

SUR LE SCHÉMA DE LA SÉPARATION*

AYDA I. ARRUDA ET NEWTON C.A. DA COSTA

Dedicated to Professor Katuzi Ono on his 60th birthday

Introduction

En continuant l'étude d'un problème soulevé dans [3] et plus tard abordé par un de nous dans [1] et [2], nous avons publié deux "abstracts" (voir [6] et [7]) sur certains calculs propositionnels appelés J_n , $1 \leq n \leq 5$, et leurs relations avec le postulat de la séparation. On développe maintenant les systèmes J_n , $1 \leq n \leq 5$, et on esquisse la construction des calculs correspondants de prédicats de premier ordre. Enfin, on démontre la non trivialité des théories correspondantes des ensembles quand on utilise des postulats comme ceux de Zermelo-Fraenkel, mais avec le schéma de la séparation formulé sans les restrictions ad hoc pour éviter les paradoxes.

Notre première tentative de construire des théories des ensembles avec le postulat de la séparation sans les restrictions mentionnées ([3]), fut fait au moyen de la suppression du théorème de la déduction. Mais, jusqu' à présent, on n'a pas rencontré une démonstration de non trivialité de ces théories. Toutefois ce fait a conduit à ce travail, au moyen de la suppression de la règle de modus ponens, mais avec la conservation du théorème de la déduction (voir [6] et [7]).

Ainsi, dans l'axiomatisation des systèmes J_n , $1 \leq n \leq 5$, on procède comme dans [2], au moyen d'une formalisation du concept de déduction.

Dans [2], on a employé la définition suivante de \rightarrow -formule:

DÉFINITION. Soit Γ une suite finie de formules et A une formule quelconque (comme dans Kleene [11], avec des adaptations évidentes); alors, $\Gamma \rightarrow A$ est une \rightarrow -formule. Dans le cas où Γ est vide, $\emptyset \rightarrow A$ est abrégée par $\rightarrow A$.

Received February 27, 1969

*) Travail réalisé avec l'aide partielle de la "Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)", São Paulo, Brésil.

La terminologie, les notations, etc. sont transposées des travaux cités dans la bibliographie, avec des modifications claires.

Le symbole \leftrightarrow écrit entre deux formules A et B abrégé:

$$A \rightarrow B \text{ et } B \rightarrow A.$$

Le symbole metamathématique de déduction dans nos systèmes sera \vdash . La suite finie de formules A_1, A_2, \dots, A_n sera quelquefois dénotée par

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n.$$

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$, $m \geq 1$, $m \rightarrow$ -formules et Σ une \rightarrow -formule telle que:

$$(I) \quad \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m \vdash \Sigma;$$

on écrira quelquefois (I) de la manière suivante:

$$(II) \quad \frac{\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_m}{\Sigma}.$$

(Il va sans dire que la virgule dans (I) ne peut pas être substituée par \wedge ; dans le cas (II), on n'utilisera jamais des virgules entre les \rightarrow -formules.)

On dit qu'une règle α n'est pas valable dans un calcul \mathcal{E} si α n'est pas dérivable dans \mathcal{E} . Une telle règle est admissible si l'on peut l'ajouter à \mathcal{E} sans modifier l'ensemble de ses thèses.

Un calcul \mathcal{E}_1 est plus fort que un calcul \mathcal{E}_2 , s'il y a une thèse de \mathcal{E}_1 qui n'est pas démontrable dans \mathcal{E}_2 .

1. Les calculs propositionnels J_n .

Avec la définition précédente de \rightarrow -formule, les postulats des calculs J_n , $1 \leq n \leq 4$, sont ceux qui suivent:

Postulats de J_1 :

$$\begin{array}{ll} \rightarrow_1) \quad A \rightarrow A & \rightarrow_2) \quad \frac{\Gamma \rightarrow A}{C, \Gamma \rightarrow A} \quad \rightarrow_3) \quad \frac{C, C, \Gamma \rightarrow A}{C, \Gamma \rightarrow A} \\ \rightarrow_4) \quad \frac{A, C, D, \Gamma \rightarrow A}{A, D, C, \Gamma \rightarrow A} & \rightarrow_5) \quad \frac{A \rightarrow C \quad C, \Gamma \rightarrow A}{A, \Gamma \rightarrow A} \\ \supset_1) \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} & \supset_2) \quad (A \supset B) \ \& \ (A \supset (B \supset C)) \rightarrow A \supset C \\ \&_1) \quad A, B \rightarrow A \ \& \ B & \&_2) \quad A \ \& \ B \rightarrow A \quad \&_3) \quad A \ \& \ B \rightarrow B \\ \&_4) \quad (A \supset B) \ \& \ (A \supset C) \rightarrow A \supset B \ \& \ C & \vee_1) \quad A \rightarrow A \vee B \\ \vee_2) \quad B \rightarrow A \vee B & \vee_3) \quad (A \supset C) \ \& \ (B \supset C) \rightarrow A \vee B \supset C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \vee_4) \frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \rightarrow C} & \neg_1) A \rightarrow \neg \neg A \\ \neg_2) \neg \neg A \rightarrow A & \neg_3) \rightarrow \neg(A \& \neg A) \quad \neg_4) \rightarrow A \vee \neg A \end{array}$$

Les postulats de J_2 sont ceux de J_1 et encore:

$$\neg_5) \rightarrow(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A) \quad \neg_6) \neg A, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$$

J_3 est obtenu en rajoutant à J_2 les postulats:

$$\begin{array}{ll} \neg_7) A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B) & \neg_8) A, \neg B \rightarrow \neg(A \& B) \\ \neg_9) \neg A, B \rightarrow \neg(A \& B) & \neg_{10}) \neg A, \neg B \rightarrow \neg(A \& \neg B) \end{array}$$

Les postulats de J_4 sont ceux de J_2 et encore:

$$\neg_{11}) \frac{A \rightarrow B \quad \rightarrow \neg B}{\rightarrow \neg A} .$$

THEOREME 1. Dans J_1 les conditions "pour toute suite finie Γ on a $\Gamma \rightarrow F \vdash \Gamma \rightarrow G$ " et " $\Gamma \vdash F \rightarrow G$ " sont équivalentes.

THEOREME 2. Dans J_1 on peut démontrer, entre autres, les schémas et les règles ci-dessous:

$$\begin{array}{lll} \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \& B} & \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A \supset (B \supset C)}{\Gamma \rightarrow A \supset C} & \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B \supset A} \\ \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A \supset C}{\Gamma \rightarrow A \supset B \& C} & \frac{\Gamma \rightarrow A \supset C \quad \Gamma \rightarrow B \supset C}{\Gamma \rightarrow A \vee B \supset C} & \frac{\Gamma \rightarrow A \supset (B \supset C)}{\Gamma \rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)} \\ \rightarrow A \supset A & \rightarrow A \supset (B \supset A) & A \supset B \rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C) \\ A \supset (B \supset C) \rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C) & & (A \supset B) \& (B \supset C) \rightarrow A \supset C \\ A \supset B \rightarrow (B \supset C) \supset (A \supset C) & & (B \supset C) \rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C) \\ A \leftrightarrow A \quad \rightarrow A \sim A \quad A \sim B \leftrightarrow B \sim A \quad A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C & & \\ \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B}{\Gamma \rightarrow (B \supset C) \supset (A \supset C)} & & \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow B \supset C}{\Gamma \rightarrow A \supset C} \\ \frac{\rightarrow A \sim B}{\rightarrow B \sim A} & & \frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \\ A \supset A \rightarrow B \supset B & A \sim A \leftrightarrow B \sim B & A, B \rightarrow A \supset B \\ \rightarrow A \supset (B \supset (A \supset B)) & \rightarrow A \supset (B \supset A \& B) & A \supset (B \supset C) \rightarrow B \supset (A \supset C) \\ \rightarrow A \supset ((A \supset B) \supset B) & \rightarrow A \& (A \supset B) \supset B & A \& B \rightarrow A \supset B \\ \rightarrow A \& B \supset A & \rightarrow A \& B \supset B & A \& B \rightarrow A \sim B \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
A \rightarrow B \supset A \& B & \rightarrow (A \supset B) \& (A \supset C) \supset (A \supset B \& C) & A \& A \leftrightarrow A \\
A \supset (B \supset C) \leftrightarrow A \& B \supset C & A \vee A \leftrightarrow A & & A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C \\
A \sim B \rightarrow A \& C \sim B \& C & A \sim B \rightarrow C \& A \sim C \& B & A \sim B \rightarrow A \vee C \sim B \vee C \\
A \sim B \rightarrow C \vee A \sim C \vee B & A \sim B \rightarrow A \supset C \sim B \supset C & A \sim B \rightarrow C \supset A \sim C \supset B \\
A \& (B \vee A) \leftrightarrow A & A \vee (B \& A) \leftrightarrow A & & A \supset (A \supset B) \rightarrow A \supset B \\
A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C) & & & A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C) \\
A \& B \leftrightarrow B \& A & A \vee B \leftrightarrow B \vee A & & A \& (B \& C) \leftrightarrow (A \& B) \& C.
\end{array}$$

COROLLAIRE 1. *Les schémas de la forme $F \rightarrow G$ ou $F \leftrightarrow G$ du théorème précédent entraînent la validité des schémas correspondants $\rightarrow F \supset G$ et $\rightarrow F \sim G$.*

COROLLAIRE 2. *Si A et B sont des formules, C_A est une formule construite à partir de A en utilisant seulement \supset , $\&$, \vee , et C_B est une formule obtenue à partir de C_A par la substitution de quelques occurrences de A par B , alors on a :*

$$\vdash A \sim B \rightarrow C_A \sim C_B.$$

THÉORÈME 3. *Dans J_1 ne sont pas valables, entre autres, les schémas suivants :*

$$\begin{array}{lll}
A \& \neg A \rightarrow B & A \& \neg A \rightarrow \neg B & A, \neg A \rightarrow B \\
A, \neg A \rightarrow \neg B & \rightarrow A \& \neg A \supset B & \rightarrow A \& \neg A \supset \neg B \\
A \rightarrow \neg A \supset B & A \rightarrow \neg A \supset \neg B & \rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A \\
(A \supset B) \supset A \rightarrow A & \neg A \rightarrow A \supset B & \neg A \rightarrow A \supset \neg B \\
\rightarrow \neg A \supset (A \supset B) & \rightarrow \neg A \supset (A \supset \neg B) & \rightarrow A \supset (\neg A \supset B) \\
\rightarrow A \supset (\neg A \supset \neg B) & A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A & \rightarrow (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A) \\
A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A & \rightarrow (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A).
\end{array}$$

Démonstration. Par la matrice $M_1 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où N est l'ensemble des nombres naturels positifs et I est l'ensemble des nombres impairs. Les symboles v , v_d et v_{nd} sont respectivement les abréviations de *valeur*, *valeur désignée* et *valeur non désignée*. La suite vide sera denotée par \emptyset et $v(\emptyset) = 1$. Les fonctions $\supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow$ de M_1 sont définies comme il suit :

$$\begin{array}{l}
\supset : v(A \supset B) = v(B) \text{ si } \text{ a) } v(A) = d \text{ et } v(B) = nd \text{ ou} \\
\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{ b) } v(A) = nd \text{ et plus petite que } v(B) = nd; \\
\text{ " } = 1 \text{ dans tous les autres cas.}
\end{array}$$

$\&$: $v(A \& B) = v_{nd}(v(A), v(B))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

" = $\text{Max.}(v(A), v(B))$ dans tous les autres cas.

\vee : $v(A \vee B) = v_d(v(A), v(B))$ quand seulement une des valeurs est désignée;

" = $\text{Min.}(v(A), v(B))$ dans tous les autres cas.

\neg : $v(\neg A) = v(A) + 1$ si $v(A) = d$;

" = $v(A) - 1$ si $v(A) = nd$.

\wedge : $v(A, \Gamma) = v_{nd}(v(A), v(\Gamma))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

" = $\text{Max.}(v(A), v(\Gamma))$ dans tous les autres cas.

\rightarrow : $v(\Gamma \rightarrow A) = v(A)$ si a) $v(\Gamma) = d$ et $v(A) = nd$ ou

b) $v(\Gamma) = nd$ et plus petite que $v(A) = nd$;

" = 1 dans tous les autres cas.

THÉORÈME 4. *On démontre dans \mathbf{J}_2 , entre autres, les schémas suivants, au-delà de ceux du théorème 2:*

$A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$	$A \sim B \rightarrow \neg A \sim \neg B$	$A \rightarrow \neg A \supset B$
$\rightarrow A \& \neg A \supset B$	$\rightarrow A \& \neg A \supset \neg B$	$\neg A \rightarrow A \supset B$
$\neg(A \& \neg B) \rightarrow A \supset B$	$\rightarrow A \& \neg B \rightarrow \neg(A \& B)$	$\rightarrow \neg A \& B \supset \neg(A \& B)$
$\rightarrow \neg A \& \neg B \supset \neg(A \& B)$	$\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$	$\rightarrow A \vee B \supset \neg(\neg A \& \neg B)$
$\rightarrow (A \supset B) \supset \neg(A \& \neg B)$	$\rightarrow \neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$	$\rightarrow \neg A \supset \neg(A \& \neg B)$
$\rightarrow (A \supset B) \supset \neg A \vee B$	$\rightarrow A \& B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$	$\rightarrow \neg(A \& B) \sim \neg A \vee \neg B$
$\neg A \rightarrow (A \supset B) \sim \neg A$	$A \rightarrow (A \supset B) \sim B$	$B \rightarrow (A \supset B) \sim B$
$\neg B \rightarrow \neg A \supset (A \supset B)$	$B \rightarrow A \& B \sim A$	$B \rightarrow A \vee B \sim B$
$\neg B \rightarrow A \& B \sim B$	$\neg B \rightarrow A \vee B \sim A$	$A \& (B \vee \neg B) \leftrightarrow A$
$A \rightarrow A \vee (B \& \neg B)$	$A \& B \& \neg B \rightarrow B \& \neg B$	$\neg A \& \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
$\rightarrow A \vee (B \& \neg B) \sim A$	$\rightarrow B \& \neg B \supset A \& B \& \neg B$	$\rightarrow A \& B \& \neg B \sim B \& \neg B$
$A \vee B \vee \neg B \leftrightarrow B \vee \neg B$	$\rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A$	$A \sim B \rightarrow C_A \sim C_B$.

(Dans le dernier schéma, A, B, C_A, C_B sont des formules comme dans le théorème 2, corollaire 2, mais ici C_A peut être construite avec $\supset, \&, \vee$ et \neg .)

THÉORÈME 5. *Dans J_2 ne sont pas valables, entre autres, les schémas suivants:*

$$\begin{array}{lll}
 A, \neg A \rightarrow B & A, \neg A \rightarrow \neg B & A \& \neg A \rightarrow B \\
 A \& \neg A \rightarrow \neg B & A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A & (A \supset B) \& (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A \\
 A \supset B \rightarrow \neg A \vee B & A \supset B \rightarrow \neg(A \& \neg B) & \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B \\
 \neg A \rightarrow \neg(A \& \neg B) & \rightarrow \neg(A \& B \& \neg B) & \neg A, B \rightarrow \neg(A \& B) \\
 A, \neg B \rightarrow \neg(A \& B) & \neg B, \neg A \rightarrow \neg(A \& B) & A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B) \\
 A \& (A \supset B) \rightarrow B. & &
 \end{array}$$

Démonstration. Par la matrice $M_2 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où les fonctions $\&, \vee, \wedge$ et \rightarrow sont définies comme dans la matrice M_1 , du théorème 3, et les autres comme suit:

\supset : $v(A \supset B) = 1$ dans tous les cas.

\neg : $v(\neg A) = 1$ si, et seulement si, $v(A) = 1$;

'' = $v(A) + 1$ si $v(A) = nd$;

'' = $v(A) - 1$ si $v(A) = d$ et différente de 1.

THÉORÈME 6. *Si F est une thèse du calcul propositionnel classique, alors $\rightarrow F$ est une thèse du calcul J_3 .*

Démonstration. Analogue à celle du théorème 10 de Kleene [11], p. 132, à cause des lemmes:

LEMME I. *Dans les conditions du lemme 13 de Kleene [11], p. 132, on démontre dans J_3 que $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \rightarrow E$ ou que $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \rightarrow \neg E$.*

LEMME II. *Dans les conditions du lemme 14 de Kleene [11], p. 133, on démontre dans J_3 que $P_1 \vee \neg P_1, \dots, P_m \vee \neg P_m \rightarrow E$.*

THÉORÈME 7. *Dans J_3 ne sont pas valables, entre autres, les schémas:*

$$\begin{array}{lll}
 A \supset B \rightarrow \neg(A \& \neg B) & A \supset B \rightarrow \neg A \vee B & A \& (A \supset B) \rightarrow B \\
 A \rightarrow \neg A \supset B & A, \neg A \rightarrow B & A, \neg A \rightarrow \neg B \\
 A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A & \neg A \rightarrow A \supset B. &
 \end{array}$$

Démonstration. Par la matrice $M_3 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où les fonctions $\supset, \vee, \neg, \wedge$ et \rightarrow sont définies comme dans la matrice M_2 et $\&$ comme il suit:

$\&$: $v(A \& B) = v_{na}(v(A), v(B))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

" = $\text{Max.}(v(A), v(B))$ si les deux valeurs sont non désignées;

" = $\text{Min.}(v(A), v(B))$ si les deux valeurs sont désignées.

THÉORÈME 8. Dans \mathbf{J}_4 on démontre, entre autres, les schémas et les règles ci-dessous:

$$\begin{array}{llll} A \rightarrow B, \rightarrow C \supset A \mid \rightarrow \rightarrow C \supset B & A \rightarrow B, \rightarrow A \& C \mid \rightarrow \rightarrow B \& C & B \rightarrow A, \rightarrow \neg A \mid \rightarrow \rightarrow \neg B \\ B \rightarrow A, \rightarrow A \supset C \mid \rightarrow \rightarrow B \supset C & A \rightarrow B, \rightarrow C \& A \mid \rightarrow \rightarrow C \& B & \rightarrow (A \& \neg B) \supset \neg (A \supset B) \\ A \rightarrow B, \rightarrow A \vee C \mid \rightarrow \rightarrow B \vee C & A \rightarrow B, \rightarrow C \vee A \mid \rightarrow \rightarrow C \vee B & \rightarrow \neg (A \& B \& \neg B). \end{array}$$

THÉORÈME 9. Dans \mathbf{J}_4 , si A, B, C_A et C_B sont des formules comme dans le théorème 4, on a:

$$A \leftrightarrow B, \rightarrow C_A \mid \rightarrow \rightarrow C_B.$$

Démonstration. Conséquence des règles du théorème 8.

THÉORÈME 10. Dans \mathbf{J}_4 ne sont pas valables les schémas et les règles suivantes:

$$\begin{array}{lll} A, \neg A \rightarrow B & A, \neg A \rightarrow \neg B & A \rightarrow B \mid \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \\ A \leftrightarrow B \mid \rightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B & A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A & A \supset B \rightarrow \neg A \vee B \\ A \supset B \rightarrow \neg (A \& \neg B) & \neg (A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B & \neg A \rightarrow \neg (A \& \neg B) \\ \neg A \& B \rightarrow \neg (A \& B) & A, \neg B \rightarrow \neg (A \& B) & A, \neg B \rightarrow \neg (A \supset B) \\ \rightarrow \neg (A \vee \neg A \supset B \& \neg B) & \neg (A \supset B) \rightarrow \neg (\neg A \vee B). \end{array}$$

Démonstration. Par la matrice $M_4 = \langle N, I, \&, \supset, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, avec les mêmes conventions que pour la matrice M_2 et où les fonctions $\supset, \&, \vee, \wedge$ et \rightarrow sont définies comme dans la matrice M_2 et \neg comme dans la matrice M_1 .

COROLLAIRE 1. Les règles ci-dessous ne sont pas admissibles dans \mathbf{J}_4 :

$$\Gamma \wedge A \rightarrow B, \Gamma \rightarrow \neg B \mid \rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A \quad A \leftrightarrow B \mid \rightarrow C_A \leftrightarrow C_B.$$

THÉORÈME 11. Le calcul \mathbf{J}_2 est strictement plus fort que \mathbf{J}_1 , et \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 sont strictement plus forts que \mathbf{J}_2 .

THÉORÈME 12. Le système \mathbf{J}_1 n'est pas \supset -finiment trivialisable, mais les calculs \mathbf{J}_n , $2 \leq n \leq 4$, sont \supset -finiment trivialisables.

Démonstration. Dans \mathbf{J}_1 les schémas du type $\rightarrow F \supset A$, où A est une formule quelconque et F une formule fixée, ne sont pas valables, ce qu'on peut voir en utilisant la matrice M_1 . Dans les calculs \mathbf{J}_n , $2 \leq n \leq 4$, on a $\vdash \rightarrow A \& \neg A \supset B$.

THÉORÈME 13. *Les systèmes \mathbf{J}_n , $1 \leq n \leq 4$, ne sont pas \rightarrow -finiment trivialisables.*

Démonstration. Dans les systèmes \mathbf{J}_n , $1 \leq n \leq 4$, on démontre, par les matrices correspondantes M_n , que les schémas du type $F \rightarrow A$, où F est une formule fixée et A une formule quelconque, ne sont pas valables.

THÉORÈME 14. *Dans les calculs \mathbf{J}_n , $1 \leq n \leq 3$, on a (théorème de la \rightarrow -déduction):*

$$\text{Si } \vec{\Gamma}, \rightarrow A \vdash \theta \rightarrow B \text{ alors } \vec{\Gamma} \vdash A, \theta \rightarrow B,$$

où $\vec{\Gamma}$ est une suite finie de \rightarrow -formules.

Démonstration. On fait par induction sur la longueur de la déduction subsidiaire.

Base de l'induction: $\theta \rightarrow B$ est un postulat ou une des \rightarrow -formules de $\vec{\Gamma}$, $\rightarrow A$. Dans le premier cas, on obtient $A, \theta \rightarrow B$ par \rightarrow_2 ; alors, le théorème résulte des propriétés générales de la notion de déduction. Dans le second cas, on obtient le théorème par \rightarrow_1 et \rightarrow_2 .

Hypothèse de l'induction: Si le théorème est valable pour toute déduction subsidiaire de longueur n , $1 \leq n \leq k$, il est valable aussi pour une déduction quelconque de longueur $k+1$. Nous avons huit cas à considérer selon $\theta \rightarrow B$ est un axiome, une des \rightarrow -formules de $\vec{\Gamma}$, $\rightarrow A$ ou une conséquence de \rightarrow -formules précédentes au moyen d'une des règles de déduction postulées dans les systèmes considérés. Dans les deux premiers cas on procède comme dans la base de l'induction; pour les autres, comme dans l'exemple qui suit. Considérons le postulat \vee_1 : dans ce cas $\theta \rightarrow B$ est de la forme $\Sigma, A_1 \vee B_1 \rightarrow C$, mais par l'hypothèse de l'induction $\vec{\Gamma} \vdash A, \Sigma, A_1 \rightarrow C$ et $\vec{\Gamma} \vdash A, \Sigma, B_1 \rightarrow C$; d'où, par le postulat considéré on obtient: $\vec{\Gamma} \vdash A, \Sigma, A_1 \vee B_1 \rightarrow C$, qui est justement $\vec{\Gamma} \vdash A, \theta \rightarrow B$.

COROLLAIRE 1. *Dans \mathbf{J}_n , $1 \leq n \leq 3$, les règles "Si $\Gamma \rightarrow A$ et $\Gamma \rightarrow A \supset B$, alors $\Gamma \rightarrow B$ " et "Si $\rightarrow A$ et $\rightarrow A \supset B$, alors $\rightarrow B$ " sont équivalentes.*

Démonstration. Il est évident que la première entraîne la seconde. D'autre côté, si la seconde est valable, on a :

- 1) $\rightarrow A \& (A \supset B) \mid \rightarrow \rightarrow A$ par $\&_2$ et \rightarrow_5 ,
- 2) $\rightarrow A \& (A \supset B) \mid \rightarrow \rightarrow A \supset B$ par $\&_3$ et \rightarrow_5 ,
- 3) $\rightarrow A \& (A \supset B) \mid \rightarrow \rightarrow B$ de 1) et 2) par la seconde règle,
- 4) $\mid \rightarrow A \& (A \supset B) \rightarrow B$ de 3) par le théorème 14,
- 5) $\Gamma \rightarrow A \& (A \supset B) \mid \rightarrow \Gamma \rightarrow B$ de 4) par \rightarrow_5 ,
- 6) $\Gamma \rightarrow A; \Gamma \rightarrow A \supset B$ hypothèses,
- 7) $\Gamma \rightarrow A \& (A \supset B)$ de 6) par le théorème 2,
- 8) $\Gamma \rightarrow B$ conséquence de 7) et 5).

THÉORÈME 15. *Dans le calcul J_4 le théorème de la \rightarrow -déduction n'est pas valable.*

Démonstration. Au moyen du postulat \neg_6 on démontre dans J_4 que $A \rightarrow B, \rightarrow \neg B \mid \rightarrow \rightarrow \neg A$; donc, si le théorème de la \rightarrow -déduction était valable, on obtiendrait $A \rightarrow B \mid \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$. Mais, dans J_4 on a $\mid \rightarrow \neg A \vee B \rightarrow A \supset B$; alors, par le résultat antérieur, $\mid \rightarrow \neg(A \supset B) \rightarrow \neg(\neg A \vee B)$, ce qui n'est pas vrai dans J_4 .

THÉORÈME 16. *La règle de modus ponens dans la forme "Si $\rightarrow A$ et $\rightarrow A \supset B$, alors $\rightarrow B$ " n'est pas admissible dans $J_n, 1 \leq n \leq 4$.*

Démonstration. Dans $J_n, 1 \leq n \leq 3$, elle n'est pas admissible parce qu'elle entraîne la validité du schéma $A \& (A \supset B) \rightarrow B$ qui n'est pas valable dans les calculs considérés. Pour J_4 on a la démonstration suivante: dans J_4 on a $\mid \rightarrow \rightarrow (A \& \neg B) \supset \neg(A \supset B)$; si on fait A égal à $A \vee \neg A$ et B égal à $B \& \neg B$, on obtient $\mid \rightarrow \rightarrow ((A \vee \neg A) \& \neg(B \& \neg B) \supset \neg((A \vee \neg A) \supset (B \& \neg B)))$; d'autre côté, nous avons $\mid \rightarrow \rightarrow (A \vee \neg A) \& \neg(B \& \neg B)$; alors, par la règle de modus ponens, $\mid \rightarrow \rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset B \& \neg B)$, schéma qui n'est pas valable dans J_4 .

COROLLAIRE 1. *La règle de modus ponens dans la forme "Si $\Gamma \rightarrow A$ et $\Gamma \rightarrow A \supset B$, alors $\Gamma \rightarrow B$ " n'est pas admissible dans $J_n, 1 \leq n \leq 4$.*

THÉORÈME 17. *Dans $J_n, 1 \leq n \leq 3$, on a la règle: "Si $\vec{\Gamma}, \rightarrow A \mid \rightarrow \theta \rightarrow C$ et $\vec{\Gamma}, \rightarrow B \mid \rightarrow \theta \rightarrow C$, alors $\vec{\Gamma}, \rightarrow A \vee B \mid \rightarrow \theta \rightarrow C$ ".*

$$\begin{array}{lll}
 \exists_1) & A(t) \rightarrow \exists x A(x) & \exists_2) \frac{\Gamma \rightarrow A(b) \supset C}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x) \supset C} & \exists_3) \frac{\Gamma, A(b) \rightarrow C}{\Gamma, \exists x A(x) \rightarrow C} \\
 \forall_1) & \forall x A(x) \rightarrow A(t) & \forall_2) \frac{\Gamma \rightarrow C \supset A(b)}{\Gamma \rightarrow C \supset \forall x A(x)} & \forall_3) \frac{\Gamma \rightarrow A(b)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)}
 \end{array}$$

\rightarrow_8) Si A et B sont des formules congrues, ou si l'une est obtenue de l'autre par la suppression des quantificateurs vides, alors $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ sont des postulats.

Pour le calcul \mathbf{J}_6^* le postulat \rightarrow_8 n'est pas nécessaire parce qu'il est démontrable. Avec des restrictions évidentes, le théorème de la \rightarrow -déduction et les plusieurs formes du théorème du remplacement sont valables pour les calculs \mathbf{J}_n^* ; aussi le théorème des k -transformées (voir [4] et [5]) peut être étendu aux systèmes \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$.

THÉORÈME 22. *Si $\vdash \Gamma \rightarrow F$ dans les calculs \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$, alors les k -transformées de $\Gamma \rightarrow F$ sont démontrables dans les calculs propositionnels correspondants.*

Démonstration. Voir [4] et [5].

COROLLAIRE 1. *Soit $\Gamma \rightarrow A$ un schéma du calcul \mathbf{J}_n , $1 \leq n \leq 5$. Si ce schéma n'est pas valable dans \mathbf{J}_n , il n'est pas valable non plus en \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$.*

THÉORÈME 23. *Dans \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$, sont démontrables, entre autres, les schémas et les règles suivantes (sous des restrictions évidentes):*

$$\begin{array}{lll}
 \forall x A \leftrightarrow A & \exists x A \leftrightarrow A & \forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x) \\
 \frac{\rightarrow A(x) \supset B(x)}{\rightarrow \forall x A(x) \supset \forall x B(x)} & & \frac{\rightarrow A(x) \sim B(x)}{\rightarrow \forall x A(x) \sim \forall x B(x)} \\
 \frac{\rightarrow A(x) \supset B(x)}{\rightarrow \exists x A(x) \supset \exists x B(x)} & & \frac{\rightarrow A(x) \sim B(x)}{\rightarrow \exists x A(x) \sim \exists x B(x)} \\
 \forall x \forall y A(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y) & & \exists x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y) \\
 \forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, x) & & \exists x A(x, x) \rightarrow \exists x \exists y A(x, y) \\
 \forall x A(x) \& \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A(x) \& B(x)) & A \& \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A \& B(x)) \\
 \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B(x)) & & A \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \vee B(x)) \\
 A \& \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \& B(x)) & & A \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A \vee B(x)) \\
 \exists x (A(x) \& B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \& \exists x B(x) & & \exists x (A \supset B(x)) \rightarrow A \supset \exists x B(x) \\
 \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) & & \exists x (A(x) \supset B) \rightarrow \forall x A(x) \supset B \\
 \exists x (A(x) \supset B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \supset \exists x B(x) & &
 \end{array}$$

Si $\vdash \rightarrow A \sim B$, alors $\vdash \rightarrow C_A \sim C_B$.

THÉORÈME 24. Dans \mathbf{J}_n^* , $2 \leq n \leq 5$, on démontre les schémas suivants, que ne sont pas valables dans \mathbf{J}_1 .

$$\begin{array}{ll} \rightarrow \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x) & \rightarrow \forall x (A \vee B(x)) \supset A \vee \forall x B(x) \\ \rightarrow \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x) & \forall x (A(x) \supset B) \leftrightarrow \exists x A(x) \supset B \\ \rightarrow \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x) & \forall x (A \supset B(x)) \leftrightarrow A \supset \forall x B(x) \\ \rightarrow \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x). & \end{array}$$

THÉORÈME 25. Dans \mathbf{J}_5^* on peut démontrer que:

$$\forall x A(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x) \quad \text{et} \quad \exists x A(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x).$$

THÉORÈME 26. Les calculs \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 4$, ne sont pas \rightarrow -finiment trivialisables.

Démonstration. Conséquence du théorème 22 et des théorèmes correspondants des calculs propositionnels.

Si l'on ajout à \mathbf{J}_2^* (\mathbf{J}_3^* , \mathbf{J}_4^* ou \mathbf{J}_5^*) le postulat $A, A \supset B \rightarrow B$, ou à \mathbf{J}_1^* les postulats $A, A \supset B \rightarrow B$ et $\rightarrow (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$, on obtient un calcul que l'on denotera par \mathcal{E} .

THÉORÈME 27. Si $\Gamma \vdash F$ (avec les restrictions usuelles pour les variables libres des formules Γ) dans le calcul de prédicats classique, alors $\vdash \Gamma \rightarrow F$ dans \mathcal{E} , et réciproquement.

THÉORÈME 28. Le calcul \mathcal{E} est strictement plus fort que \mathbf{J}_5^* .

COROLLAIRE 1. Si dans le calcul propositionnel classique on substitue la règle de modus ponens par les trois règles ci-dessous on obtient un calcul strictement plus faible que le calcul propositionnel classique:

$$\frac{A \supset B \quad A \supset (B \supset C)}{A \supset C} \qquad \frac{A \supset (B \supset C)}{(A \supset B) \supset (B \supset C)} \qquad \frac{A}{B \supset A}$$

Remarque. Nous pouvons ajouter aux calculs \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$, la relation d'égalité, avec des postulats convenables.

3. Les systèmes \mathbf{J}_n^* et le postulat de la séparation.

L'étude développée des théories des ensembles ZF_n , construites sur \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$, avec le postulat de la séparation sans les restrictions ad hoc pour

éviter les paradoxes, ne sera pas faite ici. Mais on montrera, au moyen des raisonnements finitistes, qu'on peut construire ces théories et qu'elles ne sont pas triviales.

Les théories des ensembles ZF_n ont respectivement les calculs \mathbf{J}_n^* , $1 \leq n \leq 5$, pour logique sous-jacente et leurs postulats spécifiques sont les suivants:

(I) Si F est un postulat du système ZF de Zermelo-Fraenkel (voir [10], pp. 274-275), exception faite du postulat de la séparation, alors $\rightarrow F$ est un postulat de ZF_n , $1 \leq n \leq 5$.

(II) Postulat de la séparation:

$$\rightarrow \exists y \forall x (x \in y \sim F(x)),$$

où $F(x)$ est une formule quelconque de ZF et la variable y ne figure pas libre dans $F(x)$ (x et y sont des variables différentes).

THÉORÈME 29. *Les systèmes ZF_n , $n = 1, 2$ et 4 , ne sont pas \rightarrow -finiment trivialisables, dans eux n'est pas admissible la règle de modus ponens, ils ne sont pas triviaux, mais ils sont inconsistants dans un sens généralisé. Le système ZF_3 a les trois dernières propriétés.*

Démonstration. Soient les matrices $M'_n = \langle N, I, \&, \supset, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, avec les mêmes conventions que pour les matrices M_n , $n = 1, 2$ et 4 , mais en substituant la définition de la fonction \supset par la suivante:

$$\begin{aligned} \supset: \quad v(A \supset B) &= v(A) + v(B) + 1 \text{ si } v(A) \text{ et } v(B) \text{ sont toutes les deux non désignées ou toutes les deux désignées;} \\ " &= v(A) + v(B) \quad \text{dans tous les autres cas.} \end{aligned}$$

Au moyen du théorème 22 et de M'_n , $n = 1, 2$ et 4 , on démontre les trois premières propriétés; la dernière est démontrée en observant que dans ZF_n , $n = 1, 2$ et 4 , est valable la \rightarrow -formule $\rightarrow x \in x \sim x \in x$, par exemple. Pour le système ZF_3 , la démonstration est faite de la même façon, avec la matrice M_3 .

Observation. Rest ouvert le problème de savoir si ZF_3 est ou non \rightarrow -finiment trivialisable.

THÉORÈME 30. *ZF_5 est \rightarrow -finiment trivialisable, est inconsistant dans un sens généralisé, n'y est pas valable la règle de modus ponens et il n'est pas trivial.*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A.I. Arruda, Sur certaines hiérarchies de calculs propositionnels, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, série A, **265** (1967), pp. 651-644.
- [2] A.I. Arruda, Sur certaines hiérarchies da calculs propositionnels, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, série A, **266** (1968), pp. 37-39 et 897-900.
- [3] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, O paradoxo de Curry-Moh Shaw-Kwei, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, vol. **18**, fasc. 1 et 2 (1968), pp. 83-89.
- [4] A.I. Arruda et N.C.A.da Costa, Sur un théorème de Hilbert et Bernays, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, **258** (1964), pp. 6311-6312.
- [5] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, Transformadas no cálculo restrito de predicados, Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. **38** (1966), pp. 385-390.
- [6] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, On the postulate of separation, Notices of the American Mathematical Society, vol. **15** (1968), pp. 399-400.
- [7] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, Further considerations on the postulate of separation, Notices of the American Mathematical Society, vol. **15** (1968), p. 555.
- [8] N.C.A.da Costa, Sistemas formais inconsistentes, Thèse, Universidade Federal do Paraná (1963).
- [9] N.C.A.da Costa, Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, **257** (1963), pp. 3790-3792.
- [10] A.A. Fraenkel, et Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, North-Holland (1958), Amsterdam.
- [11] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand (1952), New York.

*Institut de Mathématiques
Université de Campinas
Campinas, S o Paulo, Brésil.*