Yoshifusa Ito
Nagoya Math. J.
Vol. 41 (1971), 107–119

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ ET LA CONTINUITÉ DES POTENTIELS ASSOCIÉS EN VALEUR PRINCIPALE À NOYAUX SINGULIERS ET M-FOIS RÉGULARISANTS

YOSHIFUSA ITO

D'après D. Courrège [1], l'opérateur de convolution associé en valeur principale à un noyau de Caldéron-Zygmund homogène de classe $C^{o,\mu}(\sum_n)$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ si $0<\lambda<\mu\leqslant 1$, et l'opérateur de convolution associé à un noyau homogène de degré $m-n$ et de classe $C^{m,\mu}(\sum_n)$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda}(R^n)$ si $0<\lambda<\mu\leqslant 1$.

D'abord on définira une classe $N^{o,\eta,\mu}$ des noyaux qu'on appellera ici noyaux singuliers. Cette classe contient noyaux de Caldéron-Zygmund homogène de classe $C^{o,\mu}(\sum_n)$, et η $(0\leq\eta<1)$ est un paramètre ayant rapport à la singularité de noyau. L'opérateur de convolution associé en valeur principale à un noyau de classe $N^{o,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$ si $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$.

Ensuite, on définira une classe $N^{m,\eta,\mu}(m\geq 1$ entier) des noyaux qu'on appellera ici noyaux m-fois régularisants. Un noyau $h(r\theta)$ de classe $N^{m,\eta,\mu}$ est, par définition, un noyau, dont les dérivées partielles d'ordre β $(0\leqslant|\beta|\leqslant m)$ sont dans $N^{o,\eta,\mu}$. L'opérateur de convolution associé à un noyau de classe $N^{m,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\mu}(R^n)$ si $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$.

Comme application, l'opérateur de convolution associé au noyau de la potentiel d'ordre α $(m-1<\alpha\leqslant m,\ m\geqslant 1$ impair) applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-(\alpha-m)}(R^n)$ si $\lambda>\alpha-m$.

1. Préliminaire; espace de fonctions Höldériennes.

On désigne par $C^p(\Omega)$ (Ω sous-espacs de R^n, $p\geq 0$ entiers) l'espace des fonctions continues définies sur Ω à valeur réelles ou complexes ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre p.

Received September 5, 1969.

Si $0 < \lambda \leqslant 1$, on pose,

$$[f]_{o,\lambda} = \sup_{\substack{x \in \Omega,\ x' \in \Omega \\ x \neq x'}} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^{\lambda}} \qquad \text{pour } f \in C^{0}(\Omega)$$

$$[f]_{p,\lambda} = \sum_{|\beta|=p} [D^{\beta} f]_{o,\lambda} \qquad \text{pour } f \in C^{p}(\Omega),$$

où β est un système d'entiers ≥ 0, $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$, et $|\beta|$ la somme $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$; D^{β} est le symbole de dérivation partielle

$$D^{\beta} = \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

On pose,

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad \text{pour } f \in C^{0}(\Omega),$$

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sum_{0 \leqslant |\beta| \leqslant p} \|D^{\beta} f\| + [f]_{p,\lambda} \qquad \text{pour } f \in C^{p}(\Omega).$$

On désigne par $C^{p,\lambda}(\Omega)$ le sous-espace de $C^{p}(\Omega)$ formé des fonctions $f \in C^{p}(\Omega)$ avec $\|f\|_{p,\lambda} < \infty$. On désigne par $C_k^{p,\lambda}(\Omega)$ (resp. $C_K^{p,\lambda}(\Omega)$) le sous-espace de $C^{p,\lambda}(\Omega)$ formé des fonctions à support compact (resp. à support compact contenu dans le compact fixé K).

Les espaces $C^{p,\lambda}(\Omega)$ et $C_K^{p,\lambda}(\Omega)$ sont munis de la topologie associée à la norme $\| \ \|_{p,\lambda}$. Cettes espaces sont des espaces de Banach.

2. Noyaux semi-singuliers.

Un noyau semi-singulier sur R^n est, par définition, une fonction $k(r\theta) \in C^{0}(R^n \backslash \{0\})$ satisfaisante aux conditions suivantes a) et b).

a) $Q(r) = r^{n-1} \left| \int_{\Sigma_n} k(r\theta) \sigma_n(d\theta) \right|$ *est localment sommable sur* $[0, \infty)$, *où* $\sum_n$ *est la sphère d'unité de* R^n *et* σ_n *la measure superficielle sur* $\sum_n$.

b) *Il existe un nombre* η $(0 \leq \eta < 1)$ *et un nombre positif* M *tel que*

$$\limsup_{z \to 0} |z|^{n+\eta} k(z) < M.$$

On définit, pour $\varepsilon > 0$,

$$k_{\varepsilon}(z) = \begin{cases} k(z) & \text{si} \quad |z| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |z| < \varepsilon \end{cases}$$

et on va étudier

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(x-z) dz.$$

PROPOSITION 2.1.

Soient k un noyau semi-singulier, et $\eta < \lambda$. Alors, quelle que soit $f \in C_k^{0,\lambda}(R^n)$, $k_\varepsilon * f(x)$ converge uniformément en $x \in R^n$. D'où la limite est une fonction continue sur R^n.

Si $|k(z)|$ est bornée en dehors d'un voisinage de l'origine, la limite est une fonction bornée sur R^n.

Démonstration.

R étant un nombre >0, on a, pour un nombre positif $\varepsilon < R$,

$$\int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(x-z) dz = \int_{|z| \geq R} k(z) f(x-z) dz + \int_{R > |z| \geq \varepsilon} k(z)[f(x-z) - f(x)] dz + \int_{R > |z| \geq \varepsilon} k(z) f(x) dz.$$

$\int_{|z| \geq R} k(z) f(x-z) dz$ est une fonction continue sur R^n, et, si $|k(z)|$ est bornée en dehors d'un voisinage de l'origine, elle est bornée sur R^n.

$$\int_{R > |z| \geq \varepsilon} |k(z)[f(x-z) - f(x)]| \, dz \leqslant \int_\varepsilon^R \frac{M_R}{r^{n+\eta}} [f]_{o,\lambda} r^{n+\lambda-1} \omega_n dr \leqslant M_R [f]_{o,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda - \eta} R^{\lambda-\eta}$$

où $\omega_n = \sigma_n(\sum_n)$ et $M_R = \sup |z|^{n+\eta} |k(z)|$.

D'après a) et le fait que le norme de f est fini, $\int_{R > |z| \geq \varepsilon} k(z) f(x) dz$ converge absolument et uniformément dans R^n.

Enfin, la fonction continue $k_\varepsilon * f(x)$ converge absolument et uniformément dans R^n, ε tendant vers 0. c.q.f.d.

À un noyau satisfaisant aux conditions a) et b), on associe une application linéaire $\tilde{k}$ de $C_k^{0,\lambda}(R^n)$ $(\lambda > \eta)$ dans $C^0(R^n)$, en posant,

$$\tilde{k} f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(x-z) dz.$$

Si, pour chaque $f \in C_k(R^n)$, on pose

$$\langle V_p k, \check{f} \rangle = \tilde{k} f(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(z) dz,$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$, on définit une distribution $V_p k$ sur R^n appellée la distribution valeur principale de k.

Et on a (cf. [1]),

$$V_p k * f = \tilde{k} f \qquad \text{pour toute } f \in C_K^{0,\lambda}(R^n) \quad (\lambda > \eta).$$

3. Noyaux singuliers.

On appellera un noyau singulier de classe $N^{0,\eta,\mu}$ $(0 < \mu \leqslant 1)$ un noyau k satisfaisant aux conditions a), b), c) et d).

c) *Il existe un nombre* $R > 0$ *tel que*

$$|z|^{n+\eta+\mu} k(z) \in C^{0,\mu} \ (0 < |z| \leqslant R).$$

d) $|k(z)|$ *est bornée en dehors d'un voisinage de l'origine.*

Pour $k \in N^{0,\eta,\mu}$, on pose,

$$\|k\|_R^{(1)} = \int_0^R Q(r)\,dr,$$

$$\|k\|_R^{(2)} = \sup_{\substack{z \in R^n \\ 0 < |z| < R}} |z|^{n+\eta} |k(z)|,$$

$$\|k\|_R^{(3)} = \sup_{\substack{z \in R^n,\, z' \in R^n \\ 0 < |z| < R,\, 0 < |z| < R \\ z \neq z'}} \frac{\left| |z'|^{n+\eta+\mu} k(z') - |z|^{n+\eta+\mu} k(z) \right|}{|z' - z|^{\mu}},$$

$$\|k\|_R^{(4)} = \sup_{\substack{z \in R^n \\ |z| > 1}} |k(z)|$$

et $\qquad \|k\| = \|k\|_R^{(1)} + \|k\|_R^{(2)} + \|k\|_R^{(3)} + \|k\|_R^{(4)}.$

On va étudier le norme de $\tilde{k} f$.

Théorème 1.

Si k est un noyau de classe $N^{0,\eta,\mu}$ et λ un nombre tel que $\lambda \leq 1$, $0 < \lambda - \eta < \mu \leqslant 1$. Alors, quelle que soit $f \in C_K^{0,\lambda}(R^n)$,

1) il existe une constante positive C_K^1 dépendante de K telle que

$$[\tilde{k} f]_{0,\lambda-\eta} \leqslant C_K^1 \|k\| \, [f]_{0,\lambda},$$

2) il existe une constante positive C_K dépendante de K telle que

$$\|\tilde{k} f\|_{0,\lambda-\eta} \leqslant C_K \|k\| \, \|f\|_{0,\lambda}.$$

Démonstration.

Soient x et x' deux points fixés de R^n tels que $|x' - x| = d \leqslant S$, $S = min\left(\frac{R}{3}, 1\right)$, et $B_\rho(x)$ la boule de centre x et rayon ρ.

D'après la définition de $\tilde{k}$,

$$\tilde{k}f(x') = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy + \int_{B_R(x')\backslash B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]\,dy$$
$$+ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_R(x')\backslash B_\varepsilon(x')} k(x'-y)f(x')dy + \int_{CB_R(x')} k(x'-y)f(y)dy,$$

$$\tilde{k}f(x) = \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy + \int_{B_R(x)\backslash B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x')]dy$$
$$+ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_R(x)\backslash B_\varepsilon(x)} k(x-y)f(x)\,dy + \int_{B_R(s)\backslash B_{2d}(x)} k(x-y)[f(x')-f(x)]dy$$
$$+ \int_{CB_R(x)} k(x-y)f(y)dy\,.$$

On pose,

$$\tilde{k}f(x') - \tilde{k}f(x) = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 + I_6 + I_7, \quad \text{où}$$

$$I_1 = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy, \qquad I_2 = \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy,$$

$$I_3 = \int_{(B_R(x')\cap B_R(x))\backslash B_{2d}(x)} [k(x'-y)-k(x-y)][f(y)-f(x')]dy,$$

$$I_4 = \int_{B_R(x')\backslash B_R(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy, \quad I_5 = \int_{B_R(x)\backslash B_R(x')} k(x-y)[f(y)-f(x')]dy,$$

$$I_6 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_R(x')\backslash B_\varepsilon(x')} k(x'-y)f(x')dy - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_R(x)\backslash B_\varepsilon(x)} k(x-y)f(x)dy$$
$$- \int_{B_R(x)\backslash B_{2d}(x)} k(x-y)[f(x')-f(x)]dy = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_{2d}(0)\backslash B_\varepsilon(0)} k(y)[f(x')-f(x)]dy,$$

$$I_7 = \int_{CB_R(x')} k(x'-y)f(y)dy - \int_{CB_R(x)} k(x-y)f(y)dy = \int_{CB_R(0)} k(y)[f(x'-y)-f(x-y)]dy.$$

On majore alors séparément chacun de ces termes;

$$|I_1| \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \int_{B_{2d}(x)} \frac{dy}{|y-x'|^{n+\eta-\lambda}} \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \frac{3^{\lambda-\eta}}{\lambda-\eta}\,\omega_n d^{\lambda-\eta}.$$

De même,

$$|I_2| \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \frac{2^{\lambda-\eta}}{\lambda-\eta}\,\omega_n d^{\lambda-\eta}.$$

Ensuite,

$$|I_3| \leqslant [f]_{0,\lambda} \int\limits_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} |k(x'-y)-k(x-y)|\ |y-x'|^{\lambda} dy.$$

Pour majorer $|k(x'-y)-k(x-y)|$, en posant $z'=x'-y$ et $z=x-y$, on a,

$$\begin{aligned}|k(z')-k(z)| &\leqslant \frac{1}{|z'|^{n+\eta+\mu}}\Big[\Big|\,|z'|^{n+\eta+\mu}k(z')-|z|^{n+\eta+\mu}k(z)\,\Big|+|k(z)|\Big||z'|^{n+\eta+\mu}-|z|^{n+\eta+\mu}\Big|\Big]\\ &\leqslant \frac{\|k\|}{|z'|^{n+\eta+\mu}}\Big[|z'-z|^{\mu}+|z|^{\mu}\Big|\frac{|z'|^{n+\eta+\mu}}{|z|^{n+\eta+\mu}}-1\Big|\Big]\\ &\leqslant \frac{\|k\|}{|z'|^{n+\eta+\mu}}|z'-z|^{\mu}\left(1+\frac{\Big|\frac{|z'|z^{n+\eta+\mu}}{|z|^{n+\eta+\mu}}-1\Big|}{\Big|\frac{|z'|}{|z|}-1\Big|^{\mu}}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2}\leqslant\frac{|z'|}{|z|}\leqslant\frac{3}{2}$, il existe un nombre positif M_1 tel que

$$1+\frac{\Big|\frac{|z'|^{n+\eta+\mu}}{|z|^{n+\eta+\mu}}-1\Big|}{\Big|\frac{|z'|}{|z|}-1\Big|^{\mu}}<M_1.$$

Alors, $|k(z')-k(z)|<M_1\|k\|d^{\mu}\frac{1}{|x'-y|^{n+\eta+\mu}}$.

D'où

$$|I_3|\leqslant \int\limits_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} \frac{M_1\|k\|[f]_{0,\lambda}d^{n}}{|x'-y|^{n+\eta+\mu-\lambda}}\,dy < M_1\,\|k\|\,[f]_{0,\lambda}\,\frac{\omega_n}{\mu-\lambda+\eta}\,d^{\lambda-\mu}.$$

Les majorations des $|I_4|$ et $|I_5|$ sont faciles;

$$|I_4|\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda}\int\limits_{B_R(x')\setminus B_{R-d}(x')}\frac{dy}{|y-x'|^{n+\eta-\lambda}}\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda}\frac{\omega_n}{\lambda-\eta}\,d^{\lambda-\eta},$$

et
$$|I_5|\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda}\int\limits_{B_R(x)\setminus B_{R-d}(x)}\frac{dy}{|y-x|^{n+\eta}|y-x'|^{-\lambda}}\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda}\frac{2^{\lambda}\omega_n}{\lambda-\eta}\,d^{\lambda-\mu}.$$

Finalement,

$$|I_6|\leqslant [f]_{0,\lambda}d^{\lambda}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{2d}r^{n-1}dr\Big|\int\limits_{\Sigma_n}k(r\theta)\sigma_n(d\theta)\Big|\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda}d^{\lambda}$$

et
$$|I_7|\leqslant \int\limits_{CB_R(0)}\|k\|[f(x'-y)-f(x-y)]dy\leqslant 2|K|\ \|k\|[f]_{0,\lambda}d^{\lambda},$$

où $|K|$ est la mesure de Lebesgue de K.

Puisque $\eta \geq 0$ et $0 < d \leq 1$,

$$|I_6| \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} d^{\lambda-\eta} \quad \text{et} \quad |I_7| \leqslant 2|K| \, \|k\|[f]_{0,\lambda} d^{\lambda-\eta}.$$

Par conséquent, si $|x' - x| \leq S$,

(3,1) $\dfrac{|\tilde{k}f(x') - \tilde{k}f(x)|}{|x' - x|^{\lambda-\eta}} < C^*\|k\|[f]_{0,\lambda}$, où C^* est une constante positive dépendante de K, et, si $|x' - x| > S$,

$$\frac{|\tilde{k}f(x') - kf(x)|}{|x' - x|^{\lambda-\eta}} < \frac{2}{S^{\lambda-\eta}} \|\tilde{k}f\|, \tag{3,2}$$

où, $\|\tilde{k}f\| < +\infty$, d'après la proposition (2.1).

Ensuite, on va majorer $|\tilde{k}f(x)|$.

On a

$$|\tilde{k}f(x)| \leqslant \left| \int_{|z|<R} k(z)[f(x-z) - f(x)]dz \right| + \left| \int_{R \leqslant |z|} k(z)f(x-z)dz \right| + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{R > |z| \geq \varepsilon} k(z)f(x)dz \right.$$
$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

où J_1, J_2 et J_3 sont respectivement le premier, le second et le troisième terme au second membre.

On majore successivement chacun de ces termes;

$$J_1 \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \int_{|z|<R} \frac{dz}{|z|^{n+\eta-\lambda}} \leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda - \eta} R^{\lambda-\eta},$$
$$J_2 \leqslant |K| \, \|k\| \, \|f\|.$$

Enfin

$$J_3 \leqslant \|f\| \int_0^R Q(r)dr \leqslant \|k\| \, \|f\|.$$

En posant $D_K =$ *le diametre de* K, on a

$$\|f\| < [f]_{0,\lambda} D_K^{\lambda} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{k}f\| &\leqslant \|k\|[f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda - \eta} R^{\lambda-\eta} + \|k\|[|K| + 1]\|f\| \\ &< \|k\| \left[\frac{\omega_n}{\lambda - \eta} R^{\lambda-\eta} + [|K| + 1] D_K^{\lambda} \right] [f]_{0,\lambda}. \end{aligned} \tag{3,3}$$

Les inégalités (3,1), (3,2), et (3,3) montrent l'existence des constantes C_K^1 et C_K de notre théorème. c.q.f.d.

THÉORÈME II.

Si k est un noyau de classe $N^{o,\eta,\mu}$ et λ un nombre tel que $\lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \lambda - \eta < \mu \leqslant 1$. Alors l'opérateur de convolution associé en valeur principale à k applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$; et on a, pour chaque $f \in C_K^{p,\lambda}(R^n)$ $(0 \leqslant |\beta| \leqslant p)$,

$$D^\beta(\tilde{k}f) = \tilde{k}(D^\beta f).$$

Démonstration (cf. [1]).

En notant D' la dérivation au sens des distribution,

$$D'^\beta(V_p k * f) = V_p k * D'^\beta f = V_p k * D^\beta f \in C^{o,\lambda-\eta}(R^n).$$

La continuité de $\tilde{k}$ de $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$ résulte de celle de $\tilde{k}$ de $C_K^{0,\lambda}(R^n)$ dans $C^{o,\lambda-\eta}(R^n)$.

4. Noyau m-fois régularisant.

Un noyau de convolution m-fois régularisant est, par définition, un noyau h tel que $D^\beta h$ $(0 \leqslant |\beta| \leqslant m,\ m \geqslant 1$ entier) est un noyau singulier. On note $N^{m,\eta,\mu}$ une classe formées des noyaux m-fois régularisants.

On va chercher les conditions suffisantes que un noyau h appartient à class $N^{m,\eta,\mu}$.

PROPOSITION 4.1.

Soit h un noyau de $C^1(R^n\backslash\{0\})$ tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\left|\int_{\Sigma_n} D_r r^{n-1} h(r\theta)\cdot \theta_i \sigma_n(d\theta)\right|$ est localment sommable sur $[0, \infty)$, où $\theta_i = \frac{z_i}{|z|}$. Alors, pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$r^{n-1}\left|\int_{\Sigma_n} D_i h(r\theta)\sigma_n(d\theta)\right| \text{ est localment sommable sur } [0, \infty).$$

Démonstration.

Soit φ une fonction-positive telle que

$$\text{supp } \varphi \subset (-1, 1) \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \varphi(t)dt = 1.$$

On pose successivement, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(t+\frac{1}{2}\Big)\Big) - \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big), \quad \varphi_{r,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_\varepsilon\Big(\frac{1}{\varepsilon}\,(t-r)\Big)$$

et $$\rho_\varepsilon(t) = \int_0^t \varphi_{r,\varepsilon}(t)dt.$$

Une intégration par parties donne,

$$\int_{R_n} D_i h(x)\rho_\varepsilon(|x|)dx = -\int_{R^n} h(x)\rho'_\varepsilon(|x|)\theta_i dx.$$

En calculant les deux membres en coordonnées polaires, on obtient

$$\int_0^\infty \rho_\varepsilon(t)t^{n-1}dt \int_{\Sigma_n} D_i h(t\theta)\sigma_n(d\theta) = -\int_{\Sigma_n} \theta_i\sigma_n(d\theta)\int_0^\infty \rho'_\varepsilon(t)t^{n-1}h(t\theta)dt.$$

Cependant, pour ε petit,

$$\int_0^\infty \rho'_\varepsilon(t)t^{n-1}h(t\theta)dt = \frac{1}{\varepsilon}\Big[r_1^{n-1}h(r\theta) - r_2^{n-1}h(r\theta)\Big],$$

où $$r-\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2 \leqslant r_1 \leqslant r-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2 \quad \text{et} \quad r+\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2 \leqslant r_2 \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2.$$

Enfin, ε tendant vers 0, on a

$$r^{n-1}\Big|\int_{\Sigma_n} D_i h(r\theta)\sigma_n(d\theta)\Big| = \Big|\int_{\Sigma_n} \theta_i D_r r^{n-1}h(r\theta)\sigma_n(d\theta)\Big|.$$

c.q.f.d.

PROPOSITION 4.2.

Soit h un noyau de $C^m(R^n\backslash\{0\})$.

1) S'il existe un nombre positif M tel que

$$\limsup_{z\to 0} |D^\beta|z|^{n+\eta+|\beta|-m}h(z)| < M \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant |\beta| \leqslant m,$$

alors il existe un nombre positif M' tel que

$$\limsup_{z\to 0}\Big||z|^{n+\eta+|\beta|-m}D^\beta h(z)\Big| < M' \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant |\beta| \leqslant m.$$

2) Si $|z|^\mu D^\beta|z|^{n+\eta+|\beta|-m}h(z) \in C^{0,\mu}(0<|z|\leqslant R)$ $(0<\mu\leqslant 1)$ pour $0\leqslant|\beta|\leqslant m$, alors $|z|^{n+\eta+|\beta|-m+\mu}D^\beta h(z) \in C^{0,\mu}(0<|z|\leqslant R)$ pour $0<|\beta|\leqslant m$.

Démonstration.

Il suffit de montrer 2) pour $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. En supposant que 2) a lieu pour chaque β tel que $0 \leqslant |\beta| < k \leqslant m$, on montre 2) pour p tel que $|p| = k$.

D'après la formule de Leibniz,

$$D^p |z|^{n+\eta+|p|-m} h(z) = \sum_{\beta \leqslant p} a_\beta D^{p-\beta} |z|^{n+\eta+|p|-m} D^\beta h(z) = \sum_{\beta \leqslant p} \frac{P_{p-\beta}}{|z|^{|p-\beta|}} |z|^{n+\eta+|\beta|-m} D^\beta h(z)$$

où $P_{p-\beta}$ est un polynôme homogène de $\{z_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de degré $|p-\beta|$ et $\beta \leqslant p$ l'abrégée de $\beta_i \leqslant p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Si, pour $\beta < p$, $|z|^\mu \dfrac{P_{p-\beta}}{|z|^{|p-\beta|}} |z|^{n+\eta+|\beta|-m} D^\beta h(z) \in C^{0,\mu}(0 < z \leqslant R)$, alors, $|z|^{n+\eta+|p|-m+\mu} D^p h(z) \in C^{0,\mu}(0 < z \leqslant R)$ par les hypothèses.

Par suite, il suffit de prouver le lemme suivant.

LEMME.

Soit P_q $(0 < q$ entier) un polynôme homogène de $\{z_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de degré q. Alors, pour un nombre positif arbitraire R,

$$|z|^\mu \frac{P_q}{|z|^q} \in C^{0,\mu}(0 < z \leqslant R).$$

Démonstration.

Il suffit de prouver qu'il existe un nombre positif M tel que, pour $|z'| \leqslant R$, $|z| \leqslant R$ $(z' \neq z)$,

$$\frac{\left| |z'|^{\mu-|k|} z'^k - |z|^{\mu-|k|} z^k \right|}{|z'-z|^\mu} < M$$

où k est une système d'entiers $\geqslant 0$, $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$, $\sum_i k_i = k$, et, $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n}$. On a

$$\left| |z'|^{\mu-|k|} z'^k - |z|^{\mu-|k|} z^k \right| \leqslant R^{\mu\left(1-\frac{1}{k}\right)} \sum_i k_i \left| |z'|^{(\mu/k)-1} z'_i - |z|^{(\mu/k)-1} z_i \right|.$$

La majoration de $\dfrac{\left| |z'|^{(\mu/k)-1} z'_i - |z|^{(\mu/k)-1} z_i \right|}{|z'-z|^\mu}$ n'offre pas de difficulté.

c.q.f.d.

Si un noyau h satisfait aux hypothèses de la proposition 4.2. pour un nombre $R>0$ et à la condition suivante d'), et $D^{\beta}h$ ($|\beta|=m-1$) satisfait aux hypothèses de la proposition 4.1., alors h est un noyau m-fois régularisant.

d') $|D^{\beta}h(z)|$ $(0\leqslant|\beta|\leqslant m)$ *est bornée en dehors de l'origine.*

Ensuite, on va calculer $D_i(h*f)$, où h est un noyau m-fois régularisant. La démonstration de théorème III repose sur le lemme suivant;

LEMME.

Si h est un noyau de classe $N^{1,\eta,\mu}$,

$$\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta)$$

converge, ε tendant vers 0.

Démonstration.

En vertu de la formule de Green, on a

$$\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) = R^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) - \int_{R\geq|x-y|\geq\varepsilon} D_ih(x-y)dy.$$

Le premier terme au second membre est une constante et le second terme converge. D'où on a le lemme. c.q.f.d.

On pose

$$C_i(h)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta).$$

THÉORÈME III.

Soit h un noyau de classe $N^{m,\eta,\mu}$. Alors,

1) si $m>1$, pour toute $f\in C_k^0(R^n)$, $h*f\in C^1(R^n)$ et

$$D_i(h*f)=(D_ih)*f \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$

2) si $m=1$, pour toute $f\in C_k^{0,\lambda}(R^n)$ $(0<\lambda-\eta<\mu)$, $h*f\in C^1(R^n)$ et

$$D_i(h*f)=(V_pD_ih)*f+C_i(h)f. \qquad (1\leqslant i\leqslant n).$$

Démonstration.

En posant $\varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} h(x-y)\, f(y)dy$, on a (cf. [1])

$$D_i\varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} D_i h(x-y)\, f(y)dy + \varepsilon^{n-1}\int\limits_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)f(x-\varepsilon)\theta_i\sigma_n(d\theta).$$

1) Si $m>1$ et $f\in C_k^0(R^n)$,

$$D_i(h*f) = (D_i h)*f \qquad (1\leqslant i\leqslant n).$$

2) Si $m=1$ et $f\in C_k^{0,\lambda}(R^n)$ $(0<\lambda-\eta<\mu)$, on a

$$\left|\varepsilon^{n-1}\int\limits_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)f(x-\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) - \varepsilon^{n-1}\int\limits_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)f(x)\theta_i\sigma_n(d\theta)\right|$$

$$\leqslant [f]_{0,\lambda}\varepsilon^{n+\lambda-1}\int\limits_{\Sigma_n}|h(\varepsilon\theta)|\sigma_n(d\theta)\leqslant M[f]_{0,\lambda}\varepsilon^{\lambda-\mu} \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$

où M est une constante.

Par suite,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{n-1}\int\limits_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)f(x-\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) = C_i(h)f(x)$$

et la convergence a lieu uniformément dans R^n. Le premier terme au second membre tend vers $(V_pD_ih)*f(x)$ uniformément dans R^n. D'où le théorème; puisque $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi_\varepsilon(x) = h*f(x)$. c.q.f.d.

Soit h un noyau m-fois régularisant. Alors, pour $0\leqslant|\beta|\leqslant m-1$, $D^\beta h$ est un noyau $(m-|\beta|)$-fois régularisant. Par application répétée de théorème III, on obtient, pour toute $f\in C_k^0(R^n)$, $h*f\in C^{n-1}(R^n)$ et $D^\beta(h*f) = (D^\beta h)*f$ $(0\leqslant|\beta|\leqslant m-1)$.

Si $|\beta|=m-1$, d'après le theoreme III, pour toute $f\in C_k^{0,\lambda}(R^n)$, $h*f\in C^m(R^n)$ et $D_iD^\beta(h*f) = (V_pD_iD^\beta h)*f + C_i(D^\beta h)f$.

Enfin, en conjuguant ce résultat avec le theoreme II, on obtient le théorème suivant, car $C_K^{0,\lambda}(R^n)\subset C_K^{0,\lambda-\eta}(R^n)$ et l'application naturelle de $C_K^{0,\lambda}(R^n)$ dans $C_K^{0,\lambda-\eta}(R^n)$ est continue.

Théorème IV.

Soient $h\in N^{m,\eta,\mu}$, et λ un nombre tel que $0<\lambda\leqslant 1$ et $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$. Alors, l'opérateur de convolution $f\longrightarrow h*f$ associé à applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\eta}(R^n)$ ($p\geqslant 0$ entier, K compact fixé de R^n).

5. Exemples.

1) Le potentiel d'ordre α.

Soit h un noyau du potentiel d'ordre α, où $m-1<\alpha\leqslant m$ ($m\geqslant 1$ entier impair). Alors, pour $f\in C_k^{p,\lambda}(R^n)$ $(m-\alpha<\lambda\leqslant 1)$, $h*f\in C^{p+m,\lambda-(m-\alpha)}(R^n)$. D'ailleurs, l'application de $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-(m-\alpha)}(R^n)$ est continue.

Dans le cas où m est un entier pair positif, l'application est aussi continue sous les condition mentionné ci-dessus. Mais la méthode dans ce travail n'est pas applicable pour prouver la continuité, puisque $D^\beta h$ $(|\beta|=m)$ n'est pas toujours un noyau singulier. La continuité de l'application est etablie dans [2].

2) Une contre-exemple.

Si $\lambda=\eta$, $h\in N^{m,\eta,\mu}$ n'applique pas $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m}(R^n)$. En effet, soient $n=1$, $0<\alpha<1$, $\lambda=\eta=1-\alpha$, $h=r^{\alpha-1}$ et $f\in C_k^{0,\lambda}(R^1)$ telle que

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^{1-\alpha} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & x>2\end{cases}$$

et $f\in C^1(R^1\backslash\{0\})$. Alors, $h*f\notin C^1(R^1)$.

Reference

[1] P. Courrège: Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions Höldériennes et noyaux de convolution régularisants, Séminaire de probabilités I, Springer-Verlag (1966), 34–51.

[2] Y. Ito: Noyaux de convolution en partie finie opérant sur les fonctions Höldériennes, Proc. Jap. Acad., Vol. 45, No. 10 (1969), 907–909.

Université de Nagoya
Département de Physiologie.