

SUR LES ÉQUATIONS $u_{tt} + t^\alpha u_{xx} = f$ ($\alpha \geq 0$)

TADATO MATSUZAWA

§ 1. Introduction.

Le but principal de cette note est de démontrer les Théorème 4.2 et 6.1. Pour l'effectuer nous utiliserons la méthode de développement par les fonctions propres cf. [6]. Nous ne utilisons pas la méthode de la régularisation elliptique, mais les résultats de Baouendi [1] sont essentiels.

Nous démontrerons la régularité (dans le § 5) et l'analyticité (dans le § 6) de la solution des équations

$$(1.1) \quad u_{tt} + t^{2k} u_{xx} = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

comme application de l'estimation obtenue dans le Théorème 4.2.

Nous notons que l'hypoellipticité des équations (1.1) a été déjà obtenue comme dans le cas particulier des résultats dans [1] et [3].

§ 2. Un problème de Dirichlet.

Soient $\Omega = (0 < x < 1)$, $Q = \Omega \times (0 < t < T)$ et $\Gamma = \partial Q$.

Pour α réel ≥ 0 , on considère l'espace de Hilbert $V = V(Q)$ comme suit:

$$V = \{u; u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), t^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))\}$$

avec la norme

$$\|u\|_V = (\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|t^{\frac{\alpha}{2}} u_x\|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Posons:

$$\mathring{V} = \text{adhérence de } C_0^\infty(Q) \text{ dans } V = V(Q).$$

La norme de \mathring{V} est équivalente à

$$(\|u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|t^{\frac{\alpha}{2}} u_x\|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

DÉFINITION 2.1. Soit $f \in L^2(Q)$, nous appelons $u \in \mathring{V}$ une solution du problème de Dirichlet:

$$(2.1) \quad Lu = -u_{tt} - t^\alpha u_{xx} = f \quad \text{dans } Q,$$

$$(2.2) \quad u|_\Gamma = 0$$

si u vérifie

$$(2.3) \quad (u_t, v_t) + (t^{\frac{\alpha}{2}} u_x, t^{\frac{\alpha}{2}} v_x) = (f, v)$$

pour tout $v \in \mathring{V}$. Ici $(,)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(Q)$.

Considérons la forme sesquilinéaire

$$E(u, v) = (u_t, v_t) + (t^{\frac{\alpha}{2}} u_x, t^{\frac{\alpha}{2}} v_x), \quad u, v \in \mathring{V}.$$

Evidemment, pour tout $v \in \mathring{V}$, la forme $u \rightarrow E(u, v)$ est continue sur \mathring{V} . De plus, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$(2.4) \quad E(v, v) \geq \gamma \|v\|_{\mathring{V}}^2$$

pour tout $v \in \mathring{V}$.

Et, la forme

$$v \rightarrow (f, v)$$

est continue sur \mathring{V} . Alors, par le théorème de Riesz, nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. Soit $f \in L^2(Q)$. Il existe une solution u unique dans \mathring{V} pour le problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a l'inégalité

$$(2.5) \quad \|u\|_{\mathring{V}} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}.$$

La constante C ne dépend pas de $f \in L^2(Q)$. (Dans la suite, les C désignent des constantes diverses.)

§ 3. La méthode de développement par les fonctions propres.

Considérons le problème des valeurs propres:

$$(3.1) \quad X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{dans } \Omega = (0, 1),$$

$$(3.2) \quad X(0) = X(1) = 0.$$

Le système orthonormal des fonctions propres:

$$\left\{ g_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi \nu x, \quad \nu = 1, 2, \dots \right\}$$

est complet dans $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$(3.3) \quad -\frac{d^2}{dx^2} g_\nu(x) = -(\pi\nu)^2 g_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

$$(3.4) \quad g_\nu \in \dot{H}^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \nu = 1, 2, \dots.$$

Pour $f(x, t) \in L^2(\Omega \times (0, T)) = L^2(Q)$, l'intégrale

$$f_\nu(t) = \int_\Omega f(x, t) g_\nu(x) dx$$

a un sens p.p. dans $(0, T)$ et on a

$$f(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) f_\nu(t)$$

et

$$\|f(x, t)\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu(t)\|_{L^2(0, T)}^2.$$

Ensuite, désignons par $u_\nu = u_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots$, les solutions du problème aux bords:

$$(3.5) \quad -u_{tt}(t) + (\pi\nu)^2 t^\alpha u(t) = f_\nu(t) \quad \text{dans } (0, T),$$

$$(3.6) \quad u_\nu(0) = u_\nu(T) = 0.$$

Les solutions $u_\nu(t)$ existent uniquement dans $\dot{H}^1(0, T) \cap H^2(0, T)$.

THÉORÈME 3.1. La fonction

$$(3.7) \quad u(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) u_\nu(t)$$

est la solution du problème de Dirichet défini dans le § 2 et appartient à \dot{V} .

Démonstration. Posons

$$U_j(x, t) = \sum_{\nu=1}^j g_\nu(x) u_\nu(t),$$

$$F_j(x, t) = \sum_{\nu=1}^j g_\nu(x) f_\nu(t), \quad j = 1, 2, \dots$$

Evidemment, $U_j \in \dot{V}$, $j = 1, 2, \dots$ et vérifient

$$(3.8) \quad E(U_j, v) = (F_j, v)$$

pour tout $v \in \mathring{V}$. En vertu de (2.5), on a

$$\|U_j\|_{\mathring{V}} \leq C \|F_j\|_{L^2(Q)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

et

$$U_j \xrightarrow{\mathring{V}} u$$

Pour chaque v fixé dans \mathring{V} faisons tendre j vers l'infini dans (3.8) on a

$$E(u, v) = (f, v). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 4. Estimation principale.

Le but de ce § est la démonstration du théorème 4.2.

s étant un nombre réel, $H^s(R^1)$ est l'espace de Sobolev des distributions f , tempérées sur R^1 vérifiant

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(R^1) = H^0(R^1)$$

avec la norme

$$\|f\|_{H^s(R^1)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi)\|_{L^2(R^1)},$$

\hat{f} désignant la transformée de Fourier de f . $L_+^2(H^s(R^1))$ est donc l'espace des distributions u tempérées dans $R_+^2 = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ telles que

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi, t) \in L_+^2(H^0(R^1)) = L^2(R_+^2),$$

\hat{u} désignant la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x .

Soit r un nombre réel: notons T_r l'opérateur défini par

$$\widehat{(T_r u)}(\xi, t) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \hat{u}(\xi, t),$$

T_r est une isométrie entre $L_+^2(H^s(R^1))$ et $L_+^2(H^{s-r}(R^1))$ pour tout nombre réel s .

Ensuite désignons par $W^1(r, s)$ (c.f. ch. I. [1]) les classes de fonctions u telles que

$$(4.1) \quad t^r u \in L_+^2(H^s(R^1)),$$

$$(4.2) \quad u_t \in L_+^2(H^0(R^1)) = L^2(R_+^2).$$

Nous prenons pour norme :

$$\|u\|_{W^1(\gamma, s)} = (\|u_t\|_{L^2(R_+^2)}^2 + \|t^\gamma u\|_{L^2_0(H^1(R^1))}^2)^{\frac{1}{2}}$$

si $u \in W^1(\gamma, s)$, par la condition $u_t \in L^2(R_+^2)$, il existe la trace $u(x, 0) \in L^2(R^1)$. Désignons par $\mathring{W}^1(\gamma, s)$ les u appartenant à $W^1(\gamma, s)$ telles que $u(x, 0) = 0$. Nous avons le lemme suivant :

LEMME 4.1. (Le cas particulier des résultats dans le Ch.I. [1]). Pour tous nombres réels γ et β , vérifiant $-1 \leq \beta \leq \gamma$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$$(4.3) \quad \mathring{W}^1(\gamma, s) \subset \mathring{W}^1(\beta, s(1 - \theta)).$$

avec $\theta = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + 1}$.

Et aussi, pour tous nombres réels γ et β , vérifiant $-\frac{1}{2} < \beta \leq \gamma$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$$(4.4) \quad W^1(\gamma, s) \subset W^1(\beta, s(1 - \theta)),$$

avec $\theta = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + 1}$.

LEMME 4.2. Prenons $\zeta, \eta \in C_0^\infty((0, 1) \times [0, T])$ telles que $\eta = 1$ sur le support de ζ . Soient $f \in L^2(Q)$ et $u \in V(Q)$ la solution pour le problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a

$$(4.5) \quad \left\| \eta T \frac{1}{\alpha/2 + 1} \cdot \zeta u \right\|_{\mathring{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}.$$

La constante C ne dépend pas de $f \in L^2(Q)$.

Démonstration. Nous suivons le raisonnement dans le Ch. II, [1]. Soient $U_j = U_j(x, t)$ et $F_j = F_j(x, t)$ comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Posons $M = \eta T \frac{1}{\alpha/2 + 1} \zeta$, et considérons les expressions

$$A_j = E(MU_j, MU_j),$$

$$B_j = E(U_j, M^*MU_j).$$

Utilisons le lemme 4.1 en prenant $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $s=1$, $\beta=0$ (donc $\theta = \frac{\alpha}{2} / \frac{\alpha}{2} + 1$)

les mêmes calculs qu'en Ch. I, II, [1]) nous donnent:

$$(4.6) \quad |A_j - B_j| \leq C \|\eta U_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} \|MU_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)},$$

$$(4.7) \quad |B_j| \leq |(F_j, M^* MU_j)| \leq \|F_j\|_{L^2(Q)} \|M^* MU_j\|_{L^2(Q)}$$

Comme M^* est un opérateur tangentiel d'ordre $\frac{1}{\alpha/2 + 1}$ et qu'on a l'inclusion $\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1) \subset \dot{W}^1(0, \frac{1}{\alpha/2 + 1})$ (par le lemme 4.1), nous obtenons

$$(4.8) \quad |B_j| \leq \|F_j\|_{L^2(Q)} \|MU_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)}.$$

Nous déduisons de (2.4), (4.6) et (4.8),

$$(4.9) \quad \|MU_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)}^2 \leq \{C \|\eta U_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} + \|F_j\|_{L^2(Q)}\} \|MU_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)}.$$

D'autre part, d'après (2.4) on a

$$(4.10) \quad \|\eta U_j\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} \leq C' \|U_j\|_{V(Q)} \leq C'' \|F_j\|_{L^2(Q)},$$

où les constantes C' , C'' sont indépendantes de U_j et F_j . De (4.9) et de (4.10) on obtient le lemme 4.2 en faisant tendre j vers l'infini.

LEMME 4.3. Prenons $\zeta \in C_0^\infty((0, 1) \times [0, T])$ quelconque. Soient $f \in L^2(Q)$ et $u(x, t) \in \dot{V}(Q)$ la solution du problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a

$$(4.11) \quad \|t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta u_x\|_{\dot{V}(Q)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}.$$

La constante C ne dépend pas de $f \in L^2(Q)$.

Démonstration. Soient $U_j = U_j(x, t)$ $F_j = F_j(x, t)$ comme ci-dessus. Comme

$t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x} \in \dot{V}$ on a

$$\|t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}\|_{\dot{V}} \leq C' \|t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} \leq C'' E(t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}, t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}) \quad [(2, 4)].$$

En utilisant (4.5), (2.5) et l'inclusion

$$\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1) \subset \dot{W}^1(\frac{\alpha}{2} - 1, \frac{\alpha/2}{\alpha/2 + 1}) \quad [\text{Lemme 4.1}],$$

nous avons

$$E(t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}, t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}) \leq C''' \{ \|F_j\|_{L^2(Q)} \|t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta U_{j,x}\|_{\dot{W}^1(\frac{\alpha}{2}, 1)} + \|F_j\|_{L^2(Q)} \}$$

D'où résulte (4.11).

C.Q.F.D.

Ensuite, prolongeons les fonctions $u(x, t)$ et $f(x, t)$ comme suit :

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in Q, \\ -u(x, t), & -1 < x < 0, \quad 0 < t < T, \\ -u(x-1, t), & 1 < x < 2, \quad 0 < t < T, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ -f(-x, t), & -1 < x < 0, \quad 0 < t < T, \\ -f(x-1, t), & 1 < x < 2, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Alors, en désignant $\tilde{Q} = (-1, 2) \times (0, T)$, $\tilde{F} = \partial \tilde{Q}$, on voit que $\tilde{u} \in \dot{V}(\tilde{Q})$, $\tilde{f} \in L^2(\tilde{Q})$ et \tilde{u} est une solution du problème de Dirichlet :

$$(2.1) \quad -u_{tt} - t^\alpha u_{xx} = f \quad \text{dans } \tilde{Q},$$

$$(2.2) \quad u|_{\tilde{F}} = 0.$$

Ce qui peut être formulé comme dans le § 2.

On peut procéder comme ci-dessus et en utilisant la division de l'unité on obtient enfin le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. Soit $\alpha \geq 0$. On considère le problème de Dirichlet :

$$(2.1) \quad Lu = -u_{tt} - t^\alpha u_{xx} = f \quad \text{dans } Q,$$

$$(2.2) \quad u|_r = 0$$

avec $f \in L^2(Q)$.

Il existe une solution u unique dans \dot{V} . De plus, il existe une constante C telle que

$$(4.12) \quad \|u\| + \|u_t\| + \|u_{tt}\| + \|t^{\frac{\alpha}{2}} u_x\| + \|t^{\frac{\alpha}{2}} u_{tx}\| + \|t^\alpha u_{xx}\| \leq C \|f\|.$$

La constante C ne dépend pas de $f \in L^2(Q)$. Ici on a noté par $\| \cdot \|$ la norme dans $L^2(Q)$.

§ 5. **La régularité de la solution des équations** $-u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Dans ce §, notons $Q = (0 < x < 1) \times (-T < t < T)$, $\Gamma = \partial Q$ et k un entier ≥ 0 .

THÉORÈME 5.1. Supposons $u \in H^2(-T, T; L^2(\Omega)) = H_{x,t}^{0,2}(Q)$, $t^{2k}u \in L^2(-T, T; H^2(\Omega)) = H_{x,t}^{2,0}(Q)$ et $Lu = -u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f \in C^\infty(Q)$, alors on a $u \in C^\infty(Q)$.

Désignons par $\mathfrak{D}_\alpha^{2,2}(Q) = \mathfrak{D}_\alpha^2(Q)$ l'espace des distributions u définies dans Q , et telles que:

$$(5.1) \quad u \in L^2(Q), \quad u_{tt} \in L^2(Q), \quad |t|^\alpha u \in L^2(-T, T; \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Nous prenons pour la norme:

$$\|u\|_{\mathfrak{D}_\alpha^2(Q)} = (\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_{tt}\|_{L^2(Q)}^2 + \| |t|^{\frac{\alpha}{2}} u_x \|_{L^2(Q)}^2 + \| |t|^\alpha u_{xx} \|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Pour la démonstration du théorème 5.1 nous préparons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. Considérons un problème de Dirichlet:

$$(2.1)' \quad Lu = -u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f \quad \text{dans } Q$$

$$(2.2)' \quad u|_\Gamma = 0$$

avec $f \in L^2(Q)$. Alors il existe une solution u unique dans $\mathfrak{D}_{2k}^2(Q)$, et on a l'inégalité

$$(5.2) \quad \|u\|_{\mathfrak{D}_{2k}^2(Q)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}.$$

La constante C ne dépend pas de f .

Nous pouvons formuler le problème de Dirichlet (2.1)', (2.2)' comme au § 2. Alors en poursuivant le raisonnement donné dans les § 2-4, on obtient le théorème 5.2 comme au théorème 4.2. On y utilise (4.4) au lieu de (4.3). (Il s'agit des cas $k = 1, 2, \dots$).

Remarque Compte tenu du Théorème 4.2, on voit que l'inégalité (5.2) est équivalente à l'inégalité

$$(5.3) \quad \|u\|_{\mathfrak{D}_{2k}^2(Q)} + \| |t|^k D_x D_t u \|_{L^2(Q)} \leq C' \|f\|$$

pour une autre constante C' .

Démonstration du Théorème 5.1. Soient u et f comme au Théorème 5.1 et $Lu = f$ dans Q .

Pour t_1, t_2 fixés, vérifiant $-T < t_1 < 0 < t_2 < T$, prenons $\zeta \in C_0^\infty(Q)$ telle que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \text{si } (x, t) \in Q \quad \text{et } t \in (t_1, t_2).$$

Nous supposons que

$$t^{2k}u \in H_{\text{loc}}^{2+j,0}(Q), \quad u \in H_{\text{loc}}^{j,2}(Q)$$

pour quelque $j \geq 0$. Alors on a

$$L(\zeta D_x^{j+1}u) = \zeta D_x^{j+1}f - \zeta_{tt} D_x^{j+1}u - \zeta_t D_x^{j+1} D_t u - t^{2k} \zeta_x D_x^{j+2}u - t^{2k} \zeta_{xx} D_x^{j+1}u \in L^2(Q),$$

puisque $u \in C^\infty(Q - \{(x, 0); 0 < x < 1\})$. D'après le Théorème 5.2, nous avons

$$t^{2k} D_x^2(\zeta D_x^{j+1}u) \in L^2(Q), \quad \zeta D_x^{j+1}u \in L^2(Q).$$

D'où

$$t^{2k}u \in H_{\text{loc}}^{2+j+1,0}(Q), \quad u \in H_{\text{loc}}^{j+1,2}(Q).$$

Donc

$$(5.4) \quad D_x^j u \in L_{\text{loc}}^2(Q), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Comme l'équation $Lu = f$ s'écrit

$$D_t^2 u = -t^{2k} D_x^2 u - f$$

on a

$$D_t^2 D_x^j u \in L_{\text{loc}}^2(Q), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Nous supposons maintenant

$$(5.5) \quad D_t^j D_x^r u \in L_{\text{loc}}^2(Q), \quad j = 1, 2, \dots$$

pour quelque r entier ≥ 2 . Alors on a

$$D_x^j D_t^{r+1} u = D_x^j D_t^{r-1} (D_t^2 u) = D_x^j D_t^{r-1} (-t^{2k} D_x^2 u - f) \in L_{\text{loc}}^2(Q).$$

D'où résulte (5.5) dans le cas $r + 1$. Donc on a

$$D_x^j D_t^r u \in L_{\text{loc}}^2(Q), \quad j, r = 0, 1, 2, \dots$$

D'après le lemme de Sobolev on a $u \in C^\infty(Q)$.

C.Q.F.D.

§ 6. L'analyticité de la solution des équations $-u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f$,
 $k = 0, 1, \dots$.

DÉFINITION 6.1. Soit \mathfrak{D} un domaine dans R^2 . On dit qu'une fonction $u \in C^\infty(\mathfrak{D})$ est une fonction analytique dans \mathfrak{D} si, pour chaque compact K de \mathfrak{D} , il y a une constante C telle que

$$(6.1) \quad \|D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} u\|_{L^2(K)} \leq C^{|\beta|+1} |\beta|^{|\beta|}.$$

On a noté $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$ pour β_1, β_2 entiers ≥ 0 .

Notons $Q = \Omega \times (-T, T)$ comme dans le § 5.

THÉORÈME 6.1. Soit k un entier ≥ 0 . Si $u \in H^2(-T, T; L^2(\Omega)) = H^{0,2}(Q)$ et $t^{2k}u \in L^2(-T, T; H(\Omega)) = H^{2,0}(Q)$ et

$$(6.2) \quad Lu = -u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f \quad \text{dans } Q$$

avec f une fonction analytique sur \bar{Q} . Alors u est une fonction analytique dans Q .

Dans la suite, supposons que $\frac{1}{2} < T$ et prenons $t_0 > 0$ tel que $0 < t_0 < T - \frac{1}{2}$. Nous introduisons les notations:

$$Q_\varepsilon = (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times (-T + \varepsilon, T - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

$$Q_\varepsilon^* = Q_\varepsilon(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times (-t_0, t_0),$$

$$N_\varepsilon(v) = \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}$$

$$N_\varepsilon^*(v) = \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon^*)}.$$

LEMME 6.1. (c.f. ch. I, [2]). Soient $\varepsilon, \varepsilon_1$ positifs avec $0 < \varepsilon + \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. Il y a des fonctions $\phi = \phi_{\varepsilon, \varepsilon_1} \in C_0^\infty(Q_{\varepsilon_1})$ telles que $\phi_{\varepsilon, \varepsilon_1} \equiv 1$ sur $Q_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ et

$$(6.3) \quad \begin{cases} \text{Max } |D_x^{\alpha_1} D_t^{\beta_2} \phi| \leq C_{|\beta|} \varepsilon^{-|\beta|}, & |\beta| \leq 2, \\ D_t \phi \equiv 0 & \text{sur } (\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_1) \times (-t_0, t_0). \end{cases}$$

LEMME 6.2. Il existe une constante $C > 0$, telle que

$$(6.4) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^j v) + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t^{2k} D_x^j v) + N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(v) + \\ & \quad + \varepsilon N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(D_x v) + \varepsilon^2 N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(D_t D_x v) \leq \\ & \leq C \{ \varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(Lv) + \sum_{j=0,1} \varepsilon^j N_{\varepsilon_1}(t^{2k} D_x^j v) + N_{\varepsilon_1}^*(v) + \varepsilon N_{\varepsilon_1}^*(D_t v) \} \end{aligned}$$

pour tout $v \in C^\infty(Q)$. La constante C ne dépend pas de $\varepsilon, \varepsilon_1$ ($\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < T - t_0$) ni de v .

Démonstration. Prenons $\phi = \phi_{\varepsilon, \varepsilon_1}$ introduite dans le lemme 6.2. Nous substituons ϕv dans l'inégalité (5.3). Alors on a

$$(6.5) \quad \begin{aligned} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^2 v) + N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t^{2k} D_x^2 v) + N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(D_t D_x v) &\leq \\ &\leq C'' \{ N_{\varepsilon_1}(Lv) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}^*(v) + \varepsilon^{-1} N_{\varepsilon_1}^*(D_t v) + \\ &\quad + \varepsilon^{-1} N_{\varepsilon_1}(t^{2k} D_x v) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(t^{2k} v) \}. \end{aligned}$$

D'où résulte l'inégalité (6.4).

LEMME 6.3. (c.f. Ch. 7, [2]) Soit v une fonction analytique sur \bar{Q} . Il y a une constante $C > 0$ telle que

$$(6.6) \quad \varepsilon^{|\beta|} N_{j,\varepsilon}(D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} v) \leq C^{|\beta|+1} \quad \text{si} \quad |\beta| < j,$$

pour tous les entiers $j > 0$. Réciproquement, si $v \in C^\infty(Q)$ vérifie (6.6), alors v est une fonction analytique dans Q . (Si $j\varepsilon > \frac{1}{2}$, $N_{j,\varepsilon} = \phi!$)

Démonstration du Théorème 6.1. D'abord, nous démontrons qu'il existe une constante $B > 0$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout l entier > 0 on a

$$(6.7) \quad \left. \begin{aligned} &\sum_{r=0}^2 \varepsilon^{r+j} N_{l,\varepsilon}(D_t^r D_x^j u), \\ &\sum_{r=0}^2 \varepsilon^{r+j} N_{l,\varepsilon}(t^{2k} D_x^{r+j} u), \\ &\sum_{r=0,1} \varepsilon^{r+j} N_{l,\varepsilon}^*(D_x^{r+j} u), \\ &\varepsilon^{2+j} N_{l,\varepsilon}^*(D_t D_x^{j+1} u) \end{aligned} \right\} \leq B^{l+1}$$

si $j < l$.

En effet, comme f est une fonction analytique sur \bar{Q} , il y a une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\varepsilon^{2+j} N_{j,\varepsilon}(D_x^j f) \leq C^{j+1}. \quad [\text{Lemme 6.3.}]$$

Donc on a déjà le cas $l = 1$ si B est suffisamment grand.

En supposant que (6.7) soit démontré pour $l > 0$, nous allons démontrer (6.7) pour le cas $l + 1$. En remplaçant u par $\varepsilon^l D_x^l u$ et ε_1 par $l\varepsilon$ dans (6.4), on voit que les premiers membres de (6.7) pour le cas $l + 1$ sont plus petits

que $5CB^{j+1}$ si $j < l + 1$. Donc il s'ensuit que (6.7) avec l remplacé par $l + 1$ si $5CB^{l+1} \leq B^{l+2}$. Cette condition est vérifiée pour tout l si $B > \text{Max}(5C, 1)$.

Posons $Q_0 = (\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0) \times (t_0, t_0)$ avec ε_0 réel tel que $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$.

En vertu du lemme 8.3, on a

$$(6.8) \quad \sum_{r=0}^2 \|D_t^r D_x^j u\|_{L^2(Q_0)} \leq C_0^{j+1} j^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

pour une constante C_0 convenable.

L'équation $Lu = f$ s'écrit

$$D_t^2 u = -t^{2k} D_x^2 u - f.$$

En poursuivant la manière habituelle pour la majoration des dérivées normales (voir [5] par exemple), nous avons

$$\|D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} u\|_{L^2(Q_0)} \leq C_0^{|\beta_1|+1} |\beta_1|^{|\beta_1|}$$

pour une constante $C_0 > 0$.

C.Q.F.D.

Remarque. On peut étendre le Théorème 4.2 pour les équations plus générales (cf. [6]):

$$(6.9) \quad Lu = -u_{tt} - t^\alpha Au = f, \quad (\alpha \geq 0),$$

$$A = \sum_{i,j=1}^n D_j a_{ij}(x) D_i, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a_{ij} réels $\in C^\infty(\bar{\Omega})$, Ω étant un domaine borné dans R^n de frontière assez régulière.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq r |\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in R^n, \quad r > 0.$$

Aussi, on peut démontrer, par la même méthode qu'aux Théorème 5.1 et Théorème (6.1), l'hypoellipticité et l'hypoanalyticité (pour le cas où $a_{ij}(x)$ sont analytiques sur $\bar{\Omega}$) des équations (6.9) avec $\alpha = 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ et des équations plus générales.

Ajouté en epreuve: Analyticité jusqu' au bord pour l'opérateur elliptique dégénéré du type différent de (6.9) a été aussi démontré dans la collaboration de MM. M.S. Baouendi et C. Goulaouic, C.R. Acad. Sc. Paris, t 270, 1158-1161.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Baouendi (Mohamed Salah)-Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Bull. Soc. Math. France, **95**, 1967, 45-87.
- [2] Hörmander (Lars)-Linear partial differential operators,-Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren, **116**).
- [3] Hörmander (Lars)-Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. **119**, 1968, 147-171.
- [4] Kato (Yoshio)-On a class of hypoelliptic differential operators, (à paraître).
- [5] Matsuzawa (Tadato)-Sur les équations quasi elliptiques et les classes de Gevrey, Bull. Soc. Math. France, **96**, 1968, 243-263.
- [6] Matsuzawa (Tadato)-Sur les équations $-\frac{d^2}{dt^2}u + t^\alpha \wedge u = f$, (à paraître).
- [7] Petrovsky (I.-G.)-Lectures on partial differential equations,-New York, London, Interscience Publishers, 1954

*Mathematical Institute
Nagoya University
Nagoya, Japan.*

