SUR L'ENSEMBLE D'ADHERENCE FINE DES FONCTIONS ALGEBROIDES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction

Dans ce mémoire, on fera pour les fonctions algébroïdes des études analogues à ceux des fonctions méromorphes dans $|z|<\infty$ faits dans Doob [3], Toda [7].

Soit $g(z)$ une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$ ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini. J.L. Doob a obtenu le théorème suivant en utilisant la topologie fine pour $g(z)$.

Théorème de J.L. Doob

L'ensemble d'adhérence fine $\tilde{C}_g(\infty)$ de $g(z)$ en ∞ est total ou se réduit à un point et dans ce cas $g(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard (Doob [3]).

On définie, d'abord, l'ensemble d'adhérence fine pour les fonctions algébroïdes aussi et obtient un résultat analogue à celui de J.L. Doob. Et après, on considère quelques aspects des fonctions algébroïdes caractérisés par des propriétés de l'ensemble.

2. Définitions et Notations

1) Fonction algébroïde—On appelle fonction algébroïde méromorphe pour $|z|<\infty$, la fonction $f(z)$ définie par une équation algébrique

$$f^n+a_1(z)f^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(z)=0 \tag{1}$$

oú les coefficients $a_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ sont des fonctions données de z méromorphes pour $|z|<\infty$ et au moins un n'est pas rationnel. On suppose qu'elle ne soit pas réductible. Quand tous les coefficients sont holomolphes, on dit que $f(z)$ est fonction algébroïde entière.

2) a) Z: Surface de Riemann définie par $f(z)$ comme surface de recouvrement du plan fini;

Received August 22, 1966.

b) Z_r: Partie de Z sur $|z|\leqq r$;

c) $n(r, w)$: Nombre des pôles de $f(z)$ ou des racines de l'équation $f(z)-w=0$ sur Z_r. On écrit pour $w=\infty$ $n(r,\infty)=n(r,f)$;

d) $$N(r,w)=\frac{1}{n}\int_0^r \frac{n(t,w)-n(0,w)}{t}dt+\frac{n(0,w)}{n}\log r,$$

$$N(r,f)=N(r,\infty);$$

e) $$m(r,w)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\Gamma(r)}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-w}\right|d\theta \qquad w\neq\infty,$$

$$m(r,f)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\Gamma(r)}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \qquad w=\infty$$

où $\Gamma(r)$ est courbe sur $|z|=r$ de Z;

f) $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f), T(r,w)=m(r,w)+N(r,w)$ $(w\neq\infty)$.

3) Ensemble d'adhérence fine—Soit $f(z)$ une fonction algébroïde méromorphe, $V=(v$; voisinage fin de ∞ dans le plan). On définie l'ensemble d'adhérence fine $\tilde{C}_f(\infty)$ de $f(z)$ en ∞ comme suivant:

$$\tilde{C}_f(\infty)=\bigcap_{v\in V}\overline{f(v')} \tag{2}$$

où v' est l'ensemble le plus grand sur Z dont la projection sur le plan fini est v et $f(v')$ est l'ensemble des points $f(z')$ dans la sphère de Riemann pout tout z' de v'.

$\tilde{C}_f(\infty)$ est non-vide, compact dans la sphère de Riemann.

3. Sur l'ensemble d'adhérence fine des fonctions algébroïdes

On considère quelques propriétés de $\tilde{C}_f(\infty)$ dans ce paragraphe.

LEMME 1

Les racines de l'équation algébrique

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

sont les fonctions continues des coefficients (voir Takagi [6]).

THÉORÈME 1

Dans l'équation (1), *si tous les coefficients admettent des limites fines finies en* ∞, $\tilde{C}_f(\infty)$ *se compose d'au plus n points.*

Démonstration

D'après l'hypothèse, il existe un ensemble dont le complémentaire est effilé en ∞ et sur lequel toutes les fonctions $a_i(z)(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ tendent vers ses limites fines finies grâce à un théorème de H. Cartan (voir Brelot [2]). Soit v cet ensemble. Quand z tend vers ∞ dans v, l'équation (1) devient

$$(1') \qquad f^n+A_1f^{n-1}+\cdots\cdots+A_n=0$$

où A_i est la limite fine de $a_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ en ∞. On applique ici le Lemme 1, c'est-à-dire, les racines de (1) tendent vers les racines de (1') si z tend vers ∞ dans v. Cela veut dire que $\tilde{C}_f(\infty)$ contient les racines de (1') seulement, par conséquent, $\tilde{C}_f(\infty)$ se compose d'au plus n points.

THÉORÈME 2

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde méromorphe définie par l'équation (1). *Alors, $\tilde{C}_f(\infty)$ est total ou se compose d'au plus n points.*

Démonstration

Si $\tilde{C}_f(\infty)$ n'est pas total, on peut supposer que $f(z)$ soit bornée dans un v de V: $|f(z)|<M<+\infty$ dans v. En vertu des relations entre les racines et les coefficients de l'équation algébrique, on a dans v

$$(3) \qquad |a_i(z)|< M_i< +\infty$$

pour tout i. Alors, d'après le Théorème de J.L. Doob écrit dans l'introduction, $\tilde{C}_{a_i}(\infty)$ se réduit à un point pour tout i. L'inégalité (3) entraîne que la limite fine de $a_i(z)$ est finie pour tout i, de sorte que, grâce au Théorème 1, $\tilde{C}_f(\infty)$ se compose d'au plus n points.

Comme l'inverse du Théorème 1,

COROLLAIRE 1

Si $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas l'infini, chaque $a_i(z)$ admet une limite fine finie en ∞.

4. Sur les valeurs exceptionnelles

D'abord, on considère le nombre des valeurs exceptionnelles au sens de Picard. En général, une fonction algébroïde admet au plus $2n$ valeurs exceptionnelles (Rémoundos [5]).

THÉORÈME 3

Soit $f(z)$ une fonction algébrodïde comme dans le Théorème 2. *Si $\tilde{C}_f(\infty)$ n'est pas total, $f(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard.*

Démonstration

Ce théorème est un corollaire immédiat du Théorème 4, mais on donne ici une démonstration directe.

On peut supposer que $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas l'infini d'après l'hypothèse et la transformation linéaire. D'abord, l'infini n'est pas exceptionnelle, parce que, au moins un coefficient admet un nombre infini de pôles, grâce au Corollaire 1 et au Théorème de J.L. Doob. Pour α fini, on considère

$$A_\alpha(z)=\prod_{i=1}^{n}(f_i(z)-\alpha)=\alpha^n+a_i(z)\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(z) \tag{4}$$

où $f_i(z)$ est une branche de $f(z)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$. En vertu du Corollaire 1, chaque $a_i(z)$ admet une limite fine finie en ∞, de sorte que $A_\alpha(z)$ est rationnelle ou non-rationnelle et admet une limite fine en ∞.

Il est facile de voir qu'il existe au plus n-1 valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ telles que $A_{\alpha_i}(z)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n-1)$ sont rationnelles.

Quant à α pour que $A_\alpha(z)$ n'est pas rationnelle, puisque $A_\alpha(z)$ admet une limite fine en ∞, d'après le Théorème de J.L. Doob, $A_\alpha(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard; en particulier, 0 n'est pas valeur exceptionnelle. Cela veut dire que α n'est pas valeur exceptionnelle au sens de Picard pour $f(z)$.

Pour α tel que $A_\alpha(z)$ est rationnelle, on considère comme suivant. A tous les pôles de $f(z)$ à un nombre fini près, $A_\alpha(z)$ est fini. L'inégalité (4) entraîne que α n'est pas valeur exceptionnelle pour $f(z)$.

On a le résultat.

On sait le fait que "si $a(z)$, méromorphe non rationnelle dans $|z|<\infty$, admet une limite fine en ∞, elle n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna et de Borel (Toda [7])".

On considère ici si le fait précédent est vrai pour les fonctions algébroïdes.

LEMMA 2

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par (1). *Alors, pour tout w*

$$T(r, f)=T(r, w)+O(1) \tag{5}$$

(Selberg [4]).

Pour tout w de la sphère de Riemann, on définie

$$\delta(w)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r, w)}{T(r, f)}$$

qui est égale à

$$1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, w)}{T(r, f)}$$

d'après le Lemme 2 (voir Selberg [4]).

LEMME 3

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par (1). *Pour tout $i=1, 2, \ldots\ldots n$,*

$$\frac{1}{n}\, m(r, a_i)-O(1)\leq m(r, f)\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(r, a_i)+O(1)$$

(voir Selberg [4]).

LEMME 4

Soit $u(z)$ une fonction surharmonique dans un domaine D tel que le point à l'infini est un point-frontière irrégulier de D. Si $u(z)/\log|z|$ est bornée inférieurement dans un voisinage fin de ∞, alors $u(z)/\log|z|$ admet une limite fine finie en ∞ (Brelot [1]).

LEMME 5

Si un ensemble E quelconque dans le plan est effilé en ∞, il existe des circonférences arbitrairement grandes de centre 0 *ne rencontrant pas E* (Brelot [2]).

LEMME 6

Dans l'équation (1), *$f(z)$ est algébrique si et seulement si*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r, f)}{\log r}<+\infty$$

(voir Selberg [4]).

THÉORÈME 4

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par (1). *Si $\tilde{C}_f(\infty)$ n'est pas total, pour tout w de la sphère de Riemann, $\delta(w)=0$: il n'y a pas de valeurs exceptionnelle au sens de Nevanlinna pour $f(z)$.*

Démonstration

On peut supposer que $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas ∞. D'après le Théorème 2, $\tilde{C}_f(\infty)=(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n)$. Grâce au Corollaire 1, soit A_i une limite fine finie de $a_i(z)$ en ∞ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$.

1) le cas où $w\neq\beta_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$

Comme dans la démonstration du Théorème 2, il y a un v de V tel que $a_i(z)$ tend vers A_i pour tout i et l'ensemble d'adhérence ordinaire de $f(z)$ sur v en ∞ est $(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n)$. Grâce au Lemme 5, il existe une suite de nombres positifs (r_n) telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z|=r_n)\cap Cv=\phi$ pour tout n et $f_i(r_n e^{i\theta})$ tend vers $\beta_i(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ uniformément par rapport à θ, de sorte que l'on a

$$m(r_n, w)=O(1) \qquad (n \to \infty) .$$

Notre fonction $f(z)$ n'est pas algébrique, en conséquence, d'après le Lemme 6,

$$\delta(w)=0 .$$

2) le cas où $w=\beta_i(i=1, 2, \ldots\ldots n)$

Soit β un des $\beta_i(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ et $F(z)=1/(f(z)-\beta)$. On applique le Lemme 3 pour $F(z)$. Alors, pour tout k $(0 \leq k \leq n-1)$

$$\frac{1}{n} m(r, b_k/b_n)-O(1) \leq m(r, \beta) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(r, b_k/b_n)+O(1) \tag{6}$$

où chaque b_k est forme linéaire de $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ et $b_0 \equiv 1$, $b_n \not\equiv 0$. Chaque b_k admet une limite fine finie en ∞. Soit B_k la limite fine de b_k $(k=1, 2, \ldots\ldots n)$.

Comme dans le cas 1) il existe une suite (r_n) telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z|=r_n)\cap Cv=\phi$ pour tout n où v est le voisinage fin défini dans 1) et $b_k(r_n e^{i\theta})$ tend vers B_k uniformément par rapport à θ quand n tend vers ∞. Pour cette suite, on a de (6)

$$m(r_n, \beta) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} m(r_n, b_k)+m(r_n, 1/b_n)+O(1).$$

On a

$$m(r_n, b_k)=O(1) \qquad (k=1, 2, \ldots\ldots n-1)$$

et, d'après le Lemme 4,

$$m(r_n, 1/b_n)=O(\log r_n) ,$$

de sorte que

$$m(r_n, \beta)=O(\log r_n) .$$

En appliquant le Lemme 6, on obtient

$$\delta(\beta)=0 .$$

Par 1) et 2) on a le résultat.

N.B. Il est facile de voir que le Théorème 3 est un corollaire immédiat de ce théorème.

On dira que w est valeur exceptionnelle au sens de Borel pour $f(z)$ si

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r, w)}{\log r} < \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r, f)}{\log r}\ .$$

THÉORÈME 5

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par (1). *Si $\tilde{C}_f(\infty)$ n'est pas total, il n'y a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour $f(z)$.*

Démonstration

On peut supposer que $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas l'infini. Alors grâce au Théorème 2, $\tilde{C}_f(\infty)=(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n)$, où chaque β_i est fini. Soit A_i la limite fine de $a_i(z)$ en ∞ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$. Comme dans la démonstration du Théorème 3 (Toda [7]), il existe v_i de V tel que la frontière de v_i est analytique et sur lequel $a_i(z)$ tend vers A_i. Pour $v=\bigcap_{i=1}^{n} v_i$ et $w \neq \beta_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$, on applique la méthode du cas où $f(z)$ est méromorphe (voir Toda [7]), alors, on obtient tout de suite que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r, w)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r, f)}{\log r}\ .$$

Soient $b_k(z)$ les fonctions définies comme dans la démonstration du Théorème 4, u_k de V tel que la frontière de u_k est analytique et sur lequel $b_k(z)$ tend vers B_k en ∞ $(k=1, 2, \ldots\ldots n-1)$ et

$$u_n=(z\,;\log|1/b_n(z)|/\log|z| < \delta_n+\varepsilon)$$

où δ_n est la limite fine de $\log|1/b_n(z)|/\log|z|$ en ∞ et ε est un nombre positif quelconque.

Pour $u=\bigcap_{k=1}^{n} u_k$ et β, on applique la méthode du cas de fonction méromorphe (voir Toda [7]), et on a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r, \beta)}{\log r}\ .$$

On peut prendre comme β, β_i $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$, par conséquent, on a le résultat.
N.B. On peut donner facilement un exemple d'une fonctin algébroïde tel que $\tilde{C}_f(\infty)$ n'est pas total.

Bibliographie

[1] M. Brelot: Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier, Ann. Univ. Grenoble **22** (1946), 201–219.
[2] M. Brelot: Eléments de la théorie classique du potentiel, 3e édition C.D.U. Paris 1965.
[3] J.L. Doob: Some classical function theory theorems and their modern versions, Ann. Inst. Fourier **15** (1965), 113–135.
[4] H. Selberg: Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Oslo 1934.
[5] G.I. Rémoundos: Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, Mémorial des Sc. Math. **23**.
[6] T. Takagi: Leçon sur l'algèbre (en japonais), Kyoritsu Tokyo 1957.
[7] N. Toda: Sur l'allure des fonctions méromorphes, Nagoya Math. J. **26** (1966), 173–181.

Institut de Mathematiques, Université de Nagoya