Masayuki Ito
Nagoya Math. J.
Vol. 41 (1971), 121-133

SUR LE PRINCIPE CLASSIQUE DU MAXIMUM POUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION SYMÉTRIQUES

MASAYUKI ITO

1. Introduction

Soit X un groupe abélien localement compact, et on désigne par dx sa mesure de Haar. On notera respectivement C_K et M_K les ensembles des fonctions finies, continues dans X, à support compact, et des fonctions mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact. C_K^+ (resp. M_K^+) est le sous-ensemble des fonctions non-négatives de C_K (resp. M_K).

Rappelons qu'un noyau de convolution κ sur X est une mesure de Radon positive dans X, et il est symétrique si, quelle que soit φ de C_K,

$$\int \varphi d\kappa = \int \check{\varphi} d\kappa,$$

où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Pour une fonction f de M_K, la densité de la convolution $\kappa * f$ s'appelle le potentiel de f par rapport au noyau κ, et il s'écrit u_f.

On dit que κ satisfait au principe d'énergie si, quelle que soit f de M_K, on a

$$\int u_f f dx \geqq 0 \quad \text{et} \quad \int u_f f dx = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

On dit ensuite que κ satisfait au principe classique du maximum si, quelle que soit f de M_K^+, l'inégalité $u_f \leqq 1$ est satisfaite presque partout sur X dès qu'elle l'est presque partout sur l'ensemble $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

On dit finalement que κ satisfait au principe d'équilibre si, quel que soit K un compact de X, il existe une mesure de Radon positive ν_K portée par K, telle que la convolution $\kappa * \nu_K$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Haar et que sa densité $u\nu_K$ soit $\leqq 1$ presque partout sur X et $= 1$ presque partout sur K. Elle s'appelera une mesure d'équilibre de K par rapport au noyau κ.

Received February 25, 1970.

Dans cet article, on se propose d'abord de montrer l'équivalence entre le principe classique du maximum et le principe d'équilibre pour les noyaux de convolution symétriques non-zéro sur X. On fournira ensuite une caractérisation pour qu'un noyau de convolution symétrique satisfasse au principe classique du maximum, en supposant qu'il n'existe aucun sous-groupe compact excepté $\{0\}$.

Soit κ un noyau de convolution symétrique sur X et tendant vers 0 à l'infini.[1] *Pour que κ satisfasse au principe classique du maximum, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions définie-négatives λ_1, λ_2 sur le groupe dual $\hat{X}$ de X, à valeurs réelles et telles que la transformation de Fourier de κ soit de la forme*

$$\hat{\kappa} = \lambda_1/\lambda_2.$$

Cela est un résultat analoque avec celui de A. Beurling et J. Deny dans le cas où X est compact (cf. [5]). Une fonction continue et complexe λ sur $\hat{X}$ est définie-négative si, quel que soit m un entier positif et quel que soit $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ un système de points de $\hat{X}$, la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} [\lambda(\hat{x}_i) + \overline{\lambda(\hat{x}_j)} - \lambda(\hat{x}_i - \hat{x}_j)]\rho_i \bar{\rho}_j$$

est non-négative. Elle joue un rôle essentiel dans la théorie de l'espace de Dirichlet spécial (voir [1]).

2. Le principe classique du maximum et le principe d'équilibre

On commencera avec l'annonce du premier résultat. J. Deny a montré un presque même théorème de l'autre manière (cf. [3]).

THÈORÉME 1. *Soit κ un noyau de convolution symétrique non-zéro sur X. Pour que κ satisfasse au principe classique du maximum, il faut et il suffit que κ satisfasse au principe d'équilibre.*

LEMME 1. *Soit κ un noyau de convolution symétrique et avec $\kappa(\{0\}) > 0$, et soit u une fonction mesurable, localement bornée et non-négative sur X. Pour un ensemble mesurable et relativement compact e de X, il existe une fonction f_0 de M_K^+, portée par e et telle que l'on ait*

$$u_{f_0} \geqq u \text{ presque partout sur } e,$$
$$u_{f_0} = u \text{ presque partout sur } \{x \in X;\ f_0(x) > 0\}.$$

1) On dit que κ tend vers 0 à l'infini si, quelle que soit φ de C_K, $\lim_{x\to\infty} \kappa*\varphi(x) = 0$.

On montrera d'abord le lemme 1. Soit $L_2(e)$ l'espace hilbertien constitué par toutes les fonctions mesurables, portées par e et dont la carrée est sommable. $L_2^+(e)$ est son sous-ensemble des fonctions non-négatives. On pose

$$F_u(f) = \frac{\left(\int u\, f\, dx\right)^2}{\int f * \check{f}\, d\kappa} \quad (f \in L_2^+(e),\ \neq 0),$$

et on a alors

$$F_u(f) \leqq \frac{\left(\int_e |u|^2 dx\right)\left(\int |f|^2 dx\right)}{\kappa(\{0\}) \int |f|^2 dx} = \frac{\int_e |u|^2 dx}{\kappa(\{0\})}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} +\infty > \alpha &= \sup\{F_u(f);\ f \in L_2^+(e),\ f \neq 0\} \\ &= \sup\{F_u(f);\ f \in L_2^+(e),\ \int |f|^2 dx = 2\}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$, alors $u = 0$ presque partout sur e, et donc, on peut supposer que $\alpha \neq 0$. Soit (f_n) une suite de $L_2^+(e)$ qui satisfait à $\int |f_n|^2 dx = 1$ et à

$$\lim_{n\to\infty} F_u(f_n) = \alpha,$$

on peut alors supposer que (f_n) converge faiblement vers une fonction f_0' de $L_2^+(e)$ dans $L_2(e)$ avec $n \to \infty$. Ayant

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\int u\, f_n dx\right)^2}{\int f_n * \check{f}_n d\kappa} \leqq \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\int u\, f_n dx\right)^2}{\varliminf_{n\to\infty} \int f_n * \check{f}_n d\kappa} \leqq \frac{\left(\int u\, f_0' dx\right)^2}{\kappa(\{0\})},$$

on a $f_0' \neq 0$ et l'égalité $F_u(f_0') = \alpha$. Quelle que soit f de $L_2^+(e)$ et quel que soit $a > 0$, on a

$$\alpha = F_u(f_0') \geqq F_u(f_0' + af),$$

et donc,

$$u_{f_0'} \geqq \frac{1}{\alpha}\left(\int u\, f_0' dx\right) u \quad \text{presque partout sur } e.$$

D'autre part, en utilisant le fait que, quelle que soit f de $L_2^+(e)$ et quel que soit $a > 0$,

$$\alpha = F_u(f'_0) \geqq F_u(f'_0 + af),$$

dès que $f'_0 - af \geqq 0$, on a

$$u_{f'_0} = \frac{1}{\alpha}\Big(\int u\, f'_0\, dx\Big) u \text{ presque partout sur } \{x \in X;\, f'_0(x) > 0\}.$$

En posant $f_0 = \Big(\alpha\Big/\int u\, f'_0\, dx\Big) f'_0$, on a $f_0 \leqq (1/\kappa(\{0\}))u$, d'où $f_0 \in M_K^+$, et on arrive à notre lemme.

LEMME 2. *Soit κ un noyau de convolution symétrique sur X et supposons qu'il satisfait au principe d'équilibre. Si, pour deux fonctions f, g de M_K^+ et pour un nombre $c > 0$, $u_f + cf \leqq u_g + cg$ presque partout sur $\{x \in X;\, f(x) > 0\}$, alors $\int g(x)dx \geqq \int f(x)dx$.*

En effet, on peut supposer que $\{x \in X;\, f(x) > 0\} \cap \{x \in X;\, g(x) > 0\} = \phi$, car

$$u_{(f-g)^+} + c(f-g)^+ \leqq u_{(g-f)^+} + c(g-f)^+$$

presque partout sur $\{x \in X;\, f(x) > 0\} \cap \{x \in X;\, f(x) > g(x)\}$. On a donc $u_f \geqq u_g$ presque partout sur $\{x \in X;\, f(x) > 0\}$. Soit K un compact $\subset \{x \in X;\, f(x) > 0\}$, et soit ν_K la mesure d'équilibre par rapport au noyau κ, on a alors

$$\int g\, dx \geqq \int u_{\nu_K} g\, dx \geqq \int u_{\nu_K} f\, dx \geqq \int_K f\, dx,$$

et, K étant quelconque, on arrive à la conclusion que $\int g\, dx \geqq \int f\, dx$.

Démonstration du théorème 1. On montre d'abord que la condition est nécessaire. D'après le lemme 1, à un compact K de X, on peut associer une fonction f_c de M_K^+, portée par K et telle que

$$u_{f_c} + cf_c \geqq 1 \quad \text{presque partout sur } K,$$
$$u_{f_c} + cf_c = 1 \quad \text{presque partout sur } \{x \in X;\, f_c(x) > 0\},$$

où c est une constante > 0. Le noyau $\kappa + c\varepsilon$ satisfait aussi au principe classique du maximum, où ε est la mesure de Dirac à l'origine. Il en résulte donc que $f_c dx$ est une mesure d'équilibre de K par rapport au noyau $\kappa + c\varepsilon$. Soit φ une fonction de C_K^+ telle que $u_\varphi \geqq 1$ sur K. On a

$$\int f_c\, dx \leqq \int u_\varphi f_c\, dx \leqq \int (u_\varphi + c\varphi) f_c\, dx = \int (u_{f_c} + cf_c)\varphi\, dx \leqq \int \varphi\, dx,$$

et donc, $(f_c dx)_{c>0}$ est vaguement bornée. Soit ν_K un point vaguement adhérent de $(f_c dx)$ lorsque $c \to 0$, on peut supposer que $(f_c dx)$ converge vaguement vers ν_K avec $c \to 0$. Le noyau κ tendant vers 0 à l'infini, la famille $(\kappa * f_c)_{c>0}$ converge vaguement vers $\kappa * \nu_K$ avec $c \to 0$, et $\kappa * \nu_K$ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar. Sa densité u_{ν_K} est $\leqq 1$ presque partout sur X. On a

$$\int_K dx = \lim_{c \to 0}\left(\int_K u_{f_c} dx + c\int f_c dx\right) = \lim_{c \to 0}\int_K u_{f_c} dx = \lim_{c \to 0}\int \kappa * c_K f_c dx$$
$$\leqq \int \kappa * c_K \, d\nu_K = \int_K u_{\nu_K} dx,$$

car la fonction $\kappa * c_K$ est supérieurement semi-continue, où c_K est la fonction caractéristique de K. On a donc $u_{\nu_K} = 1$ presque partout sur K.

On suppose ensuite que κ satisfait au principe d'équilibre. Supposons que, pour une fonction f de M_K^+, $u_f \leqq 1$ presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$, alors, pour un nombre $\delta > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que $u_f + cf \leqq 1 + \delta$ presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\{$. En utilisant le lemme 1, pour une fonction g de M_K^+, on peut associer une fonction g'_c de M_K^+, portée par $e = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ et telle que

$$u_g + cg \leqq u_{g'_c} + cg'_c \quad \text{presque partout sur } e,$$
$$u_g + cg = u_{g'_c} + cg'_c \quad \text{presque partout sur } \{x \in X;\ g'_c(x) > 0\}.$$

D'après le lemme 2, on a $\int g\, dx \geqq \int g'_c\, dx$, et

$$\int (u_g + cg - u_{g'_c} - cg'_c) f\, dx \leqq 0.$$

D'autre part, on a

$$\int (u_f + cf)(g - g'_c) dx \geqq \int (u_f + cf) g\, dx - (1+\delta)\int g'_c\, dx$$
$$\geqq \int (u_f + cf) g\, dx - (1+\delta)\int g\, dx,$$

d'où

$$\int (u_f + cf) g\, dx \leqq (1+\delta)\int g\, dx,$$

et, g étant quelconque, on a $u_f \leqq u_f + cf \leqq 1 + \delta$ presque partout sur X. Faisant $\delta \to 0$, on arrive à l'inégalité $u_f \leqq 1$ presque partout sur X, d'où notre résultat.

REMARQUE 1. Soit κ un noyau de convolution symétrique sur X et tendant vers 0 à l'infini. Si κ satisfait au principe classique du maximum, alors, pour un ouvert quelconque ω de X et pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact, il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans X, portée par $\bar{\omega}$ et telle que l'on ait $\int d\mu'_\omega \leqq \int d\mu$ et $\kappa * \mu'_\omega \geqq \kappa * \mu$ au sens des mesures dans ω.

En effet, il suffit de la montrer dans le cas de $\mu = f\, dx$, où $f \in C_K^+$. Soit m un entier positif, et posant $\omega_n = \{x \in X;\ \kappa * f(x) \geqq 1/n\}$, alors, d'après le lemme 1, il existe une fonction $f'_{n,m}$ de M_K^+, portée par $\bar{\omega}_n$ et telle que

$$u_{f'_{n,m}} + \frac{1}{m} f'_{n,m} \geqq u_f \text{ presque partout dans } \omega_n,$$

$$u_{f'_{n,m}} + \frac{1}{m} f'_{n,m} = u_f \text{ presque partout sur } \{x \in X;\ f'_{n,m}(x) > 0\}.$$

D'après le lemme 2, on a $\int f'_{n,m} dx \leqq \int f\, dx$. En faisant $n \to \infty$, il existe une fonction f'_m mesurable, bornée et non-négative X, portée par $\bar{\omega}$, telle que $\int f'_m dx \leqq \int f\, dx$ et

$$u_{f'_m} + \frac{1}{m} f'_m \geqq u_f \text{ presque partout dans } \omega.$$

En faisant ensuite $m \to \infty$, il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans X, portée par $\bar{\omega}$ et telle que les conditions dans la remarque 1 soient vérifiées.

On dit que μ'_ω est une mesure pseudo-balayée de μ dans ω relativement au noyau κ.

3. Le théorème principal

Dans cette section, on suppose qu'il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$.

THÉORÈME 2. *Soit κ un noyau de convolution symétrique sur X et tendant vers 0 à l'infini. Pour que κ satisfasse au principe classique du maximum, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions définie-négatives λ_1, λ_2 sur le groupe dual $\hat{X}$ de X, à valeurs réelles et telles que la transformation de Fourier de κ soit de la forme*

$$\hat{\kappa} = \lambda_1 / \lambda_2.$$

D'après ce théorème et le lemme suivant, κ satisfait au principe d'énergie si κ satisfait au principe classique du maximum. Cela est une généralisation du théorème de K. Kunugui (cf. [6]).

LEMMA 3. *Soit λ une fonction défine-négative sur $\hat{X}$ et à valeurs réelles, alors $\lambda > 0$ presque partout sur $\hat{X}$ ou $\lambda = 0$.*

En effet, il suffit de montrer que $\lambda/(1+\lambda) > 0$ presque partout sur $\hat{X}$ dès que $\lambda \neq 0$. La fonction $1/(1+\lambda)$ étant de type positif, il existe une mesure de Radon positive σ symétrique, avec $\int d\sigma \leqq 1$ et telle que $\hat{\sigma} = 1/(1+\lambda)$. Supposons qu'il existe un compact $\hat{K}$ de $\hat{X}$ dont la mesure est >0 et sur lequel $\lambda/(1+\lambda) = 0$, et posons $f(x) = \int_{\hat{K}} (x, \hat{x}) d\hat{x}$, où $(\cdot, \hat{\cdot})$ est la caractère. La fonction f est finie et continue, et on a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $f = f*\sigma$. Mais c'est une contradiction, car f est périodique à tout le point du support S_σ de σ et σ n'est pas portée par $\{0\}$ (voir [2]).

LEMME 4 (cf. [5]). *Si une suite (κ_n) de noyaux de Dirichlet sur X[2)] converge une mesure de Radon positive dans X et tendant vers 0 à l'infini, elle est alors un noyau de Dirichlet ou 0.*

Démonstration du théorème 2. Soit $\hat{\varphi}_0$ une fonction finie, continue, non-négative, $\neq 0$ et de type positif dans $\hat{X}$, à support compact, et soit $\varphi_0(x) = \int (x, \hat{x}) \hat{\varphi}_0(\hat{x}) d\hat{x}$, on a alors, quel que soit $x \neq 0$,

$$\varphi_0 * \check{\varphi}_0(0) > \varphi_0 * \check{\varphi}_0(x) \geqq 0.$$

En effet, s'il existe un point x de $x - \{0\}$ tel que $\varphi_0 * \check{\varphi}_0(0) = \varphi_0 * \check{\varphi}_0(x)$, on a alors

$$\int |\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x} = \int (x, \hat{x}) |\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x},$$

d'où $(x, \hat{x}) = 1$ sur $S_{\hat{\varphi}_0}$, et par suite, quel que soit m un entier positif, $(mx, \hat{x}) = 1$ sur $S_{\hat{\varphi}_0}$, d'où $\varphi_0 * \check{\varphi}_0(0) = \varphi_0 * \check{\varphi}_0(mx)$. Mais, cela est une contradiction. Soit ω_n un ouvert symétrique de X et ainsi défini:

$$\omega_n = \left\{ x \in X;\ \varphi_0 * \check{\varphi}_0(x) < \frac{2n-1}{2n} \varphi_0 * \check{\varphi}_0(0) \right\},$$

---

2) On dit qu'un noyau de convolution symétrique κ sur X est un noyau de Dirichlet sur X si $\hat{\kappa} = 1/\lambda$, où λ est une fonction définie-négative sur $\hat{X}$ et à valeurs réelles (cf. [1]).

alors, (ω_n) est croissante, $\mathscr{C}\omega_n$ est compact et on a $\bar{\omega}_n \not\ni 0$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}\omega_n = \{0\}$. Soit ν'_n une mesure pseudo-balayée de ε dans ω_n relativement au noyau κ, on a alors

$$0 \leqq \int d(\kappa - \kappa * \nu'_n) < +\infty.$$

En effet, la mesure de Radon positive $(\kappa - \kappa * \nu'_n)^+$ étant portée par $\mathscr{C}\omega_n$, on a $+\infty > \int d(\kappa - \kappa * \nu'_n)$. Soit K un compact quelconque de X, et soit κ' la restriction de κ sur K. Si une fonction ϕ de C_K^+ est $\leqq 1$ dans X et $=1$ sur K, on a alors

$$\int \check{\phi}\, d(\kappa' - \kappa' * \nu'_n) = \int (\check{\phi} - \check{\phi} * \nu'_n)\, d\kappa' \geqq 0.$$

On utilise la symétricité de ν'_n. Par conséquent, $\int d(\kappa' - \kappa' * \nu'_n) \geqq 0$. Faisant $K \uparrow X$, on arrive à l'inégalité $\int d(\kappa - \kappa * \nu'_n) \geqq 0$. L'égalité suivante

$$(\kappa * (\varepsilon - \nu'_n)) * (\varepsilon - \nu'_m) = (\kappa * (\varepsilon - \nu'_m)) * (\varepsilon - \nu'_n)$$

a lieu d'après $\int d|\kappa * (\varepsilon - \nu'_n)| < +\infty$. La fonction $1 - \hat{\nu}'_n$ est définie-négative sur $\hat{X}$ non-zéro et à valeurs réelles, d'où $1 - \hat{\nu}'_n > 0$ presque partout sur $\hat{X}$. Il en résulte donc que la transformation de Fourier de κ est une fonction et que l'on a

$$\hat{\kappa} = \frac{\widehat{\kappa * (\varepsilon - \nu'_n)}}{1 - \hat{\nu}'_n}$$

pour tout n, car κ tend vers 0 à l'infini. Soit a_n un nombre positif tel que

$$\frac{1}{2} \int |\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x} \geqq \int |\hat{\varphi}_0|^2 \frac{a_n(1 - \hat{\nu}'_n)}{1 + a_n(1 - \hat{\nu}'_n)}\, d\hat{x} \geqq \frac{1}{4} \int |\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x},$$

et soit κ_n un noyau de Dirichlet sur X et dont la transformation de Fourier est de la forme

$$\hat{\kappa}_n = \frac{1}{1 + a_n(1 - \hat{\nu}'_n)},$$

on a alors $\int d\kappa_n \leqq 1$. La suite (κ_n) étant vaguement bornée, on peut supposer qu'elle converge vers un noyau de convolution symétrique κ_0 sur X avec $n \to \infty$. D'après l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int|\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x} \geqq \int|\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x} - \int|\hat{\varphi}_0|^2\hat{\kappa}_0 d\hat{x} \geqq \frac{1}{4}\int|\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x}$$

et le lemme 4, κ_0 est un noyau de Dirichlet sur X et $\kappa_0 \neq \varepsilon$. Il existe donc une fonction définie-négative λ sur $\hat{X}$, à valeurs réelles, telle que $\hat{\kappa}_0 = 1/\lambda$. On obtient que, quelle que soit ψ de C_K,

$$\lim_{n\to\infty}\int\hat{\psi}\frac{1}{1+a_n(1-\hat{\nu}_n')}\,d\hat{x} = \int\hat{\psi}\,\frac{1}{\lambda}\,d\hat{x},$$

et par suite, $((1+a_n(1-\hat{\nu}_n'))d\hat{x})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\lambda d\hat{x}$ avec $n\to\infty$. Par conséquent, $((a_n(1-\hat{\nu}_n'))d\hat{x})$ converge vaguement vers $\lambda_1 d\hat{x} = (\lambda-1)d\hat{x}$. La fonction étant finie et continue, elle est définie-négative. Ayant $\kappa_0 \neq \varepsilon$, on a $\lambda_1 \neq 0$, d'où $\lambda_1 > 0$ presque partout dans $\hat{X}$. On pose

$$\xi_n = (\kappa - \kappa*\nu_n')^+ \text{ et } \eta_n = (\kappa - \kappa*\nu_n')^-.$$

On a alors

$$\int|\hat{\varphi}_0|^2(1-\hat{\nu}_n')\,d\hat{x} = \int\varphi_0*\check{\varphi}_0(x)d(\varepsilon-\nu_n') \geqq \frac{1}{2n}\,\varphi_0*\check{\varphi}_0(0),$$

$$\int|\hat{\varphi}_0|^2\Big(1-\frac{1}{\int d\xi_n}\,\hat{\xi}_n\Big)\,d\hat{x} = \int\varphi_0*\check{\varphi}_0(x)d\Big(\varepsilon-\frac{1}{\int d\xi_n}\,\xi_n\Big) \leqq \frac{1}{2n}\,\varphi_0*\check{\varphi}_0(0),$$

d'où

$$\int|\hat{\varphi}_0|^2(1-\hat{\nu}_n')\,d\hat{x} \geqq \int|\hat{\varphi}_0|^2\Big(1-\frac{1}{\int d\xi_n}\,\hat{\xi}_n\Big)d\hat{x}.$$

Soit κ_n' un noyau de Dirichlet sur X et dont la transformation de Fourier est de la forme

$$\hat{\kappa}_n' = \frac{1}{1+a_n\Big(1-\frac{\hat{\xi}_n}{\int d\xi_n}\Big)},$$

alors, (κ_n') est vaguement bornée. On peut donc supposer qu'elle converge vaguement vers un noyau de convolution symétrique κ_0' sur X avec $n\to\infty$. On a $\kappa_0' \neq 0$, car

$$\int|\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x} \leqq \Big(\int|\hat{\varphi}_0|^2\Big(1+a_n\Big(1-\frac{\hat{\xi}_n}{\int d\xi_n}\Big)\Big)d\hat{x}\Big)^{1/2}\Big(\int|\hat{\varphi}_0|^2\hat{\kappa}_n' d\hat{x}\Big)^{1/2}$$

$$\leqq \Big(\int|\hat{\varphi}_0|^2(1+a_n(1-\hat{\nu}_n'))\,d\hat{x}\Big)^{1/2}\Big(\int|\hat{\varphi}_0|^2\hat{\kappa}_n'\,d\hat{x}\Big)^{1/2},$$

d'où

$$\frac{\left(\int|\hat{\varphi}_0|^2 d\hat{x}\right)^2}{\int|\hat{\varphi}_0|^2(1+\lambda_1)d\hat{x}} \leqq \int|\hat{\varphi}_0|^2\hat{\kappa}_0' d\hat{x}.$$

Le noyau de convolution κ_0' tendant vers O à l'infini, il est un noyau de Dirichlet sur X. De la même manière, il existe une fonction définie-négative λ_3 sur $\hat{X}$, à valeurs réelles et telle que $\left(a_n\left(1-\hat{\xi}_n\Big/\int d\xi_n\right)d\hat{x}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\lambda_3 d\hat{x}$. On a

$$a_n\hat{\kappa}(1-\hat{\nu}_n') = a_n\widehat{\kappa*(\varepsilon-\nu_n')} = a_n(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\eta}_n(\hat{x})) - a_n(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\xi}_n(\hat{x})).$$

On a $\int d\xi_n \leqq \int_{\mathscr{C}\omega_n} d\kappa < +\infty$. Si $\lim_{n\to\infty}\int d\xi_n = 0$, on a alors $a_n(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\xi}_n(\hat{x}))$ $\to 0$ presque partout dans $\hat{X}$. Si $\overline{\lim}_{n\to\infty}\int d\xi_n > 0$, on peut supposer que $\left(\int d\xi_n\right)$ converge vers une constante positive avec $n\to\infty$, car on peut prendre une sous-suite convergente de $\left(\int d\xi_n\right)$ si c'est nécessaire. Il en résulte donc que toute la sous-suite (ν_m') de (ν_n') ne converge pas vaguement vers ε avec $m\to\infty$, et donc, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n < +\infty$. Par conséquent, $a_n(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\xi}_n)\to 0$ presque partout sur $\hat{X}$, car (ξ_n) converge vaguement vers $\left(\lim_{n\to\infty}\int d\xi_n\right)\varepsilon$ avec $n\to\infty$ et $S_{\xi_n}\subset C\omega_1$. Soit n_0 un entier >0. Pour une fonction finie et continue $\hat{\varphi}$ sur $\hat{X}$ à support compact et telle que $1-\hat{\nu}_{n_0}'(\hat{x})>0$ sur $S_{\hat{\varphi}}$, on a

$$\int\hat{\varphi}\hat{\kappa}\lambda_1 d\hat{x} = \lim_{n\to\infty} a_n\int\hat{\varphi}(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\eta}_n)d\hat{x},$$

car on peut supposer que $\hat{\kappa}$ est une fonction finie et continue dans un voisinage de $S_{\hat{\varphi}}$. En utilisant la même méthode que celle pour $a_n(1-\hat{\nu}_n')$, on arrive à la conclusion qu'il existe une fonction définie-négative λ_2 sur $\hat{X}$ telle que la suite $(a_n(\hat{\xi}_n(\hat{0})-\hat{\eta}_n)d\hat{x})$ converge vaguement vers $\lambda_2 d\hat{x}$ avec $n\to\infty$. L'ensemble $\{\hat{x}\in\hat{X};\, 1-\hat{\nu}_{n_0}'(\hat{x})>0\}$ étant ouvert, on a $\hat{\kappa}\lambda_1=\lambda_2$ presque partout dans $\{\hat{x}\in\hat{X};\, 1-\hat{\nu}_{n_0}'(\hat{x})>0\}$, d'où $\hat{\kappa}=\lambda_2/\lambda_1$ presque partout sur $\hat{X}$.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\kappa_{n,i}$ le noyau de Dirichlet sur X dont la transformation de Fourier est de la forme

$$\hat{\kappa}_{n,i} = \frac{1}{1/n+\lambda_i} \qquad (i=1,2).$$

Posons, pour deux entiers n, $m>0$,

$$\kappa_{n,m} = \kappa_{n,1}*(m\varepsilon - m^2\kappa_{1/m,2}),$$

alors, quelle que soit f de $M_K^+, u_f^{(n,m)} \leqq 1$ presque partout sur X dès que $u_f^{(n,m)} \leqq 1$ presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$, où $u_f^{(n,m)}$ est la densité de $\kappa_{n,m}*f$.[3] Cela résulte du principe complet du maximum pour $\kappa_{n,1}$.[4] On a $\kappa_{n,m} \leqq \kappa*(m\kappa_{1/m,2})$ et $(\kappa_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\kappa*(m\kappa_{1/m,2})$ avec $n \to \infty$, et $\kappa*(m\kappa_{1/m,2})$ satisfait donc au principe classique du maximum. Soit $\mathfrak{X}$ un espace fonctionnel invariant par translations et dont le noyau est κ.[5] Pour une fonction f de M_K, $u_f^{(m)}$ appartient à $\mathfrak{X}$ et $(u_f^{(m)})$ converge fortement vers u_f dans $\mathfrak{X}$ avec $m \to \infty$, où $u_f^{(m)}$ et u_f sont respectivement les densités de $\kappa*(m\kappa_{1/m,2})*f$ et $\kappa*f$ par rapport à la mesure de Haar. On suppose ici que, pour une fonction f de M_K^+, $u_f \leqq 1$ presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. Ponsons, pour un nombre $\delta > 0$,

$$e_{m,\delta} = \{x \in X; f(x) > 0,\ u_f^{(m)}(x) > 1 + \delta\}.$$

et soit g_m la fonction caractéristique de $e_{m,\delta}$. La suite (u_{g_m}) étant bornée dans $\mathfrak{X}$, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers un élément u_0 dans $\mathfrak{X}$ avec $m \to \infty$, et on a donc

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} |(u_f^{(m)}, u_{g_m}) - (u_f, u_0)| \\ &\leqq \lim_{m\to\infty} (|(u_f^{(m)} - u_f, u_{g_m})| + |(u_f, u_{g_m} - u_0)|) \\ &\leqq \lim_{m\to\infty} ((\sup_{0<n<+\infty} \|u_{g_n}\|) \|u_f^{(m)} - u_f\| + |(u_f, u_{g_m} - u_0)|) = 0, \end{aligned}$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de $\mathfrak{X}$. Par conséquent, on a

$$(u_f, u_0) \geqq (1+\delta) \varlimsup_{m\to\infty} \int g_m dx.$$

D'autre part, on a

$$(u_f, u_0) = \lim_{m\to\infty} (u_f, u_{g_m}) \leqq \varliminf_{m\to\infty} \int g_m dx,$$

---

[3] La difference $\kappa = \kappa_1 - \kappa_2$ de deux noyaux de convolution est dite aussi de satisfaire au principe classique du maximum si, quelle que soit f de M_K^+, $u_f \leqq 1$ presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\} \Longrightarrow u_f \leqq 1$ presque partout, où u_f est la densité de $\kappa*f$ par rapport à la mesure de Haar.

[4] On dit qu'un noyau de convolution κ satisfait au principe complet du maximum si, quelles que soient f, g de M_K^+, $u_f \leqq u_g + 1$ presque partout sur X dès que la même inégalité a lieu presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

[5] Pour sa définition, voir [4].

et par suite, $\lim_{m\to\infty}\int g_m dx = 0$. En prenant une sous-suite de $(e_{m,\delta})$ si c'est nécessaire, on peut considérer que la mesure de $\bigcup_{m=k}^{\infty} e_{m,\delta}$ soit $\leqq 1/k$. Soit f_k la restriction de f sur $\mathscr{C}\bigcup_{m=k}^{\infty} e_{m,\delta}$, et alors, quel que soit $m \geqq k$, $u_{f_k}^{(m)} \leqq 1+\delta$ presque partout sur $\{x \in X;\, f_k(x) > 0\}$, et don $u_{f_k}^{(m)} \leqq 1+\delta$ presque partout sur X. Faisant $m \to \infty$, on arrive à l'inégalité $u_{f_k} \leqq 1+\delta$ presque partout sur X. Faisant ensuite $k \to \infty$ et $\delta \to 0$, on obtient que $u_f \leqq 1$ presque partout sur X. La démonstration est ainsi complète.

Corollaire. *Soit κ un noyau de Dirichlet sur X, alors la part singulière κ_s par rapport à la mesure de Haar satisfait au principe classique du maximum.*

En effet, soit $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante de M_K^+ et telle que le support de f_α soit contenu dans un compact fixé et que $(f_\alpha dx)_{\alpha\in I}$ converge vaguement vers ε. D'après la théorie de l'espace de Dirichlet (cf. [1]), il existe une mesure de Radon positive $\mu_{\alpha,m}$ dans X, à $\int d\mu_{\alpha,m} \leqq 1$, telle que

$$\kappa*\mu_{\alpha,m} = (\inf(m, u_{f_\alpha}))dx,$$

et par suite, il existe une mesure de Radon positive μ_m dans X, à $\int d\mu_m \leqq 1$, telle que

$$\kappa*\mu_m = (\inf(m, k))dx,$$

où $\kappa - \kappa_s = kdx$. En faisant $m \to \infty$, il existe une mesure de Radon positive μ dans X, à $\int d\mu \leqq 1$, telle que

$$\kappa*\mu = \kappa - \kappa_s, \text{ d'où } \kappa_s = \kappa*(\varepsilon - \mu).$$

Il en résulte que κ_s satisfait au principe classique du maximum.

Remaque 2. Soit X_1 un groupe abélien compact, et soit X_2 un groupe abélien non-compact. La mesure de Haar sur X_1 est un noyau de convolution symétrique sur $X = X_1 \times X_2$ et il satisfait au principe classique du maximum. Mais sa transformation de Fourier n'est pas de la forme de notre théorème.

Références

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), p. 208–215.

[2] J. Deny: Les princpes du maximum en théorie du potentiel, Sém. Brelot-Choquet-Deny, 1972, **n°9.**

[3] J. Deny: Le principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), p. 259–272.

[4] M. Itô: Les noyaux réguliers et les noyaux singulières, à paraître.

[5] J.-P. Kahn: Quotients de fonctions définies-négatives, Sém. Bourbaki, 1966/67, **n°315.**

[6] K. Kunugui: Etude sur la théorie du potentiel généralisé, Osaka Math. J., **2** (1950), p. 63–103.

Institut Mathématique
Université de Nagoya