ÜBER EINIGE BEISPIELE DER QUASINORMAL— TEILER EINER p-GRUPPE

KIRIO NAKAMURA

In dieser Note soll die Struktur des Quasinormalteilers vom Exponenten $\boldsymbol{p}$ der endlichen $\boldsymbol{p}$-Gruppe untersucht werden. Ferner sollen einige Beispiele sowohl im regulären Falle als auch im nicht regulären Falle angeführt werden, die zeigen, daß das erst gesagte Ergebnis im allgemeinen Quasinormalteiler nicht immer zutrifft.

BEZEICHNUNGEN

$\mathfrak{G} \overset{q}{\geqq} \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist Quasinormalteiler von $\mathfrak{G}$; $\underline{\mathfrak{N}} =$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{N}$ liegt; $|\mathfrak{G}|, |G| =$ Ordnung von $\mathfrak{G}$ und G; $|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}| =$ der Index von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$; $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots\} =$ die von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ erzeugte Gruppe; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ oder nur $\mathfrak{Z} =$ Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}' =$ Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ ist mit $\mathfrak{B}$ als ganzes vertauschbar; $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{G}$; ist $\boldsymbol{p}^a | \boldsymbol{x}$ aber $\boldsymbol{p}^{a+1} \nmid \boldsymbol{x}$, so schreiben wir $\boldsymbol{p}^a \top \boldsymbol{x}$.

Im allgemeinen gilt der

Satz. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $\boldsymbol{p}$-Gruppe und $\mathfrak{G} \overset{q}{\geqq} \mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}$ vom Exponenten $\boldsymbol{p}$, so ist $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ abelsch. Dabei wird $\mathfrak{G}$ endlich angenommen.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion von $|\mathfrak{G}|$. Daher können wir $\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{E}$ annehmen. Sei $\underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G} = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}_G} H\mathfrak{N}H^{-1}$ und $\mathfrak{H}_G = \{G\}\mathfrak{N}$. Dann ist $\underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G} = \bigcap_{x} G^x\mathfrak{N}G^{-x}$ wegen $H = G^xN$ für $N \in \mathfrak{N}$, daher $\underline{\mathfrak{N}} = \bigcap_{G \in \mathfrak{G}} \underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G}$. Denn es ist $\underline{\mathfrak{N}} \subseteq \bigcap_{G} \underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G}$ und $G\mathfrak{N}G^{-1} \subseteq \underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G}$. Wenn $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{H}_G$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$ ist, so ist durch Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{H}_G}$ abelsch, daher $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ auch abelsch. Also können wir erst recht $\mathfrak{G} = \{G\}\mathfrak{N}$ für ein $G \in \mathfrak{G}$ annehmen. Es gilt weiter $\{G\} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, da sonst $\underline{\mathfrak{N}} \neq \mathfrak{E}$ wäre. Sei $G^x \neq E$, daher $G^x \overline{\in} \mathfrak{N}$ und $X = G^xN$ für $E \neq N \in \mathfrak{N}$. Dann haben wir $\mathfrak{H}_X = \{X\}\mathfrak{N} = \{G^x\}\mathfrak{N}$. Ist $|X| = \boldsymbol{p}$, daher $|\mathfrak{H}_X : \mathfrak{N}| = \boldsymbol{p}$, so ist $|G^x| = \boldsymbol{p}$. Da $\{G\} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$ ist, ergibt sich $\{G^x\} \subseteq \mathfrak{Z}$, daher $\{G^x\} \times \mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{G})$ im Sinne von P. Hall. Wir betrachten die Frattini-Gruppe von $\Omega_1(\mathfrak{G})$ $\mathfrak{U} = \Phi\{\Omega_1(\mathfrak{G})\}$, wo $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{U}$ und

Received September 5, 1966.

$\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{U}$ ist. Wegen $\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{E}$ erreichen wir gleich unser gewünschtes Ergebnis $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

In diesem Satz ist die Voraussetzung für $\mathfrak{N}$ nicht überflüßig. In der Tat:

Wir konstruieren eine endliche p-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} \supsetneqq \mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N}$ nicht vom Exponenten p und $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ nicht abelsch ist. Zuerst haben wir den regulären Fall

(1) Es sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche p-Gruppe vom Typus (p^2, p^2, p^2) und bewirke A, B folgende Automorphismen $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf $\mathfrak{A}$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} p^2 - p + 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{p^2 - p}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p + 1 \end{pmatrix}$$

Natürlich gehören die Elemente der Matrizen $\bar{A}$, $\bar{B}$ und des Vektorraums $\mathfrak{A}$ dem Rest-klassenring modulus p^2. Weiter wird $A_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2, 3)$ mit dem Basisvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{A}$ identifiziert. Es ist $\bar{A}^{p^2} = \bar{B}^p = E$. Setzen wir $A^{p^2} = A_1^{-1}$, so haben wir nach Zassenhaus [4] eine Erweiterungsgruppe $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$, da für jedes $N_1, N_2 \in \mathfrak{A}$ $(N_1N_2)^{\bar{A}} = N_1^{\bar{A}}N_2^{\bar{A}}$ und für jedes $N \in \mathfrak{A}$ $N^{\bar{A}^{p^2}} = N^E = N^{A_1^{-1}}$ mit $(A_1^{-1})^{\bar{A}} = A_1^{-1}$ gilt. Sei zunächst $B^p = A_2^{(p^2-p+2)/2}$. Wenn wir Automorphismus von $\bar{B}$ auf A mit $A^{\bar{B}} = A^{1+p}A_2^p$ definieren, so gilt $A^{\bar{B}^p} = A^{(1+p)^p} = A^{1+p^2+\frac{p(p-1)p^2}{2}}$: denn $(A^{1+p}A_2^p)^{(1+p)^i} = A^{(1+p)^{i+1}}A_2^p$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ führt durch Induktion nach n zu $A^{\bar{B}^n} = \{A^{(1+p)^{n-1}}A_2^{p(n-1)}\}^{\bar{B}} = (A^{1+p}A_2^p)^{(1+p)^{n-1}}A_2^{p(n-1)} = A^{(1+p)^n}A_2^{pn_1}$). Weiter ergibt sich $A^{\bar{B}^p} = A^{A_2^{(p^2-p+2)/2_2}}$). Für jedes $N \in \mathfrak{A}$ und x definieren wir $(NA^x)^{\bar{B}} = N^{\bar{B}}(A^{\bar{B}})^x$. Sei $(A^xN)^{\bar{B}} = (A^{\bar{B}})^xN^{\bar{B}}$. Dann gilt $(A^xN)^{\bar{B}} = (N^{A^x}A^x)^{\bar{B}} = N^{\bar{B}A^x}(A^{\bar{B}})^x = (A^{\bar{B}})^xN^{\bar{B}} = (N^{\bar{B}})^{(A^{\bar{B}})^x}(A^{\bar{B}})^x = N^{(A^{1+p}A_2^p)^x\bar{B}}(A^{\bar{B}})^x$, daher $N^{(A^{\bar{B}})^x\bar{B}} = N^{(A^{1+p}A_2^p)^x\bar{B}} = N^{\bar{B}A^x}$, was aber sicher ermittelt ist, da der

1) und 2) Es ist $AA_2^xA^{-1} = (A_1A_2)^x = A_1^xA_2^x$, daher $A_2^xAA_2^{-x} = A^{1+p^2x}$, was zu $[A_2^p, A] = A^{p^3} \in \mathfrak{Z}$ und $A^{A_2^{(p^2-p+2)/2}} = A^{(1+p^2)\left(1+\frac{p^2-p}{2}\right)} = A^{(1+p)^p} = A^{\bar{B}^p}$ führt.

Automorphismus $\bar{B}A^x\bar{B}^{-1}$ von $\mathfrak{A}$ durch die Matrix $\bar{A}^{(1+p)x}$ dargestellt wird und A_2^p elementweise $\mathfrak{A}$ festläßt und daher jener Automorphismus $(A^{1+p}A_2^p)^x$ ist. Daraus folgt sofort für jedes $N_i \in \mathfrak{A}$ und x_i $(i = 1, 2)$

$(N_1A^{x_1})^{\bar{B}}(N_2A^{x_2})^{\bar{B}} = N_1^{\bar{B}}(A^{\bar{B}})^{x_1}N_2^{\bar{B}}(A^{\bar{B}})^{x_2} = N_1^{\bar{B}}N_2{}^{(A^{\bar{B}})^{x_1}\bar{B}}(A^{\bar{B}})^{x_1+x_2} = N_1^{\bar{B}}N_2{}^{\bar{B}A^{x_1}}(A^{\bar{B}})^{x_1+x_2}$ $= (N_1N_2{}^{A^{x_1}}A^{x_1+x_2})^{\bar{B}} = (N_1A^{x_1}N_2A^{x_2})^{\bar{B}}$, womit haben wir gesehen, daß $\bar{B}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{M}$ bewirkt. Es ist für jedes $M = NA^x \in \mathfrak{M}$ $M^{\bar{B}^p}$ $= N^{\bar{B}^p}(A^x)^{\bar{B}^p} = N(A^{A_2\frac{p^2-p+2}{2}})^x = N^{A_2\frac{p^2-p+2}{2}}(A^x)^{A_2\frac{p^2-p+2}{2}} = (M)^{A_2\frac{p^2-p+2}{2}}$ und $(A_2{}^{\frac{p^2-p+2}{2}})^{\bar{B}} = A_2{}^{\frac{p^2-p+2}{2}}$, so daß wir auch nach Zassenhaus zeigen können, daß es eine Erweiterungsgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ gibt. Wir betrachten die Normalteilerkette $\mathfrak{G} \supseteq \{A_3, A_1, A_2\} \supseteq \{A_3^p, A_1, A_2\} \supseteq \{A_1, A_2\} \supseteq \{A_1\} \supseteq \{A_1^p\}$ $\supseteq \mathfrak{E}$. Dabei ist ersichtlich $\mathfrak{Z}[\mathfrak{G}/\{A_3^p, A_1, A_2\}] \supseteq \{A_3, A_1, A_2\}/\{A_3^p, A_1, A_2\}$, $\mathfrak{Z}[\mathfrak{G}/\{A_1, A_2\}] \supseteq \{A_3^p, A_1, A_2\}/\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{Z}[\mathfrak{G}/\{A_1\}] \supseteq \{A_1, A_2\}/\{A_1\}$, $\mathfrak{Z}[\mathfrak{G}/\{A_1^p\}] \supseteq \{A_1\}/\{A_1^p\}$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \supseteq \{A_1^p\}$, daher ist die Klasse von $\mathfrak{G}$ höchstens 7. Setze $p \geqq 11$. Dann muß $\mathfrak{G}$ im Sinne von P. H all regulär sein. Jedes $G \in \mathfrak{G}$ wird durch $G = NA^xB^y$ ausgedrückt, wo $N \in \{A_2, A_3\}$ ist, und zwar setzen wir $\mathfrak{N} = \{A_2, A_3, B\}$.

a) Sei $x \not\equiv 0$ (p). Da $\mathfrak{G}$ regulär ist, gilt $G^{p^3} = N^{p^3}A^{p^3x}B^{p^3y}C^{p^3}$ mit $C \in \mathfrak{G}' \subseteq \{A^p, \mathfrak{A}\}$, dasjenige Gruppe und $\{B, N\}$ vom Exponenten höchstens p^3 ist, woraus $G^{p^3} = A^{p^3x} \neq E$, daher $G^{p^3} \in \mathfrak{Z}$ folgt. Wir haben gleich $\{G\} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$, falls $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ ist, daher $\{G\}$ v $\mathfrak{N}$, da $|\mathfrak{G}| = p^9$, $|G| = p^4$, $|\mathfrak{N}| = p^5$ ist. Es soll im Schluß bemerkt sein, daß $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$ keinesfalls eintreten kann. Also nehmen wir weiterhin $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ an.

b) Sei $x \equiv 0$ (p).

b 1) $p \top x$. Wie in a) haben wir für jedes $G = NA^xB^y$ $G^{p^2} = N^{p^2}A^{p^2x}B^{p^2y}C^{p^2}$ mit $C \in \{N, A^x, B^y\}' \subseteq [\{A^p\}\mathfrak{N}]' \subseteq \mathfrak{A}$, dasjenige Gruppe doch vom Exponenten höchstens p^2 ist. Nun aus der Definition vom N merken wir $|N| \leqq p^2$. Also erreichen wir $G^{p^2} = A^{p^2x}B^{p^2y} \in \mathfrak{N}\mathfrak{Z}$ und $G^{p^2} \notin \mathfrak{N}$ wegen $A^{p^2x} \neq E$, was alsdann $\{G\} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, daher $\{G\}$ v $\mathfrak{N}$ ergibt, da $G \in \{A^p, \mathfrak{A}, B\}$, $|G| = p^3$, $|\mathfrak{N}| = p^5$ und $|\{A^p, \mathfrak{A}, B\}| = p^8$ ist.

b 2) $p^2 \top x$. Es ist $A^x \in \mathfrak{A}$, daher $G^p = (A^xNB^y)^p = N_1^{1+\tau+\cdots+\tau^{p-1}}$, wo τ Matrix des durch B^y induzierten Automorphismus und $N_1 = A^xN \in \mathfrak{A}$ ist. Da wir durch Induktion von i leicht

$$\bar{B}^i = \begin{pmatrix} (p^2-p+1)^i & 0 & 0 \\ \frac{p^2-p}{2}\sum_{k=0}^{i-1}(p^2-p+1)^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (p+1)^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p^2-p)i+1 & 0 & 0 \\ \frac{p^2-p}{2}\times i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+pi \end{pmatrix},$$

daher $\sum_{i=0}^{p-1} \tau^i = p\ (p^2)$ erhalten haben, so gilt $G^p = (A^x N B^y)^p = (A^x N)^p B^{py} = A^{px} N^p B^{py} \in \mathfrak{N}$[3], was $\{G\} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ und $\{G\} \vee \mathfrak{N}$ ergibt, da $|G| = p^2$, $|\{B, \mathfrak{A}\}: \mathfrak{N}| = p^2$, daher $\{G\}\mathfrak{N} = \{B, \mathfrak{A}\}$ ist.

b 3) $p^3 | x$. Es ist $A^x \in \mathfrak{Z}$, daher $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{Z} \triangleright \mathfrak{N}$, was gleich $\{G\} \vee \mathfrak{N}$ liefert. Damit haben wir $\mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{N}$.

Zum Schluß weisen wir $\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{E}$ nach. So haben wir sofort $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ nicht abelsch gezeigt, da $\mathfrak{N}$ ersichtlich nicht abelsch ist. Wäre $\underline{\mathfrak{N}} \neq \mathfrak{E}$ daher $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, dann würde $\{A_2\} \times \{A_3\} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}) \times \{A_2\} \times \{A_3\}$ sein, was sicher nicht geht, da A keinen Vektorraum in $\mathfrak{A}$ als $\{A_1\}$ festläßt und $\mathfrak{N}$ nicht abelsch ist.

Weiter haben wir den nicht regulären Fall:

(2) Es sei $\mathfrak{A}$ eine elementäre abelsche p-Gruppe von der Ordnung p^{p+1} für $p > 2$ und bewirke A, B folgende Automorphismen $\bar{A}, \bar{B}$ auf $\mathfrak{A}$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & 0 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -1 & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Natürlich ist $\bar{A}$ und $\bar{B}$ Matrix auf $GF(p)$ von dem Grad $p+1$. $A_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, p+1)$ wird mit dem Basisvektor

---

3) Es gilt $(A^x N)^p = (NA^x)^p$ und $N^p B^{py} \in \mathfrak{N}$, da $B^p \in \{A_2\}$ ist. Weiter ist $A^{px} \in \mathfrak{Z}$.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{p}+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{A}$ identifiziert, wobei $\mathfrak{A}$ als ein Vektorraum über $GF(p)$ betrachtet wird.

(Dieser Vektor hat 1 auf der i ten Stelle von unten und 0 auf anderen Stellen). Wir können leicht $(\bar{A})^{p^2} = (\bar{B})^p = E$ erhalten. Setzen wir $A^B = A^{1+p}A_2$, so haben wir eine Erweiterungsgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ mit $A^{p^2} = A_1^{-1}$ und $B^p = A_2$ wie in (1). Da $(\bar{A})^p \neq E$ ist, gibt es ein N mit $[A^p, N] \neq E$ und $N \in \mathfrak{N}$, was Nichtregularität von $\mathfrak{G}$ anzeigt. Setze $\mathfrak{N} = \{A_i (i > 1), B\}$.

a) Sei $x \not\equiv 0\ (p)$. Es ist für jedes $G = NA^xB^y \in \mathfrak{G}$ $G^p = N^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}}(A^xB^y)^p = N^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}}(A^x)^{1+B^y+\cdots+B^{(p-1)y}}B^{py}$, wo $\sigma = \bar{A}^x\bar{B}^y$ ist. Da $AA_2A^{-1} = A_1A_2$, daher $A_2AA_2^{-1} = AA_1^{-1} = A^{1+p^2}$ erfolgt, bekommen wir gleich $(A^x)^B = (A^{1+p}A_2)^x = A^{(1+p)x}A_2^x[A_2, A^{1+p}]^{x(x-1)/2}$. Durch Induktion von y folgt also $(A^x)^{B^y} = \{(A^x)^{B^{y-1}}\}^B = [A^{(1+p)^{y-1}x}A_2^{x\{1+(1+p)+\cdots+(1+p)^{y-1}\}}A_1^{\alpha y-2}]^B = (A^{1+p}A_2)^{(1+p)^{y-1}x} A_2^{x\{1+(1+p)+\cdots+(1+p)^{y-1}\}}A_1^{\alpha y-2} = A^{(1+p)^yx}A_2^{x\{1+(1+p)+\cdots+(1+p)^{y-1}\}}[A_2, A^{1+p}]^{(1+p)^{y-1}x\{(1+p)^{y-1}x-1\}/2}A_1^{\alpha y-2} = A^{(1+p)^yx}A_2^{\{x(1+p)^y-x\}/2}A_1^{\alpha y-1} = A^{(1+p)^yx}A_2^{xy}A_1^{\alpha y-1}$, da $[A_2, A] = A_1^{-1} \in \mathfrak{Z}$ ist. Dies ergibt eben $G^p = N^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}}A^xA^{(1+p)^yx}A_2^{xy}A^{(1+p)^{2y}x}A_2^{2xy}\cdots A^{(1+p)^{(p-1)y}x}A_2^yA_1^\beta = N^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}}A^{x\{1+(1+p)^y+(1+p)^{2y}(1+p^2)^{xy}+\cdots+(1+p)^{(p-1)y}(1+p^2)^{(p-1)(p-2)xy/2}\}}A_2^yA_1^\beta$. Es ist $(\sigma-1)(1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}) = \sigma^p - 1 = (\bar{A}^x\bar{B}^y)^p - 1 = \bar{A}^{px} - 1$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

da $(\bar{A}^x\bar{B}^y)^p = \bar{A}^{px}\bar{B}^{py}$ ist. Ersichtlich ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots a_{pp} & 1 \end{pmatrix}$$

für $a_{11}a_{22}\ldots a_{pp} \neq 0$. Gelte für ein

$$N = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{p+1} \end{pmatrix} \qquad N^{\sigma-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Dann ist $a_{11}x_1 + x_2 = x_2, \ldots, a_{p-1,\,1}x_1 + \cdots + a_{p-1,\,p-1}x_{p-1} + x_p = x_p,\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pp}x_p + x_{p+1} = x_{p+1} + \alpha$, daher $x_1 = x_2 = \cdots = x_{p-1} = 0$ und $x_p = 0$ für $\alpha = 0$. Daher haben wir $\rho = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ \rho_{p,1} & \cdot & & \cdot \\ \rho_{p+1,1} & \rho_{p+1,2} & \cdots & \rho_{p+1,\,p+1} \end{pmatrix},$$

was

$$N^{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \\ u \end{pmatrix} = A_1^u A_2^v$$

für jedes $N \in \mathfrak{A}$ ergibt. Daraus folgt $G^p = A_1^u A_2^v A^{x\{p + py \times \frac{p(p-1)}{2} + p^2 h\}} A_2^y A_1^{\beta}$

wegen $p>2$, daher $G^{p^2} = A^{p^2x} \in \mathfrak{Z}$, was gewünschtes $\{G\}$ v $\mathfrak{N}$ wie in (1) ergibt.

b) Sei $x \equiv 0 \ (p)$.

b 1) $p \top x$. Dann erhalten wir $1+\sigma+\cdots+\sigma^{p-1}=0$, da

$$\bar{A}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{x}{p} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{daher} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdot & & \cdot \\ -y & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ \frac{x}{p} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ist, womit $G^p = (A^xB^y)^p = A^{px}B^{py}$ gleich ermittelt ist, weil $[A^x, B^y] = A^{-pxy} \in \mathfrak{Z}$ wegen $[B, A^x] = BA^xB^{-1}A^{-x} = (A^{1+p}A_2)^xA^{-x} = A^{px} \in \mathfrak{Z}$ und $|A^{-pxy}| = p$ ist. Jetzt ist gefordert $G^p \,\underline{\in}\, \mathfrak{N}$, da $E \neq A^{px} \in \mathfrak{Z}$ und $B^{py} = A_2^y \in \mathfrak{N}$ ist, daher $\{G\} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Wenn wir $G \in \{A^p\}\mathfrak{N}$ betrachten, so erschließen wir $\{G\}$ v $\mathfrak{N}$ wie in (1) b 2).

b 2) $p^2 | x$. Es gilt nun $G = A^xB^yN \in \{\mathfrak{A}, B\} = \{A_1\} \times \mathfrak{N}$ mithin $\{\mathfrak{A}, B\} \triangleright \mathfrak{N}$, was wie gewünscht zu $\{G\}$ v $\mathfrak{N}$ führt.

Damit haben wir alle möglichen Fälle betrachtet und $\mathfrak{G} \,\underline{\trianglerighteq}\, \mathfrak{N}$ erhalten.

Wie im Schluß von (1) können wir $\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{E}$ und daher $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ nicht abelsch nachweisen*).

LITERATUR

[1] Deskins, W.E.: On quasinormal subgroups of finite groups. Math. Z. **82**, 125–132 (1963).

[2] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **36**, 29–95 (1933).

[3] Ito, N. und J. Szep: Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. Acta Sci. Math. Szeged **23**, 168–170 (1962).

[4] Nakamura, K.: Über den Quasinormalteiler der regulären p–Gruppe von der Klasse 2. Nagoya Math. J. **26**, 61–67 (1966).

[5] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

Mathematisches Institut der Nihon-Universität Koriyama (Japan)

*) Nach brieflicher Mitteilung von Herrn Deskins hat Herr J.G. Thompson die ähnliche p–Gruppe wie (2) konstruiert.