \end{aligned}$$

sur  $a_1$ . Cela nous donne  $h^- \leq h^+$  et  $g_1 \geq g_2$  sur  $a_1$ .

**THEOREME 1.** *Soit  $N$  un noyau positif tel qu'il satisfasse au principe de domination et  $N^2$  soit encore un noyau. Alors une seule résolvante est associée à  $N$ .*

*Démonstration.* Prenons une suite croissante  $\{K_n\}$  de compacts telle que  $\bigcup_n K_n = X$ , et posons  $N^{(n)}(e_1, e_2) = N(e_1 \cap K_n, e_2 \cap K_n)$ . D'après le théorème de  $\overset{n}{L}$ usin nous pouvons supposer que les noyaux  $N^{(n)}$  sont bornés. Donc nous avons les résolvantes  $\{N_p^{(n)}\}$  associées aux noyaux  $N^{(n)}$ , puisque le principe de domination est vérifié. Si  $e_1$  et  $e_2$  sont dans  $\mathcal{E}_0$ ,  $\{N_p^{(n)}(e_1, e_2)\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) est décroissante d'après le lemme 1, et  $N_p(e_1, e_2) = \lim_n N_p^{(n)}(e_1, e_2)$  définit un noyau positif. Il nous faut vérifier l'équation résolvante (2): soient  $f$  et  $g$  juctions de  $\mathcal{B}_0^+$ . Alors

$$N^{(n)}f \cdot \check{N}_p^{(n)}g = N^{(n)}f \{ \check{N}^{(n)}g - p\check{N}^{(n)}\check{N}_p^{(n)}g \} \leq Nf \cdot \check{N}g.$$

La dernière fonction est  $\xi$ -sommable, puisque  $N^2$  est noyau:  $\int \check{N}f \cdot Ngd\xi = \int N^2f \cdot gd\xi < \infty$ . Par conséquent, d'après le théorème de convergence de Lebesgue,

$$\begin{aligned} p \int N_p Nf \cdot gd\xi &= p \int Nf \cdot \check{N}_p g d\xi = \lim_n p \int N^{(n)}f \cdot \check{N}_p^{(n)}g d\xi \\ &= \lim_n p \int N_p^{(n)} N^{(n)}f \cdot gd\xi = \lim_n \int (N^{(n)}f - N_p^{(n)}f)gd\xi \\ &= \int (Nf - N_p f)gd\xi. \end{aligned}$$

Donc  $pN_p N = N - N_p$ . De la même manière nous obtenons  $pNN_p = N - N_p$ .

*Remarques.* 1) Il n'existe pas toujours de résolvante bien que  $N$  satisfasse au principe de domination. En effet, si  $\xi(X) = \infty$  et  $N(e_1, e_2) = \xi(e_1) \cdot \xi(e_2)$ ,  $N$  satisfait au principe complet du maximum, mais il n'existe pas de résolvante associée à  $N$ .

2) D'après Hunt-Lion ([3], [7]), il existe une résolvante associée à  $N$ , si  $N$  est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini et s'il satisfait au principe complet du maximum. Nous avons des noyaux continus tels qu'ils ne tendent pas vers 0 à l'infini et dont les carrés sont des noyaux. Par exemple, le noyau  $N$  d'Heaviside sur l'espace à 1-dimension: le noyau de convolution défini par

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

La résolvante  $\{N_p\}$  est donnée par

$$k_p(x) = \begin{cases} e^{-px} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

### § 5. Puissance fractionnaire

Modifiant la définition de la puissance fractionnaire d'un opérateur fermé [9], nous définissons celle d'un noyau positif comme suit.

DEFINITION. Soit  $\{N_p\}$  une résolvante associée à  $N$ . Pour une constante  $\alpha$  telle que  $0 < \alpha < 1$ , nous posons

$$(3) \quad N^\alpha(e_1, e_2) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty p^{-\alpha} N_p \chi_{e_2}(e_1) dp.$$

Quand  $N^\alpha$  définit un noyau, nous l'appelons *la puissance fractionnaire d'ordre  $\alpha$  du noyau  $N$* .

DEFINITION. Nous dirons que  $N$  est *spécifiquement borné*, si, quels que soient  $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_0$ ,  $\sup_p p N_p(e_1, e_2) < \infty$ .

Si  $N$  est spécifiquement borné, l'intégrale (3) converge pour tous les ensembles  $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_0$ , et elle définit un noyau. On sait que si  $N$  satisfait au principe complet du maximum, il est spécifiquement borné.

DEFINITION. Nous dirons que  $N$  est *fortement positif*, si, pour tout  $e \in \mathcal{E}_0$  avec  $\xi(e) > 0$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{B}_0^+$  telle que  $Nf \geq \chi_e$  sur  $X$ .

On voit facilement que  $N$  est positif en moyenne et spécifiquement borné, s'il est fortement positif. Notons qu'un noyau de convolution défini par une mesure de Radon positive  $\kappa$  est fortement positif si  $\kappa \neq 0$ , et donc l'intégrale (3) converge toujours et la puissance fractionnaire est bien définie.

Nous considérons des noyaux spécifiquement bornés sans le mentionner.

DEFINITION. Une suite  $\{N_n\}$  de noyaux est dite *converger faiblement vers*  $N$ , si  $Nf(e) = \lim_n N_n f(e)$  pour toute  $f \in \mathcal{B}_0^+$  et pour tout  $e \in \mathcal{E}_0$ .

D'après (3),  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} N^\alpha = N^{\alpha_0}$  faiblement si  $0 < \alpha_0 < 1$ .

THEOREME 2. Si  $N^2$  est un noyau,  $\lim_{\alpha \uparrow 1} N^\alpha = N$  faiblement.

Démonstration. Soient  $f \in \mathcal{B}_0^+$ ,  $e \in \mathcal{E}_0$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous prenons une constante  $M > 1$  telle que

$$\text{Max} \{Nf(e), \sup_p pN_p f(e)\} \cdot \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} dp < \varepsilon.$$

Alors nous avons pour  $\alpha$  tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left| \int_M^\infty \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e) dp - \int_M^\infty p^{-\alpha} N_p f(e) dp \right| \right. \\ & \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} Nf(e) dp + \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} (\sup_p pN_p f(e)) dp \right\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^M \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e) dp - \int_0^M p^{-\alpha} N_p f(e) dp \right| \\ & \leq \int_0^M p^{-\alpha} (Nf(e) - N_p f(e)) dp + \int_0^M \frac{p^{1-\alpha}}{1+p} Nf(e) dp \\ & \leq \int_0^M p^{1-\alpha} N_p Nf(e) dp + M \int_0^M Nf(e) dp \\ & \leq M^2 \{N^2 f(e) + Nf(e)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} |Nf(e) - N^\alpha f(e)| &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left| \int_0^\infty \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e) dp - \int_0^\infty p^{-\alpha} N_p f(e) dp \right| \\ &\leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} M^2 \{N^2 f(e) + Nf(e)\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{\alpha \uparrow 1} |Nf(e) - N^\alpha f(e)| \leq \varepsilon$  et  $\lim_{\alpha \uparrow 1} N^\alpha = N$  faiblement.

*Remarques.* Même si  $N^2$  est un noyau,  $N^\alpha$  ne tend pas vers  $U$  faiblement quand  $\alpha \downarrow 0$ .

LEMME 2. Si  $p > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  et si  $e_1$  et  $e_2$  sont dans  $\mathcal{E}_0$ ,

$$N_p N^\alpha(e_1, e_2) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty q^{-\alpha} N_p N_q(e_1, e_2) dq.$$

En effet, on peut approcher l'intégrale par des sommes riemanniennes.

THEOREME 3. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs tels que  $0 < \alpha + \beta < 1$ , on a  $N^\alpha N^\beta = N^{\alpha+\beta}$ .

*Démonstration.* Cela est vérifié par un calcul élémentaire en utilisant le lemme précédent, l'équation résolvante et

$$(VP) \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{t-1} dt = \pi \cot \alpha \pi.$$

LEMME 3. Il existe une résolvante associée à  $N^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

*Démonstration.* La résolvante est donnée par la relation

$$(4) \quad N_p^{(\alpha)}(e_1, e_2) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^\alpha}{p^2 + 2pq^\alpha \cos \alpha \pi + q^{2\alpha}} N_q \chi_{e_2}(e_1) dq.$$

On montre les égalités  $N^\alpha - N_p^{(\alpha)} = p N^\alpha N_p^{(\alpha)} = p N_p^{(\alpha)} N^\alpha$ , en utilisant

$$(VP) \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{a^2 + 2at^\alpha \cos \alpha \pi + t^{2\alpha}} \frac{1}{t-1} dt = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \frac{a + \cos \alpha \pi}{a^2 + 2a \cos \alpha \pi + 1} \quad (a > 0).$$

THEOREME 4. Pour tout  $\alpha, \beta$  avec  $0 < \alpha, \beta < 1$ , on a  $(N^\alpha)^\beta = N^{\alpha\beta}$ .

*Démonstration.* En vertu du fait que

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t^2 + 2t \cos \alpha \pi + 1} dt = \pi \frac{\sin \alpha \beta \pi}{\sin \alpha \pi \sin \beta \pi},$$

on a

$$\begin{aligned} (N^\alpha)^\beta &= \frac{\sin \beta \pi}{\pi} \int_0^\infty p^{-\beta} N_p^{(\alpha)} dp \\ &= \frac{\sin \alpha \pi \sin \beta \pi}{\pi^2} \int_0^\infty p^{-\beta} dp \int_0^\infty \frac{q^\alpha}{p^2 + 2pq^\alpha \cos \alpha \pi + q^{2\alpha}} N_q dq \\ &= \frac{\sin \alpha \pi \sin \beta \pi}{\pi^2} \int_0^\infty q^\alpha N_q dq \int_0^\infty \frac{p^{-\beta}}{p^2 + 2pq^\alpha \cos \alpha \pi + q^{2\alpha}} dp \\ &= \frac{\sin \alpha \beta \pi}{\pi} \int_0^\infty q^{-\alpha\beta} N_q dq = N^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

LEMME 4.  $N_p^{(\alpha)}$  tend vers  $N^\alpha$  faiblement quand  $p \downarrow 0$ .

C'est immédiate de l'intégrale (4).

THEOREME 5. Soit  $N$  un noyau positif satisfaisant au principe de domination tel que  $N^2$  soit encore un noyau. Si  $N$  est spécifiquement borné et positif en moyenne, alors la puissance fractionnaire  $N^\alpha$  définie par (3) satisfait au principe de domination.

Démonstration. D'après les lemmes 3 et 4,  $N^\alpha$  est un noyau dont la résolvante associée est  $N_p^{(\alpha)}$  et  $N_0^{(\alpha)} = N^\alpha$ . Donc quel que soit  $p > 0$ ,  $N + p^{-1}U$  est proportionnel à un noyau élémentaire d'après la proposition 3. Nous montrons par l'absurde que  $N^\alpha$  est positif en moyenne. S'il existait un ensemble  $e_1 \in \mathcal{E}_0$  avec  $\xi(e_1) > 0$  tel que  $N^\alpha(e_1, e_2) = 0$  pour tout  $e_2 \in \mathcal{E}_0$ , on aura  $N_p(e_1, e_2) = 0$  et donc  $N(e_1, e_2) = 0$ , puisque  $N_p$  est décroissante.

COROLLAIRE 1. Soit  $N$  un noyau de convolution satisfaisant au principe de domination. Si  $N^2$  est un noyau, la puissance fractionnaire est un noyau de convolution satisfaisant au principe de domination.

COROLLAIRE 2. Si  $N$  satisfait au principe complet du maximum et  $N^2$  est un noyau, la puissance fractionnaire satisfait au même principe.

En effet, on a  $pN_p^{(\alpha)} 1 \leq 1$  sur  $X$ .

## § 6. Exemples

1)  $N = aU$ , où  $a$  est une constante  $> 0$ . On voit facilement que la résolvante est donnée par  $N_p = a(1 + ap)^{-1}U$  et la puissance fractionnaire  $N^\alpha$  est égale à  $a^\alpha U$ .

2) Noyau élémentaire  $N = \sum_{n=0}^{\infty} G^n$ . La résolvante  $N_p$  est donnée par  $N_p = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + p)^{-(n+1)} G^n$ , et donc

$$N^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} G^n.$$

Il satisfait au principe de domination, et au principe complet du maximum si  $G1(x) \leq 1$ . Il est un noyau élémentaire d'un générateur convenable [5], [6].

3) Noyau de Riesz-Frostman. Soit  $N$  le noyau de Newton dans l'espace à  $d (\geq 3)$  dimensions défini par



$$k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} |x|^{2-d}.$$

La résolvante  $N_p$  est le noyau de convolution défini par

$$k_p(x) = \int_0^\infty e^{-pt} (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dt.$$

Par conséquent, la puissance fractionnaire est le noyau de Riesz-Frostman: le noyau de convolution défini par

$$k^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\alpha)} |x|^{2\alpha-d}.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 5, il satisfait au principe complet du maximum, et le théorème 3 nous donne

$$|x|^{2\alpha-d} |x|^{2\beta-d} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha - \beta\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{d}{2} - \beta\right)} |x|^{2(\alpha+\beta)-d}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des nombres positifs avec  $0 < \alpha + \beta < 1$ .

4) *Noyau de Bessel.* Soit  $N$  le noyau de convolution défini par  $k_{1/2}(x)$  de l'exemple précédent. Alors la résolvante est donnée par  $k_{(1/2)+p}(x)$  et donc la puissance fractionnaire est le noyau de convolution défini par  $k^{(\alpha)}(x)$  dont la transformée de Fourier est égale à  $2^\alpha/(1+4\pi^2|y|^2)^\alpha$ . C'est le noyau de Bessel qui satisfait au principe complet du maximum si  $0 < \alpha \leq 1$ . La fonction  $k^{(\alpha)}(x)$  est donnée par

$$\frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\alpha)} K_{\frac{d}{2}-\alpha}(|x|) |x|^{\alpha - \frac{d}{2}},$$

où  $K$  est la fonction de Bessel modifiée [1].

5) *Noyau d'Heaviside.* Comme nous l'avons mentionné, la résolvante est donnée par

$$k_p(x) = \begin{cases} e^{-px} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

Donc la puissance fractionnaire est définie par

$$k^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] N. Aronszajn, K.T. Smith, Theory of Bessel potentials, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 385–475.
- [ 2 ] A. Beurling, J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. N.A.S.*, **45** (1959), 208–215.
- [ 3 ] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, II, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 44–93, 316–369.
- [ 4 ] M. Itô, Sur les principes divers du maximum et type positif, à paraître.
- [ 5 ] ———, Le principe de domination pour les noyaux tayloriens, à paraître.
- [ 6 ] M. Kishi, Positive kernels and potentials, *Lecture notes* (1970/71).
- [ 7 ] G. Lion, Famille d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966), 389–453.
- [ 8 ] P.A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966.
- [ 9 ] K. Yosida, *Functional analysis*, 2nd edition, Springer, 1968.

*Université de Nagoya*