J. Chabrowski
Nagoya Math. J.
Vol. 39 (1970), 119–125

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS FAIBLES NON NÉGATIVES DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE

J. CHABROWSKI

Le but de cette communication est de prouver que la solution $u(t, x)$ faible non négative dans $(O, T]\times E_n$ de l'équation

$$(1) \qquad Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{a_{ij}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} = 0$$

possède la limite presque partout dans E_n si t converge vers zéro, ainsi qu'elle représentable sous la forme d'une intégrale de la solution fondamentale faible de (1) par rapport à une mesure non négative. Ces problèmes ont été traités par M. Kato et M. Krzyżański (voir [7] et [8]) pour les solutions au sens classiques. Nos démonstrations sont basées sur les méthodes utilisées dans leurs travaux.

On suppose que les coefficients $a_{ij}(t, x)$ sont définis mesurables et bornés dans la fermeture $\bar{H}$ de la couche $H = (O, T]\times E_n(E_n$ étant l'espace euclidien à dimensions) et que la forme quadratique $A(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j$ y est presque uniformément définie positive, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\lambda \geqslant 1$ tel que $\lambda^{-1}|\xi|^2 \leqslant A(\xi) \leqslant \lambda|\xi|^2$ presque partout dans $\bar{H}$ et pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\in E_n$.

1. Introduisons d'abord des définitions et des notations qui interviendront dans la suite.

Une fonction $f(t, x)\in L^1_{\text{loc}}(H)$ possède les dérivées fortes par rapport à x_j $(j = , \cdots, n)$ lorsqu'il existe des fonctions $f_{x_i}\in L^1_{\text{loc}}(H)$ $(i = 1, \cdots, n)$ telles que l'on a les égalités

$$\int_0^t d\tau \int_{En} f\varphi_{x_i} dx = -\int_0^t d\tau \int_{En} f_{x_i}\varphi dx \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

pour tout $t\in(O, T]$ et pour toute fonction $\varphi\in C^1(\bar{H})$ au support compact dans E_n.

Received april 21, 1969.

Soit Ω une boule ouverte contenue dans E_n. Désignons par $H^{1,2}(\Omega)$ la fermeture de l'espace $C^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H^{1,2}} = \left\{\int_\Omega (\varphi^2 + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2)dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

On sait (voir [6]) que $H^{1,2}(\Omega)$ est égale à l'espace des fonctions φ possédant des dérivées fortes dans Ω et telles que

$$\int_\Omega (\varphi^2 + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2)dx < \infty.$$

On désigne par $H_0^{1,2}(\Omega)$ la fermeture de l'espace des fonctions de classe C^∞ aux supports compacts muni de la norme (2).

Une fonction $f(t,x)$ appartient à l'espace $L^2[\eta,T; H^{1,2}(\Omega)]$ (voir [2] et [3]) si elle satisfait aux conditions suivantes:

(i) f est définie et mesurable dans $[\eta,T]\times\Omega$,

(ii) $f\in H^{1,2}(\Omega)$ pour presque tout $t\in[\eta,T]$,

(iii) $\|f\|_{H^{1,2}}\in L^2[\eta,T]$.

Analogiquement nous définissons l'espace $L^2[\eta,T; H_0^{1,2}(\Omega)]$. Il suffit de remplacer dans ce but la condition (ii) par (ii') $f\in H_0^{1,2}(\Omega)$ pour presque tout $t\in[\eta,T]$.

Une fonction $f(t,x)$ appartient à l'espace $L^\infty[\eta,T; L^2(\Omega)]$ si elle satisfait aux conditions:

(i) f est définie et mesurable pour $(t,x)\in[\eta,T]\times\Omega$,

(ii) $f\in L^2(\Omega)$ pour presque tout $t\in[\eta,T]$,

(iii) $\sup_{[\eta,T]}\int_\Omega f(t,x)^2dx < \infty$.

Une fonction $u(t,x)$ est dite la solution faible dans H de l'équation (1) lorsqu'elle appartient à $L^\infty[\eta,T; L^2(\Omega)]\cap L^2[\eta,T; H^{1,2}(\Omega)]$ pour toute boule $\Omega\subset E_n$ et pour tout $\eta\in(O,T)$ et de plus elle satisfait à l'équation

$$\int_{E_n} u(t,x)\,\varphi(t,x)\,dx + \int_\eta^t d\tau \int_{E_n} (-u\varphi_\tau + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j})dx = \int_{E_n} u(\eta,x)\varphi(\eta,x)dx \tag{3}$$

pour tout $\eta\in(O,T)$ $(\eta<t)$ et pour toute fonction $\varphi\in C^1(\bar{H})$ au support compact dans E_n.

La fonction $u(t,x)$ satisfaisant aux conditions mentionnées ci-dessus est dite souvent la solution locale de [1].

J. Moser (voir [9] et aussi [2] p. 301-303) a démontré que la solution faible de (1) satisfait essentiellement à la condition de Hölder sur tout ensemble compact contenu dans H, nous pouvons donc supposer qu'elle est continue dans H.

2. Les définitions du point 1 étant adoptées, nous pouvons énoncer nos théorèmes.

THÉORÈME 1. *Soit $u(t,x)$ la solution faible et non négative dans H de l'équation* (1). *On a l'égalité suivante*

$$u(t,x) = \int_{E_n} G(t,x\,;\eta,y)u(\eta,y)dy$$

pour tout $\eta\in(O,T)$ et $(t,x)\in(\eta,T]\times E_n$, $G(t,x\,;\eta,y)$ étant la solution fondamentale faible de (1).

Démonstration. Posons

$\sum_m^\eta = (|x|<m)\times(\eta,T]$, $\Gamma_m^\eta = \{(|x|<m)\times(t=\eta)\}\cup\{(|x|=m)\times[\eta,T]\}$. Définissons pour tout entier $m\geqslant 3$ une fonction $\gamma_m\in C^1(E_n)$ telle que $\gamma_m(x)=1$ pour $|x|\leqslant m-2$, $\gamma_m(x)=0$ pour $|x|\geqslant m-1$, $0\leqslant\gamma_m(x)\leqslant 1$ pour $m-2<|x|<m-1$ et $|\nabla\gamma_m(x)|\leqslant K$ pour $x\in E_n$, K étant une constante positive indépendant de m.

Considérons le problème généralisé aux limites

$$(4m)\qquad Lv=0 \text{ pour } (t,x)\in\textstyle\sum_m^\eta,$$

$v(\eta,x)=\gamma_m(x)u(\eta,x)$ pour $|x|\leqslant m$, $v(t,x)=0$ pour $(t,x)\in([\eta,T]\times(|x|=m))$.

En vertu du théorème d'Aronson (voir [1]) ce problème admet la solution unique $v_m\in C^0(\overline{\sum_m^\eta})\cap L^2[\eta,T\,;H_0^{1,2}(|x|<m)]$ et satisfaisant à l'équation

$$(5m)\qquad \int_{|x|<m} v_m(t,x)\varphi(t,x)\,dx + \int_\eta^t d\tau \int_{|x|<m}(-v_m\varphi_\tau + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{m\,x_i}\varphi_{x_j})dx =$$
$$\int_{|x|<m}\gamma_m(x)u(\eta,x)\varphi(\eta,x)dx$$

pour toute fonction $\varphi\in C^0(\sum_m^\eta)$ au support compact dans E_n. La solution v_m est représentable (voir [1]) sous la forme

$$v_m(t,x) = \int_{|y|<m} G_m(t,x;\eta,y)\gamma_m(y)u(\eta,y)dy,$$

où G_m est la fonction faible de Green pour le cylindre $[O,T]\times(|x|\leqslant m)$. Il résulte du théorème III de [2] que v_m converge presque uniformément dans $\bar{H}_\eta$ vers $u(t,x)$, où $H_\eta=(\eta,T]\times E_n$. D'une part la suite G_m est non décroissante et de plus on a en vertu du principe généralisé d'extremum (voir [2])

$$v_m(t,x)\leqslant u(t,x) \quad \text{pour} \quad m\geqslant 3.$$

D'autre part, la suite G_m converge vers la solution fondamentale faible de (1) (voir [3]), on en tire donc par le passage à la limite l'égalité

$$u(t,x)=\int_{E_n} G(t,x;\eta,y)u(\eta,y)dy$$

pour $(t,x)\in(\eta,T]\times E_n$.

Nous passons à un procédé permettant d'établir une représentation de la solution faible et non négative sous la forme d'une intégrale de la solution fondamentale faible par rapport à une mesure non négative. Dans ce but nous adoptons la définition suivante de la convergence d'une suite de mesures (voir [5], p. 61);

on dit qu'une suite de mesures $\mu_m(E)$ $(m=1,2,\cdots)$, définies sur les ensembles boréliens de E_n, converge vers la mesure $\mu(E)$, si, $f(x)$ étant une fonction continue au support compact, on a

$$\lim_{m\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mu_m(dx)=\int_{E_n} f(x)\mu(dx).$$

Dans la suite il nous conviendra de nous réferer à une limitation de la solution fondamentale G établie par D.G. Aronson (voir [4]). Il existe des nombres positifs c_1, c_2, C_1 et C_2 tels que

$$C_1(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-c_1\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right\}\leqslant G(t,x;\tau,y)\leqslant C_2(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\times \exp\left\{-c_2\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right\}. \tag{6}$$

En s'appuyant sur l'inégalité (6), il est facile de vérifier (voir [8] lemme 3) qu'il existe pour tout $\alpha>0$ un nombre $\delta=\delta(\alpha)$ tel que l'on ait

$$G(t,x;\tau,y)\exp(\alpha|y|^2) \leqslant C_2(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{c_2\alpha}{\vartheta(t-\tau)^2}|x|^2\right\}\times \tag{7}$$

$$\exp\left\{-(t-\tau)^{-1}\left[\vartheta(t-\tau)|y|-\frac{c_2|x|}{\vartheta(t-\tau)}\right]^2\right\}$$

pour $t-\tau\leqslant\delta$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, où $\vartheta(t)=(c_2-\alpha t)^{\frac{1}{2}}$. Le nombre $\delta=\delta(\alpha)>0$ est choisi de façon que l'on ait

$$\vartheta(\delta)=(c_2-\alpha\delta)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{c_2}{2}}$$

c'est-à-dire $\delta=\dfrac{c_2}{2\alpha}$.

THÉORÈME 2. *Soit $u(t,x)$ la solution faible et non négative dans H de l'équation* (1). *On a dans une couche $(O,\delta_1]\times E_n$ convenablement choisie l'égalité*

$$u(t,x)=\int_{E_n}G(t,x;0,y)\rho(dy), \tag{8}$$

$\rho(E)$ étant une mesure non négative.

Démonstration. Il résulte du théorème 1 que

$$u(t,x)=\int_{E_n}G(t,x;\eta,y)u(\eta,y)dy$$

pour $(t,x)\in H_\eta$. On a en vertu de l'inégalité (6)

$$C_1\int_{E_n}(T-\eta)^{-\frac{n}{2}}\exp(-c_1|y|^2)u(\eta,y)dy\leqslant\int_{E_n}G(T,O;\eta,y)u(\eta,y)dy=u(T,O).$$

Supposons que $0<\eta<T_1$, où $T_1<T$. Il est évident qu'il existe des constantes positives C_3 et α telles que

$$\int_{E_n}\exp(-\alpha|y|^2)u(\eta,y)dy\leqslant C_3u(T,O). \tag{9}$$

Il est clair que nous pouvons supposer la convergence uniforme des intégrales (9) pour tout $\eta\in(O,T_1]$. Nous faisons correspondre pour tout $\eta\in(O,T_1]$, à chaque ensemble E borélien de E_n les mesures

$$\gamma_\eta(E)=\int_E u(\eta,y)\exp(-\alpha|y|^2)dy. \tag{10}$$

Les mesures $\gamma_\eta(E)$ sont, d'après (9), bornées uniformément par rapport à

$\eta \in (O, T_1]$. Il existe donc, d'après le théorème du choix, une suite $\gamma_{\eta m}$ telle que $\lim_{m\to\infty} \eta_m = 0$ et la suite $\gamma_{\eta m}(E)$ soit convergeante vers une mesure $\gamma(E)$ non négative. Soit (t, x) un point arbitraire de la couche $(O, \delta_1] \times E_n, \delta_1 = \min(T_1, \delta(\alpha))$ ($\delta(\alpha)$ étant une constante intervenant dans l'inégalité (7)). Nous pouvons supposer que $\eta_m < t$. Introduisons les fonctions

$$W\eta_m(y) = G(t, x; \eta_m, y) \exp(\alpha |y|^2) \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{11}$$

En vertu de l'inégalité (7) les fonctions $W\eta_m(y)$ sont uniformément bornées dans E_n et de plus elles sont continues. D'après le théorème 1 et de la définition des mesures $\gamma_{\eta m}$, on a

$$\int_{E_n} W_{\eta m}(y) \gamma_{\eta m}(dy) = \int_{E_n} G(t, x; \eta_m, y) u(\eta_m, y) dy = u(t, x).$$

D'autre part, en vertu de la convergence uniforme des intégrales (9), pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut choisir un nombre $R_\varepsilon > 0$ de façon que l'on ait

$$\int_{|y| > R_\varepsilon} \gamma_{\eta m}(dy) \leqslant \varepsilon.$$

Il résulte du théorème 3 de [8] (sec. 8) que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_n} W_{\eta m}(y) \gamma_{\eta m}(dy) = \int_{E_n} G(t, x; O, y) \exp(\alpha |y|^2) \gamma(dy) \tag{12}$$

Or, en prenant $[\exp(\alpha |y|^2)\gamma] = \rho$, nous obtenons l'égalité (8).

THÉORÈME 3. *La solution faible et non négative dans H de l'équation* (1) *possède la limite presque partout dans E_n lorsque t converge vers zéro.*

Puisque la solution fondamentale satisfait à l'inégalité (6) et à la condition

$$\lim_{t\to 0+} \int_{E_n} G(t, x; O, y) dy = 1 \quad \text{pour tout } x \in E_n,$$

donc la démonstration de ce théorème est tout-à-fait analogue à celle du théorème 1 de [7].

En appliquant l'inégalité (6) on peut démontrer le théorème suivant (voir [7] théorème 1 et 2)

THÉORÈME 4. *Soit $u(t, x)$ la solution faible et non négative dans H de l'équation* (1). *Si $\limsup_{t\to 0+} u(t, x) < \infty$ pour tout $x \in E_n$ alors il existe la fonction φ localement intégrable et non négative dans E_n telle que*

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x) \ \textit{presque partout dans } E_n,$$

$$\int_{E_n} \varphi(y)\, exp\,(-\alpha|y|^2 dy < \infty \quad et$$

$$u(t,x) = \int_{E_n} G(t,x;O,x)\varphi(y)dy \quad pour \quad (t,x)\in(O,\delta_1]\times E_n,$$

α et δ_1 étant des constantes positives convenablement choisies.

Travaux cités

[1] D.G. Aronson, On the Green's fonction for second order parabolic differential equations with discontinuous coefficients, Bull. Am. Math. Soc., **69** (1963), p. 841–847.

[2] D.G. Aronson, Uniqueness of positive weak solutions of second order parabolic equations, Ann. Polon. Math., **XVI** (1965), p. 285–303.

[3] D.G. Aronson, Isolated singularities of solutions of second order parabolic equations, Arch. Rational Mech. Anal., **19** (1965), p. 231–238.

[4] D.G. Aronson, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. Am. Math. Soc., **73** (1967), p. 890–896.

[5] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, XIII, livre VI, Intégration Paris, 1952.

[6] K.O. Fiedrichs, The identity of weak and strong extensions of differential operators, Tran. Am. Math. Soc., **55** (1944), p. 132–151.

[7] M. Kato, On positive solutions of the heat equation, Nagoya Math. Journ., **30** (1967), p. 203–207.

[8] M. Krzyżański, Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique, Revue Roumaine Math. Pures Appl., **IX** (1964), p. 393–408.

[9] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), p. 101–134.

Université Silésienne,
Katowice.