ÜBER EINIGE ALLGEMEINE KONVEXITÄTSSÄTZE IN DER THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ALEXANDER DINGHAS

Herrn Kiyoshi Noshiro zum 60. Geburtstag

1. **Einleitung.** Es bezeichne $\boldsymbol{R}^n (n \geq 2)$ den durch den Alexandroff-Punkt kompaktifizierten n-dimensionalen euklidischen Raum, $[x_1, \ldots\ldots, x_n]$, ein Koordinatensystem von $\boldsymbol{R}^n$, $x=(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ einen (endlichen) Punkt von $\boldsymbol{R}^n$ und

$$\| x \| = (x_1^2 + \ldots\ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

dessen Norm. Wir betrachten ein im Endlichen liegendes Gebiet G von $\boldsymbol{R}^n$, definieren auf G einen linearen Operator

$$L = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c \qquad (c \leq 0) \tag{1. 1}$$

mit reellen, stetigen $a_{ik}=a_{ik}(x)$, $b_k=b_k(x)$, $c=c(x)$[1] und bezeichnen bei festem L durch $A_0[G]$ die Gesamtheit sämtlicher reellwertigen Lösungen u der Differentialgleichung

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0 \tag{1. 2}$$

in G. Ist O eine nicht leere Teilmenge von G, so soll allgemeiner $A_0[O]$ die Gesamtheit sämtlicher reellwertigen Funktionen $u \in C^2$, die auf O definiert sind und der Differentialgleichung (1.2) genügen, darstellen.

Die Wahl des Operators L wird im folgenden durch die Forderungen eingeschränkt:

(1) Das Dirichletsche Problem für die Differentialgleichung (1. 2) ist für jedes Teilgebiet G_0 von G, das sich als Vereinigung von endlich vielen Kugeln darstellen läßt und dessen abgeschlossene Hülle $\bar{G}_0$ in G liegt, eindeutig lösbar.

(2) Es gilt das (Hopfsche) Maximumprinzip in der Form:[2]

Es bezeichne u eine reellwertige Funktion mit den Eigenschaften:

1. u ist stetig in $\bar{G}_0$.

2. Auf $\Gamma_0 = \bar{G}_0 - G_0$ gilt $u \leq 0$.

3. u ist zweimal stetig differenzierbar in G_0 und genügt dort der Ungleichung $L[u] \geq 0$.

Dann ist u nicht positiv in G_0.[3]

Die Bedingungen (1) und (2) sind offenbar stets erfüllt, wenn der Operator L elliptisch ist und in G die Ungleichung $c \leq 0$ gilt.

Die Funktionenklasse $A_0[G]$ kann durch die Familie $A[G]$ sämtlicher (in bezug auf (1.2)) subharmonischen Funktionen mit den Bedingungen ergänzt werden:

(i) $u \in A[G] \Longrightarrow -\infty \leqq u(x) < \infty, \ u(x) \not\equiv -\infty$

in G.

(ii) $u \in A[G] \Longrightarrow$

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, u(y) \leq u(x) \qquad (\forall x \in G)$$

(Halbstetigkeit nach oben).

(iii) Es bezeichne v eine Lösung von (1. 2) in G_0 mit den (stetigen) Randwerten v^- auf $\Gamma_0 = \bar{G}_0 - G_0$. Dann folgt aus $u(x) - v(x) \leq 0 \ (x \in \Gamma_0)$ stets $u(x) \leq v(x) \ (x \in G_0)$.[4]

Die Definition der Klassen $A_0[O]$ bzw. $A[O]$ für eine offene (nicht leere) Teilmenge O von G verläuft analog.

Folgendes Ergebnis ist für die nachfolgenden Entwicklungen von grundlegender Bedeutung:

Es sei O eine nicht leere Teilmenge von G und Γ der Rand von O. Gibt es dann bei gegebenem $u \in A[G]$ ein $v \in A_0[O]$ mit der Eigenschaft

$$\overline{\lim_{x \to \Gamma}}\, [u(x) - v(x)] \leq 0 \ , \tag{1. 3}$$

so gilt $u(x) \leq v(x)$ in O. Dabei bedeutet die Schreibweise $x \to \Gamma$, daß der Punkt x von O auf irgendeine Weise gegen den Rand Γ von O konvergiert.

Es bezeichne in der Tat O_1 eine (fest gewählte) Komponente von O und Γ den Rand von O_1. Man setze $\psi = u - v$ und nehme an, die Größe

$$p = \sup_{x \in O_1} \psi(x)$$

sei positiv. Dann gibt es mit Rücksicht auf die Halbstetigkeit von ψ in O_1 einen Punkt x_0 von O_1 mit $\psi(x_0) = p$. Es sei nun $0 < \varepsilon < p$. Dann gibt es ein

G_0 mit den Eigenschaften: (i) $x_0 \in G_0$, und (ii) $\psi \leq \varepsilon$ auf dem Rand Γ_0 von G_0. Man konstruiere die Lösung v_0 von (1. 2) in G_0, die auf Γ_0 die Werte 1 annimmt, und beachte, daß wegen $\psi \in A[O_1]$ die Ungleichung $\psi(x) \leq \varepsilon v_0(x)$ in G_0 gelten muß. Andererseits gilt neben $v_0 = 1$ auf Γ_0 noch

$$L[v_0 - 1] = L[v_0] - L[1] = -c \geq 0$$

in G_0 Das hat die Ungleichung $v(x_0) \leq 1$ zur Folge, die jedoch mit der Voraussetzung $\varepsilon < p = \psi(x_0) \leq \varepsilon v_0(x_0) \leq \varepsilon$ unvereinbar ist. Es ist also $p \leq 0$ und somit $\psi \leq 0$ in O_1. Die Wiederholung des Beweisverfahrens für jede Komponente von O beweist die Ungleichung $u(x) \leq v(x)$ in O.

Neben $A[G]$ spielt bei den nachfolgenden Entwicklungen die Klasse der in G superharmonischen Funktionen eine (duale) Rolle. Diese wird durch die Gleichung

$$A' = \{u : -u \in A[G]\} \tag{1. 5}$$

definiert.

Die vorliegende Arbeit hat zum Hauptzweck, eine Reihe von allgemeinen Konvexitätssätzen für die Klasse $A[G]$ zu beweisen, sofern die Existenz bestimmter singulärer Lösungen von (1. 2) in G vorausgesetzt wird. Diese Lösungen existieren mindestens für spezielle Randmengen, falls (1. 2) die Form

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \tag{1. 6}$$

hat und G eine Kugel um den Nullpunkt von R^n ist. Die Differentialgleichung (1. 6) ist insofern von Interesse, als sich, wie später gezeigt werden soll, eine Reihe grundlegender Sätze der Funktionentheorie als Spezialfall eines allgemeinen Satzes erweisen lassen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit, soweit sie allgemeiner Natur sind, können in geeigneter Formulierung ohne Schwierigkeit auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden, sofern die Funktionen a_{ik} und b_k ein in bezug auf Transformationen des (lokalen) Koordinatensystems bestimmtes kovariantes Verhalten aufweisen. Doch sollen die diesbezüglichen Entwicklungen auf eine spätere Zeit verschoben werden.

2. **Vorbereitende Tatsachen.** Es bezeichnen G ein (nicht leeres) Gebiet von $\boldsymbol{R}^n$ und

$$f_1 = [f_1(x)]\ , \quad f_2 = [f_2(x)]$$

zwei auf G definierte reellwertige stetige Funktionen mit den Eigenschaften

1. $$f_2 > 0 \quad (d.\,h.\ f_2(x) > 0\ , \quad \forall x \in G)\ .$$

2. Die Funktion

$$\omega = [\omega(x)] = \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] \tag{2. 1}$$

ist in G nicht konstant.

DEFINITION 1. *Bei gegebenem G wird gesetzt:*

1. $$a = \inf_{x \in G} \omega(x)\ .$$
2. $$b = \sup_{x \in G} \omega(x)\ .$$
3. $$J =]a, b[\ , \quad \bar{J} = [a, b]\ .$$
4. $$\Gamma_\sigma = \{x : x \in G\ , \quad \omega(x) = \sigma, \ \sigma \in J\}\ .$$
5. $$O_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \{x : x \in G, \ \sigma_1, \sigma_2 \in J, \ \sigma_1 < \sigma_2, \ \sigma_1 < \omega(x) < \sigma_2\}\ .$$
6. $$\bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2} = O_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cup \Gamma_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \{x : x \in G, \ \sigma_1 \leq \omega(x) \leq \sigma_2\}\ .$$
7. $$\Gamma_{\sigma_1\sigma_2} = \bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cap \Gamma (\Gamma = \bar{G} - G = \text{Rand von } G)\ .$$
8. $$\Gamma_a = \bigcap_\sigma \{\bar{O}_a^\sigma : \sigma \in J\}\ .$$
9. $$\Gamma_b = \bigcap_\sigma \{\bar{O}_\sigma^b : \sigma \in J\}\ .$$

DEFINITION 2. *Es bezeichne $f = [f(x)]$ eine numerische, nach oben halbstetige Funktion auf G. Man setze für $\sigma \in J$*

$$\mu(\sigma, f) = \sup_{x \in \Gamma_\sigma} f(x) \tag{2. 2}$$

Dann soll $\mu = [\mu(\sigma, f)]$ konvex in J heißen, wenn für jedes Wertetripel $(\sigma_1, \sigma, \sigma_2)$ mit $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ *die Ungleichung*

$$\mu \leq \mu_1 \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} + \mu_2 \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \tag{2. 3}$$

gilt. Dabei sollen μ, μ_1, μ_2 die Größen $\mu(\sigma, f)$, $\mu(\sigma_1, f)$, $\mu(\sigma_2, f)$ bedeuten.
Ist $h = [h(\sigma)]$ eine in J stetige monotone Funktion und definiert man Γ_σ durch die Gleichung

$$\Gamma_\sigma = \{x : x \in G, \ h^{-1}(\omega(x)) = \sigma, \sigma \in J\}\ , \tag{2. 4}$$

so gilt anstelle (2. 3) die Ungleichung

$$\mu \leq \mu_1 \frac{h_2-h}{h_2-h_1} + \mu_2 \frac{h-h_1}{h_2-h_1} \tag{2. 5}$$

mit $h_1=h(\sigma_1)$, $h_2=h(\sigma_2)$, $h=h(\sigma)$. In diesem Falle soll μ h-konvex in J heißen. Gilt

$$\mu \geq \mu_1 \frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1} + \mu_2 \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} \tag{2. 6}$$

in J, so heißt μ konkav in J. Entsprechend soll μ h-konkav in J heißen, wenn dort (unter Zugrundelegung von (2. 4))

$$\mu \geq \mu_1 \frac{h_2-h}{h_2-h_1} + \mu_2 \frac{h-h_1}{h_2-h_1} \tag{2. 7}$$

gilt.

Ist μ konvex in J, so ist offenbar $-\mu$ konkav in J.

Satz 1. *Es sei $a=0$ und $b=+\infty$. Dann hat jede in J konvexe Funktion $\mu=[\mu(\sigma, f)]$ die Eigenschaften:*

(1) *Es existieren die Grenzwerte*

$$A_0=A_0(f)=\lim_{\sigma\to 0} \mu(\sigma, f) \qquad (-\infty < A_0 \leq +\infty) \tag{2. 8}$$

und

$$A_\infty=A_\infty(f)=\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{\mu(\sigma, f)}{\sigma} \qquad (-\infty < A_\infty \leq +\infty)\,. \tag{2. 9}$$

(2) *Es ist*

$$\mu(\sigma, f) \leq A_0 + A_\infty \sigma\,. \tag{2. 10}$$

Beweis. Aus (2. 3) erhält man zunächst

$$\frac{\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu_1}{\sigma_1} \frac{1-\frac{\sigma_2}{\sigma}}{1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \frac{1-\frac{\sigma_1}{\sigma}}{1-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}\,. \tag{2. 11}$$

Man setze

$$\underline{A}_\infty = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\mu}{\sigma}, \quad \bar{A}_\infty = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\mu}{\sigma}\,.$$

Dann folgt aus

$$\frac{\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu_1}{\sigma} + \underline{A}_\infty\left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right),$$

also auch (durch Grenzübergang $\sigma \to +\infty$) $\bar{A}_\infty \leq \underline{A}_\infty$. Somit wird

$$\mu \leq \mu_1 + A_\infty(\sigma - \sigma_1) \ . \tag{2. 12}$$

Andererseits folgt aus (2. 3) bei entsprechender Definition von $\underline{A}_0, \bar{A}_0$

$$\mu \leq \underline{A}_0\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2}\right) + \mu_2 \frac{\sigma}{\sigma_2} \tag{2. 13}$$

und somit auch $\bar{A}_0 \leq \underline{A}_0$, *d. h.* $\underline{A}_0 = \bar{A}_0 = A_0$. Das liefert mit Rücksicht auf die Ungleichung (2. 12) die Ungleichung (2. 10).

Auf ähnliche Weise beweist man den zum Satz 1 dualen Satz:

SATZ 2. *Ist μ konkav in J und $a=0$, $b=+\infty$, so existieren die Grenzwerte*

$$B_0 = B_0(f) = \lim_{\sigma \to 0} \mu(\sigma, f) \qquad (-\infty \leqq B_0 < +\infty) \tag{2. 14}$$

und

$$B_\infty = B_\infty(f) = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\mu(\sigma, f)}{\sigma} \qquad (-\infty \leqq B_\infty < +\infty)\ , \tag{2. 15}$$

und es gilt die Ungleichung

$$\mu \geq B_0 + B_\infty \sigma \ . \tag{2. 16}$$

Die Ungleichungen (2. 10) und (2. 16) sind offenbar dann von Bedeutung, wenn die Größen $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ endlich sind.

3. **Erste Konvexitätssätze.** Beim Versuch, allgemeine Konvexitätssätze für die Differentialgleichung (1. 2) aufzustellen und zu beweisen, wird man auf Fragestellungen geführt, deren Beantwortung die Existenz von zwei grundsätzlich verschiedenen singulären Lösungen erfordert. Die Lösungen hängen wiederum mit der Aufgabe der Ausschöpfung eines gegebenen Gebiets G von $\boldsymbol{R}^n$ durch geeignete, durch das Problem selbst bedingte, Umgebungssysteme zusammen, sowie mit der Lokalisierung von Randmengen von G durch solche Systeme. Insbesondere führt hier die zweite dieser Fragestellungen, sofern man sie weiter vertiefen will, zu Problemen, die der Theorie der Primenden von CARATHÉODORY mehr oder weniger untergeordnet sind.

SATZ 3. *Es bezeichnen u_1, u_2 zwei Lösungen von* (1. 2) *in G mit den Eigenschaften:*

1. $u_2 > 0$.

2. *Die Funktion* $\omega=\dfrac{u_1}{u_2}$ *ist in G nicht konstant.*

3. *Es gilt*

(3. 1) $$\lim_{x\to\Gamma} u_2(x)=1 \qquad (\Gamma=\text{Rand von } G)^{5)}.$$

4. *Die Randmengen* Γ_a, Γ_b *sind disjunkt, und es gilt*

(3. 2) $$\lim_{x\to\Gamma_a} \omega(x)=a\ ,\quad \lim_{x\to\Gamma_b} \omega(x)=b$$

und $\Gamma=\Gamma_a\cup\Gamma_b$.
Man setze bei gegebenem $u\in A[G]$

(3. 3) $$M\left(\sigma,\ \frac{u}{u_2}\right)=\max_{x\in\Gamma_\sigma}\frac{u(x)}{u_2(x)}\ .$$

Dann ist $M\left(\sigma,\dfrac{u}{u_2}\right)$ *konvex in* $J=]a,b[$.

Beweis. Man schreibe M_1, M, M_2 für $M\left(\sigma_1,\ \dfrac{u}{u_2}\right)$, $M\left(\sigma,\ \dfrac{u}{u_2}\right)$, $M\left(\sigma_2,\dfrac{u}{u_2}\right)$ und bilde die Funktion

(3. 4) $$v=u-\left\{M_1\frac{\sigma_2-\omega}{\sigma_2-\sigma_1}+M_2\frac{\omega-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right\}u_2$$

in $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$. Dann liegt zunächst v wegen

$$v=u-\frac{M_2-M_1}{\sigma_2-\sigma_1}u_1+\frac{M_2\sigma_1-M_1\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}u_2$$

in $A[O_{\sigma_1}^{\sigma_2}]$. Andererseits folgt aus (3. 4) bei Annäherung an den Rand $\Gamma_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ von $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.

$$\overline{\lim_{x\to\Gamma_{\sigma_1}^{\sigma_2}}}\ \frac{v(x)}{u_2(x)}\leq 0$$

und somit auch

(3. 5) $$\overline{\lim_{x\to\Gamma_{\sigma_1}^{\sigma_2}}}\ v(x)\leq 0\ .$$

Das liefert (wegen $v\in A[O_{\sigma_1}^{\sigma_2}]$) die Ungleichung $v(x)\leq 0$ in $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ *d. h.*

(3. 6) $$u(x)\leq\left\{M_1\frac{\sigma_2-\omega(x)}{\sigma_2-\sigma_1}+M_2\frac{\omega(x)-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right\}u_2(x)$$

in $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$. Die Einschränkung von x auf Γ_σ liefert ohne weiteres die Ungleichung

$$M \leq M_1 \frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}+M_2 \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} \tag{3. 7}$$

und somit den Beweis des Satzes 3.

SATZ 4. *Es bezeichnen* u_1, u_2 *zwei Lösungen von* (1. 2) *mit den Eigenschaften:*

1. $$u_1,\ u_2>0 .$$
2. $$\lim_{x\to\Gamma} u_2(x)=1 \qquad (\Gamma=\bar{G}-G) .$$
3. $$a=\inf_{x\in G} \omega(x)=\inf_{x\in G} \frac{u_1(x)}{u_2(x)}=0 .$$
4. $$b=\sup_{x\in G} \omega(x)=\sup_{x\in G} \frac{u_1(x)}{u_2(x)}=+\infty .$$
5. $$\lim_{x\to x_1} u_1(x)=0 \qquad (\forall x_1 \in \Gamma-\Gamma_\infty) .$$
6. $$\bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cap \Gamma=\Gamma_\infty \qquad (\forall]\sigma_1, \sigma_2[\subseteq J=]0, +\infty[) .$$

Es sei $u \in A[G]$ *und habe die Eigenschaft*

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty \qquad (\forall x_0 \in \Gamma_\infty) , \tag{3. 8}$$

wobei x *innerhalb eines festen, sonst beliebigen* $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ *gegen* x_0 *konvergiert. Man setze*

$$L\left(\sigma, \frac{u}{u_2}\right)=\sup_{x\in\Gamma_\sigma} \frac{u(x)}{u_2(x)} \tag{3. 9}$$

und nehme an, L *sei endlich. Dann ist diese Größe eine konvexe Funktion von* σ *in* J.

Es ist selbstverständlich, daß die Menge Γ_∞ nicht beliebig sein kann. Sie unterliegt offenbar Bedingungen, die sichern, daß die Funktion u_1 in G endlich ist und bei Annäherung an Γ_∞ bzw. $\Gamma-\Gamma_\infty$ gegen $+\infty$ bzw. gegen Null konvergiert. Einfachere Fälle dieses Problems für die klassische Differentialgleichung (1. 6) sind von de la VALLÉE-POUSSIN in einer fast vergessenen Note untersucht worden[6].

Beweis des Satzes 4. Man setze für $x \in O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$

$$v=u-\left\{L_1 \frac{\sigma_2-\omega}{\sigma_2-\sigma_1}+L_2 \frac{\omega-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right\} u_2 \tag{3. 10}$$

mit

$$L_1=L\left(\sigma_1,\ \frac{u}{u_2}\right),\ L_2=L\left(\sigma_2,\ \frac{u}{u_2}\right).$$

Dann gehört v wegen

$$v=u-\frac{L_2-L_1}{\sigma_2-\sigma_1}u_1+\frac{L_2\sigma_1-L_1\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}u_2$$

der Familie $A[G]$ an. Es sei jetzt x_0 ein Randpunkt von $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$. Ist $x_0 \notin \Gamma_\infty$, so liegt x_0 in G, und somit gilt wegen

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{v(x)}{u_2(x)}\leq 0\ .$$

auch

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, v(x)\leq 0\ . \tag{3. 11}$$

Ist $x_0 \in \Gamma_\infty$, so bleibt bei Annäherung von $x \in O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ an x_0 die geschweifte Klammer rechts in (3. 10) endlich und u konvergiert gegen $-\infty$. Somit gilt (3. 11) für jeden Randpunkt x_0 von $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ Es ist also $v(x)\leq 0$ in $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ und somit

$$\frac{u}{u_2}\leq L_1\frac{\sigma_2-\omega}{\sigma_2-\sigma_1}+L_2\frac{\omega-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$$

in $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$. Die Einschränkung von x auf Γ_σ und der Übergang zum Supremum liefern den Beweis des Satzes.

Ein entsprechender Satz gilt, wenn man $u>0$ in G annimmt und (3. 8) durch die Bedingung

$$\overline{\lim_{x\to x_1}}\, u(x)\leq 0 \qquad (x_1, \in \Gamma_\infty) \tag{3. 12}$$

ersetzt. Wir überlassen den Beweis dem Leser.

SATZ 5. *Es bezeichnen u_1, u_2 zwei Lösungen von* (1. 2) *in G mit den Eigenschaften:*

1. $$u_1>0\ ,\quad u_2>0\ .$$

2. $$a=\inf_{x\in G}\omega(x)=0\ ,\quad b=\sup_{x\in G}\omega(x)=+\infty\ .$$

3. $$\bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cap\Gamma_0=\phi,\ \bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cap\Gamma_\infty=\phi \textit{ für jedes } [\sigma_1,\sigma_2]\subset J=]0,+\infty[\ .$$

4. $$\lim_{x\to x_0}u_1(x)=\infty \qquad (\forall x_0\in\Gamma_\infty)\ .$$

5. $$\lim_{x\to x_0}u_1(x)=0 \qquad (\forall x_0\in\Gamma-\Gamma_\infty)\ .$$

6. $$\lim_{x\to x_0} u_2(x)=+\infty \qquad (\forall x_0 \in \Gamma_0) .$$

7. $$\lim_{x\to x_0} u_2(x)=0 \qquad (\forall x_0 \in \Gamma-\Gamma_0) .$$

Es sei $u \in A[G]$ und habe die Eigenschaft

$$\overline{\lim_{x\to x_1}}\, u(x)\leq 0 \qquad (\forall x_1 \in \Gamma^*) , \tag{3. 13}$$

wobei

$$\Gamma^*=\cup\{\bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cap\Gamma :]\sigma_1, \sigma_2[\subset J\} \tag{3. 14}$$

ist. Man setze

$$L\left(\sigma, \frac{u}{u_2}\right)=\sup_{x\in\Gamma_\sigma} \frac{u(x)}{u_2(x)} \tag{3. 15}$$

und nehme an, L sei endlich. Dann ist L eine konvexe Funktion von σ in J.

Beweis. Man setze wieder für $x \in O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$

$$v=u-\left\{L_1\frac{\sigma_2-\omega}{\sigma_2-\sigma_1}+L_2\frac{\omega-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right\}u_2 .$$

Dann gehört v der Klasse $A[G]$ an. Es sei x_0 ein Randpunkt von $O_{\sigma_1}^{\sigma_2}$. Ist $x_0 \in \bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cap\Gamma$, so gilt wegen (3. 13), sowie 6 und 7

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, \frac{v(x)}{u_2(x)}\leq 0 , \tag{3. 16}$$

und somit auch

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, v(x)\leq 0 . \tag{3. 17}$$

Ist dagegen $x_0 \notin \bar{O}_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cap\Gamma$, so kann x_0 entweder auf Γ_{σ_1} oder Γ_{σ_2} liegen. Das liefert wegen

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, \frac{u(x)}{u_2(x)}\leq L_1 \qquad (x_0 \in \Gamma_{\sigma_1})$$

bzw.

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, \frac{u(x)}{u_2(x)}\leq L_2 \qquad (x_0 \in \Gamma_{\sigma_2})$$

wieder die Ungleichungen (3. 16) und (3. 17). Mithin gilt die Ungleichung

$$\frac{u(x)}{u_2(x)}\leq L_1\frac{\sigma_2-\omega(x)}{\sigma_2-\sigma_1}+L_2\frac{\omega(x)-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} , \tag{3. 18}$$

und daher durch Einschränkung von x auf Γ_σ

$$L \leq L_1 \frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1} + L_2 \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} \quad . \tag{3. 19}$$

Das beweist den Satz 5.

Der Satz 5 stellt eine weitgehende Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von PHRAGMÉN und LINDELÖF dar[7)] und zeigt gleichzeitig die Stärke der verwendeten Methode.

Wendet man die Begriffsbildungen und die Ergebnisse des Satzes 1 an, so erhält man leicht die Abschätzung

$$L\left(\sigma, \frac{u}{u_2}\right) \leq C_2 + C_1 \sigma \tag{3. 20}$$

mit

$$C_2 = \lim_{\sigma \to 0} L\left(\sigma, \frac{u}{u_2}\right), \quad C_1 = \lim_{\sigma \to +\infty} L\left(\sigma, \frac{u}{u_1}\right) .$$

Die Abschätzung (3. 20) ist von besonderem Interesse, falls u die Bedingung (3. 13) für jeden Punkt x_0 des Randes Γ erfüllt. In diesem Falle sind beide Konstanten ≤ 0 und endlich, und man erhält wegen

$$\frac{u(x)}{u_2(x)} \leq L\left(\sigma, \frac{u}{u_2}\right)$$

die Ungleichung

$$\frac{u(x)}{u_2(x)} \leq C_2 + C_1 \frac{u_1(x)}{u_2(x)} ,$$

d.h.

$$u(x) \leq C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) . \tag{3. 21}$$

Sind $C_1, C_2 < 0$, so liegt hier eine Verschärfung der Ungleichung $u(x) \leq 0$ vor. Sämtliche hier bewiesene Sätze gelten in entsprechender Form ($\geq$ anstelle $\leq$ und inf statt sup), wenn man u superharmonisch in G, *d. h.* $u \in A'[G]$ voraussetzt. Wir kommen in 6 darauf zurück.

4. **Verallgemeinerung eines Satzes von Phragmén und Lindelöf.** Es bedeute C_n die offene Einheitskugel in $\boldsymbol{R}^n$, *d. h.* die Punktmenge $\{x : \| x \| < 1\}$. Wir legen die Potentialgleichung (1. 6) zugrunde und beachten, daß die Funktion

(4. 1) $$u_1(x)=\begin{cases}\log \|x\|^{-1} & (n=2)\\ \dfrac{1}{n-2}\|x\|^{-(n-2)} & (n>2)\end{cases}$$

in $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ der Differentialgleichung (1. 6) genügt. Die Anwendung des Satzes 3 mit den Funktionen $u_1(x)+$ geeignete Konstante, $u_2=1$ führt ohne weiteres zu den Sätzen von HADAMARD.
Hat die Differentialgleichung (1. 2) eine Grundlösung $l=[l(x, a)]$ in der Umgebung eines Punktes a von $\boldsymbol{R}^n$ [8], so führt die Wahl $u_1=l$ und u_2=reguläres Integral von (1. 2) in der Umgebung von a, zu einem Satz vom Hadamardschen Typus.

Eine Reihe von Sätzen, die sämtlich Spezialfälle der Sätze 4 und 5 (Sätze vom Phragmén-Lindelöfschen Typus) sind, erhält man, wenn man die Funktionen

(4. 2) $$h(x, x_0)=\frac{1-\|x\|^2}{\|x-x_0\|^n} \qquad (\|x_0\|=1)$$

zugrundelegt, die in C_n der Differentialgleichung (1. 6) genügen.

Folgender Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 4.

SATZ 6. *Es sei x_0 ein (fester) Punkt des Randes Γ von C_n und u eine in C_n subharmonische Funktion, welche der Bedingung*

(4. 3) $$\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$$

genügt, sofern x innerhalb jeder Menge

(4. 4) $$O_\sigma^\infty=\{x : \sigma< h(x, x_0)< +\infty\}$$

gegen x_0 konvergiert. Man definiere Γ_σ durch die Gleichung

(4. 5) $$\Gamma_\sigma=\{x : h(x, x_0)=\sigma, \sigma\in\ ]0, +\infty[\}$$

und setze

(4. 6) $$L(\sigma, u)=\sup_{x\in\Gamma_\sigma} u(x)\ .$$

Dann ist L eine konvexe Funktion von σ in $]0, +\infty[$.
Gilt darüber hinaus die Ungleichung

(4. 7) $$\overline{\lim_{x\to x_1}}\, u(x)\leq 0 \qquad (x_1\in\Gamma-\{x_0\})\ ,$$

wobei Γ der Rand von C_n ist, so gilt

(4. 8) $$u(x)\leq C_0 h(x, x_0)$$

in C_n *mit*

$$C_0 = \lim_{\sigma \to +\infty} \left\{ \sup_{x \in \Gamma_\sigma} \frac{u(x)}{h(x, x_0)} \right\} \tag{4. 9}$$

Der Beweis dieses Satzes kann ohne weiteres nach dem Muster des Beweises des Satzes 4 sowie der Entwicklungen von 2 vom Leser selbst erbracht werden. Nachfolgender Satz kann als die wichtigste Anwendung des Satzes 5 angesehen werden:

SATZ 7. *Die Funktion u sei in C_n subharmonisch und x_0 ein fester Punkt des Randes Γ von C_n. Ferner sei u subharmonisch in C_n und genüge dort der Ungleichung*

$$\overline{\lim_{x \to x_1}}\, u(x) \leq 0 \tag{4. 10}$$

für jeden Punkt x_1 von $\Gamma \neq x_0$. Man setze

$$\omega(x) = \frac{\| x + x_0 \|^n}{\| x - x_0 \|^n} = \frac{h(x, x_0)}{h(x, -x_0)}\ , \tag{4. 11}$$

und definiere Γ_σ durch die Gleichung

$$\Gamma_\sigma = \left\{ x : x \in C_n,\ \frac{\| x + x_0 \|}{\| x - x_0 \|} = \sigma,\ \sigma \in]0, +\infty[\right\}\ . \tag{4. 12}$$

Setzt man dann

$$L(\sigma, u) = \sup_{x \in \Gamma_\sigma} \left\{ u(x) \frac{\| x + x_0 \|^n}{1 - \| x \|^2} \right\} = \sup_{x \in \Gamma_\sigma} \left\{ \frac{u(x)}{h(x, -x_0)} \right\}\ , \tag{4. 13}$$

so hat $L(\sigma, u)$ die Eigenschaften:

(1) *$L(\sigma, u)$ ist endlich.*

(2) *L ist σ^n-konvex in $J =]0, +\infty[$.*

Der Beweis dieses Satzes erfordert eine Wiederholung des Beweises des Satzes 5 und wird hier nicht explizit angegeben[9].

Aus dem Satz 7 folgt unter Heranziehung der Ergebnisse von 3, daß die Grenzwerte

$$C(x_0) = \lim_{\sigma \to +\infty} \left\{ \sup_{x \in \Gamma_\sigma} \frac{u(x)}{h(x, x_0)} \right\} = \overline{\lim_{x \to x_0}} \left\{ \frac{u(x)}{h(x, x_0)} \right\} \tag{4. 14}$$

und

$$C(-x_0) = \lim_{\sigma \to 0} \left\{ \sup_{x \in \Gamma_\sigma} \frac{u(x)}{h(x, -x_0)} \right\} = \overline{\lim_{x \to -x_0}} \left\{ \frac{u(x)}{h(x, -x_0)} \right\} \tag{4. 15}$$

existieren (ein Ergebnis, das den Inhalt des klassischen Phragmén-Lindelöfschen Satzes als Spezialfall enthält), und daß (falls $C(x_0)$ endlich ist) die Ungleichung

$$u(x) \leq C(-x_0)h(x, -x_0) + C(x_0)h(x, x_0) \ ,$$

d.h.

$$u(x) \leq C(-x_0)\frac{1-\|x\|^2}{\|x+x_0\|^n} + C(x_0)\frac{1-\|x\|^2}{\|x-x_0\|^n} \tag{4. 16}$$

gilt.

Die Sätze 5 und 6 lassen sich insofern verallgemeinern, als man dort die Funktion $h(x, -x_0)$ durch $h(x, x_1)$ $(\|x_1\|=1,\ x_1 \neq x_0)$ ersetzen kann. Auch kann man anstelle C_n den Halbraum

$$H_n = \{x : x \in \boldsymbol{R}^n,\ \ x_1 > 0\} \tag{4. 18}$$

zugrunde legen und anstelle der Funktionen $h(x, x_0)$, $h(x, -x_0)$ die Funktionen x_1 bzw. $\frac{x_1}{\|x\|^{n-1}}$ nehmen. Der Leser findet die entsprechenden Entwicklungen an anderer Stelle (DINGHAS [6]) ausführlicher dargestellt.

5. **Heranziehung des Randverhaltens.** Die Entwicklungen der vorherigen Nummern können dazu verwendet werden, durch Heranziehung des Randverhaltens einer in C_n subharmonischen Funktion u die klassischen Aussagen über deren Anwachsen zu verschärfen.

DEFINITION 3. *Es sei u subharmonisch in C_n und genüge dort der Bedingung*

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, u(x) \leq 0 \tag{5. 1}$$

für jeden Punkt x_0 des Randes Γ von C_n. Wir setzen

$$-\alpha(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0}} \left\{\frac{u(x)}{h(x, x_0)}\right\} . \tag{5. 2}$$

Dann soll E (ausführlicher E_n) durch die Gleichung

$$E = \{x_0 : x_0 \in \Gamma,\ \ \alpha(x_0) > 0\} \tag{5. 3}$$

definiert werden.

Die Definition der Menge E für eine in C_n subharmonische Funktion, die dort der Bedingung

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, u(x) \leq M < +\infty \tag{5. 4}$$

genügt, lautet entsprechend.

SATZ 8. *Es sei u subharmonisch in C_n und genüge dort der Bedingung*

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, u(x) \leq 0 \tag{5. 5}$$

für jeden Punkt des Randes Γ von C_n. Dann gilt folgendes:

(1) *E ist leer, endlich oder abzählbar.*

(2) *Die Summe*

$$\sum_{y\in E} \alpha(y) \tag{5. 6}$$

ist (falls E abzählbar ist) konvergent.

(3) *Es gilt die Ungleichung*

$$u(x) \leq -\sum_{y\in E} \alpha(y)h(x, y) \qquad (x \in C_n)\ . \tag{5. 7}$$

Beweis. Es seien $y_1, \ldots\ldots, y_q$ q Punkte von E. Dann genügt

$$v(x) = u(x) + \sum_{k=1}^{q} \alpha(y_k)h(x, y_k)$$

der Ungleichung (5. 1) für jeden Punkt x_0 von Γ. Daraus folgt zunächst $v(x) \leq 0$ in C_n. Nun liefert eine leichte Abschätzung von $h(x, x_0)$ nach unten die Ungleichung

$$u(x) \leq -\frac{1-\| x \|^2}{(1+\| x \|)^n} \sum_{k=1}^{q} \alpha(y_k)\ . \tag{5. 8}$$

Diese Ungleichung hat wiederum zur Folge (da u generell $\not\equiv -\infty$ angenommen wird), dass jede der Mengen

$$\{y : y \in \Gamma,\ 0 < p \leq \alpha(y) \leq q < +\infty\} \tag{5. 9}$$

bei festen p, q höchstens endlich sein kann. Das beweist (1). Man schreibe jetzt $l(x)$ für die durch die Gleichung (4. 1) definierte Funktion $u_1(x)$ und definiere die Greensche Funktion $g(x, a)(\| a \| < 1)$ von C_n durch die Gleichung

$$g(x, a) = l(x-a) - l\left(\frac{a}{a-\| a \|^2 x}\right)\ . \tag{5. 10}$$

DEFINITION 4. *Es sei u subharmonisch in C_n. Dann soll für jedes $a \in C_n - \gamma(a)$ die Größe*

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\| x-a \| = r} \frac{u(x)}{l(x-a)} \right\} \tag{5. 11}$$

bedeuten.

Offenbar ist

$$-\gamma(a)=\lim_{r\to 0}\left\{\sup_{\|x-a\|=r}\frac{u(x)}{g(x,a)}\right\}. \tag{5. 12}$$

Daß der Grenzwert $-\gamma(a)$ existiert, ist eine Folgerung des klassischen Hadamardschen Satzes für subharmonische Funktionen in C_n und kann ohne Schwierigkeit auf Grund der Entwicklungen von 3 bewiesen werden.

Nachfolgender Satz sei hier ohne Beweis angeführt:

SATZ 9. *Es sei u subharmonisch in C_n und genüge dort der Bedingung*

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, u(x)\leq 0 \tag{5. 13}$$

für jeden Punkt x_0 des Randes Γ von C_n.

Man definiere die Teilmenge E_0 von C_n durch die Gleichung

$$E_0=\{a: a\in C_n,\ \gamma(a)>0\}. \tag{5. 14}$$

Dann gilt folgendes:

(1) *E_0 ist leer, endlich oder abzählbar.*

(2) *Die Summe*

$$\sum_{a\in E_0}\gamma(a)(1-\|a\|) \tag{5. 15}$$

ist (falls E_0 abzählbar ist) konvergent.

(3) *Es ist*

$$u(x)\leq -\sum_{a\in E_0}\gamma(a)g(x,a). \tag{5. 16}$$

Den Beweis dieses Satzes findet der Leser in meiner unter [5] zitierten Arbeit. Dort wird auch ein ausführlicher Beweis gegeben, daß man aus (5. 16) die Ungleichung

$$u(x)\leq -\frac{1}{q}\,\frac{1-\|x\|^q}{(1+\|x\|)^{2q}}\sum_{a\in E_0}\gamma(a)(1-\|a\|) \tag{5. 17}$$

mit $q=\max\{1, n-2\}$ ableiten kann.

Die Verbindung der Sätze 8 und 9 liefert unter der Voraussetzung (5. 13) die Ungleichung

$$u(x)\leq -\frac{1}{q}\,\frac{1-\|x\|^q}{(1+\|x\|)^{2q}}\sum_{a\in E_0}\gamma(a)(1-\|a\|)-\sum_{y\in E}\alpha(y)\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^n}. \tag{5. 18}$$

Diese liefert eine Verallgemeinerung eines Satzes von BLASCHKE[10] für holomorphe Funktionen in C_n, der in der nächsten Nummer besprochen wird.

6. Nochmals die Sätze von Phragmén-Lindelöf und Blaschke. Der Satz von Julia-Wolff-Carathéodory. Der Fall $n=2$ ist insofern interessant als die Zugrundelegung der durch den Punkt $z=\infty$ kompaktifizierten komplexen Ebene eine Reihe von Anwendungen der in 3, 4 und 5 bewiesenen Sätze gestattet. Hier sollen lediglich drei der in Frage kommenden Sätze behandelt werden.

Es bezeichne $z=x+iy(x, y$ reell) einen Punkt von C_2 und $w=[w(z)]$ eine in C_2 holomorphe Funktion mit der Eigenschaft

$$(6.1)\qquad \overline{\lim_{z\to\zeta}}\,|w(z)|\leq 1$$

für jeden Randpunkt $\zeta\neq 1$. Man setze

$$(6.2)\qquad \sigma=\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$$

und bezeichne bei gegebenem σ den Durchschnitt von C_2 mit der Kreisperipherie (6. 2) *durch Γ_σ. Wird dann*

$$(6.3)\qquad L=L(\sigma, w)=\sup_{z\in\Gamma_\sigma}\left\{\log|w(z)|\frac{|1+z|^2}{1-|z|^2}\right\}$$

gesetzt, so ist L endlich (DINGHAS [3]) *und im Sinne der Ungleichung* (2. 5) *konvex in bezug auf σ^2. Ferner existiert der Grenzwert*

$$(6.4)\qquad \lim_{\sigma\to+\infty}\left\{\sup_{z\in\Gamma_\sigma}\left(\log|w(z)|\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\right)\right\}$$

und ist entweder gleich $+\infty$ oder gleich einer endlichen Zahl.

Dieses Ergebnis stellt lediglich eine Umformulierung des klassischen Phragmén-Lindelöfschen Satzes dar. Dessen Verallgemeinerung auf Punktmengen (auf Γ) von der Kapazität Null stößt auf keine wesentlichen Schwierigkeiten. Die in 5 für jedes $n\geq 2$ bewiesenen Sätze 8 und 9 führen im vorliegenden Fall zu dem Satz:

SATZ 10. *Die (nichtkonstante) Funktion w sei holomorph in C_2 und genüge der Ungleichung* (6. 1). *Es bezeichne E_0 die Menge der Nullstellen a von w in C_2 und E die (höchstens abzählbare) Menge der Randpunkte ζ von C_2 mit der Eigenschaft*

$$(6.5)\qquad -\alpha(\zeta)=\overline{\lim_{z\to\zeta}}\left\{\log|w(z)|\frac{|\zeta-z|^2}{1-|z|^2}\right\}>0.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$(6.6) \qquad |w(z)| \leq \prod_{a \in E_0} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \cdot \exp \left\{ -\sum_{\zeta \in E} \alpha(\zeta) \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \right\} .$$

Wegen

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1-|a|)(1-|z|) \right\} ,$$

kann (DINGHAS [5]) diese Ungleichung auch in der Form

$$(6.7) \qquad |w(z)| \leq \exp \left\{ -\frac{A}{2}(1-|z|) \right\}$$

mit

$$A = \sum_{a \in E_0} (1-|a|) + \sum_{\zeta \in E} \alpha(\zeta)$$

geschrieben werden. Daß A endlich sein muß, ist mit Rücksicht auf die gemachte Voraussetzung, $w \neq$ Konstante, selbstverständlich und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.
Der Fall einer in C_n superharmonischen Funktion, die für jeden Randpunkt $x_1 \neq x_0$ $(||x_1|| = ||x_0|| = 1)$ von C_n der Ungleichung

$$(6.8) \qquad \varliminf_{x \to x_1} u(x) \geq 0$$

genügt, führt durch Heranziehung der Funktion $-u$ zu einigen Sätzen, von denen wohl der interessanteste der klassische Satz von Julia-Wolff-Carathéodory sein dürfte.

SATZ 11. *Es sei u superharmonisch in C_n und genüge dort der Ungleichung* (6.8). *Man definiere ω und Γ_σ durch* (4. 11) *bzw.* (4. 12) *und setze*

$$(6.9) \qquad D(\sigma, u) = \inf_{x \in \Gamma_\sigma} \left\{ u(x) \frac{||x+x_0||^n}{1-||x||^2} \right\} .$$

Dann ist D im Sinne der Ungleichung

$$(6.10) \qquad D \geq D_1 \frac{\sigma_2^n - \sigma^n}{\sigma_2^n - \sigma_1^n} + D_2 \frac{\sigma^n - \sigma_1^n}{\sigma_2^n - \sigma_1^n}$$

konkav in bezug auf σ^n, und es gilt die Ungleichung

$$(6.11) \qquad u(x) \geq D(x_0) \frac{1-||x||^2}{||x-x_0||^n}$$

mit

$$D(x_0)=\lim_{\sigma\to+\infty} D(\sigma, u) \qquad (0\leq D(x_0)<+\infty) \text{ .}$$

Die Heranziehung der in C_2 holomorphen Funktion w, die dort der Ungleichung (6. 1) genügt, führt, indem man u gleich

$$\frac{1-|w|^2}{|\zeta-w|^2} \qquad (\zeta \text{ fest}, \ |\zeta|=1)$$

nimmt, direkt zu dem Julia-Wolff-Carathéodoryschen Satz. In der Tat liefert (6. 11) die Ungleichung

$$\frac{1-|w(z)|^2}{|\zeta-w(z)|^2}\geq D(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \tag{6. 12}$$

mit $0\leq D(\zeta)<+\infty$. Die Bedingungen dafür, daß $D(\zeta)>0$ ist (die eigentlich den Inhalt des Satzes von JULIA-WOLFF-CARATHÉODORY ausmachen), werden uns hier insofern nicht beschäftigen, als die Arbeit von CARATHÉODORY, sofern man (6. 12) zugrundelegt[11)], das gesamte Beweismaterial in großer Ausführlichkeit liefert.

7. **Offene Fragen.** Die in den Nummern 4, 5 und 6 gegebenen Anwendungen der allgemeinen Sätze 3, 4 und 5 könnten vermehrt werden, wenn man neben dem Nachweis der Existenz einer Grundlösung von (1. 2) noch den Existenzbeweis einer der Evans-Selbergschen Kapazitätsfunktion von (1. 6) entsprechenden Funktion von (1. 2) erbringen könnte. Dabei würde es sich um Lösungen von (1. 2) in G handeln, die bei Annäherung an eine kompakte Teilmenge K des Randes Γ von G gegen $+\infty$ strebt, während sie auf $\Gamma-K$ die Randwerte Null haben. Die vorhin zitierte Note von de la Vallée Poussin sei hier nochmals erwähnt. Selbstverständlich braucht man, um konkretere Resultate zu erzielen, nicht bloß die Existenz solcher Funktionen zu erbringen, sondern noch deren ausdrucksmäßige Beherrschung. Zur Zeit könnte man solche Überlegungen höchstens für die von PICARD (PICARD [1]) erstmalig studierten partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus in der kanonischen Form

$$\Delta u+\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k}+cu=0$$

mit analytischen Koeffizienten und für die Dimension $n=2$ anstellen[12)]. Im allgemeinen Fall jedoch sind die Schwierigkeiten, auf die man schon bei der Konstruktion der Greenschen Funktion stößt, so groß, daß die Hoffnung eines weiteren Vordringens auf diesem Wege mehr oder weniger gering erscheint.-

Fußnoten

1) Zur allgemeinen Orientierung vgl. man COURANT [1], S. 320 ff.
2) Courant [1], S. 326.
3) Diesse Fassung des HOPFSCHEN Maximumprinzips ist schärfer als die entsprechende Formulierung bei COURANT (COURANT [1], S. 326).
4) Die hier zugrundegelegte Definition der subharmonischen Funktion ist allgemeiner als diejenige bei COURANT (COURANT [1], S. 342).
5) Für die Differentialgleichung (1.6) sowie für sämtliche elliptischen Differentialgleichungen mit $c=0$ kann als u_2 die Konstante 1 genommen werden.
6) DE LA VALLÉE POUSSIN [1].
7) Die Literatur über den Phragmén-Lindelöfschen Satz ist sehr groß. Was der Leser an Zusammenhängen braucht, findet er in: DINGHAS [1], [3], [4] und [6].
8) Zur Begriffsbildung vgl. man neben COURANT (COURANT [1]) noch das historisch wertvolle Buch von PICARD (PICARD [1]). Allgemein kann man jede Lösung von (1.2) in einer punktierten Umgebung von a, die bei Annäherung an a gegen $+\infty$ konvergiert, als eine Grundlösung von (1.2) bezeichnen. Diese ist dann bis auf eine multiplikative Konstante definiert.
9) Man vgl. DINGHAS [2], [4] und [6].
10) Man vgl. BLASCHKE [1].
11) Neben CARATHÉODORY [1] vgl. man JULIA [1] und WOLFF [1], [2]. Darüber hinaus auch TSUJI [1] und [2] sowie DINGHAS [1] und [2].
12) Man vgl. etwa PICARD [1] sowie COURANT [1].

Literatur

BLASCHKE, W.: [1] Über eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. Leipz. Ber. **67,** 1915, 194–200.

CARATHÉODORY, C.: [1] Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wissensch. Phys.-Math. Klasse, *1929, 34–54.*

COURANT, R., HILBERT, D.: [1] Methods of Mathematical Physics, Vol. II, (Partial Differential Equations), Interscience Publishers, New-York-London, 1962.

DINGHAS, A.: [1] Über das Phargmén-Lindelöfsche Prinzip und den Julia-Carathéodoryschen Satz. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse, 1938, 32–48.

DINGHAS, A.: [2] Über positive harmonische Funktionen in einem Halbraum. Math. Zeitschr. **46,** 1940, 559–570.

DINGHAS, A.: [3] Über das Anwachsen einiger Klassen von subharmonischen und verwandten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 336/1, 1963, 27 S.

DINGHAS, A.: [4] Über einige Konvexitätsfragen bei partiellen Differentialgleichungen vom Sturmschen Typus. Math. Ann. **155,** *1964, S. 397–421.*

DINGHAS, A.: [5] Über den Einfluß von Unendlichkeitsstellen auf das Wachstum subharmonischer Funktionen im E^n. Monatsh. f. Math. **68,** 1964, 289–306.

DINGHAS, A.: [6] Über einige Konvexitätssätze für die Mittelwerte von subharmonischen Funktionen. Journ. d. Math. pures et appl. (9), **44,** 1965, S. 223–247.

JULIA, G.: [1] Extension d'un Lemme de Schwarz, Acta Math. **42,** 1920. 349–355.

PICARD, E.: [1] Leçons sur quelques types simples d'équations aux derivées partielles.

Paris: Gauthier-Villars, 1927.
TSUJI, M.: [1] On a positiv harmonic function in a half plane. Jap. Journ. Math. **15,** 1939, 277–285.
TSUJI, M.: [2] Potential Theory in Modern Functions Theory. Tokyo: Maruzen Co., Ltd. 1959.
VALLÉE POUSSIN, CH. de la: [1] Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans une aire et nulle en tout autre point du bord sauf un. Annal. Soc. Bruxelles, A **53,** 113–122.
WOLFF, J.: [1] Démonstration d'un théorème sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage du'n point frontière. Proc. Akad. Amsterdam **38,** 1935, 46–50.
WOLFF, J.: [2] Sur la réprésentation conforme des bandes. Comp. Math. 1, 1935, 217–222.