SUBNORMALE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$\mathbf{w'' + p(e^z)w' + q(e^z)w = 0}$

VON H. WITTICH IN KARLSRUHE

To Professor Kiyoshi Noshiro on the occasion of his 60th birthday

In der Differentialgleichung $w''+a_1(z)w'+a_0(z)w=0$ seien die Koeffizienten $a_j(z)$ ganze Funktionen. Dann ist jede Lösung $w(z)$ eine ganze Funktion und genau dann von endlicher Ordnung, wenn die Koeffizienten Polynome sind. In diesem Fall gilt für die Ordnung

$$\lambda(w) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log_2 M(r, w)}{\log r} \quad \text{die Beziehung } \lambda(w)=m/2,\ m \geqq 0 \text{ ganzzahlig.}$$

Es gibt höchstens zwei verschiedene Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1>\lambda_2\geqq 0$. Lösungen $w(z)$ mit $\lambda(w)=\lambda_2$ kommen nur vor, wenn eine passend transformierte Differentialgleichung Polynomlösungen besitzt. Dann sind λ_1 und λ_2 ganze Zahlen und jede Lösung mit der kleineren Ordnung λ_2 hat Null als Picardschen Ausnahmewert [2]. Ist $a_1(z)$ ein Polynom und $a_0(z)$ ganz transzendent, dann ist jede Lösung $w(z) \not\equiv 0$ von der Ordnung ∞, während bei transzendentem $a_1(z)$ und ganzem $a_0(z)$ neben Lösungen unendlicher Ordnung auch solche von endlicher Ordnung vorkommen können. Das zeigen die beiden Differentialgleichungen

$$w''+e^z w'-e^z w=0 \qquad \text{mit der Lösung } w(z)=e^z+1,$$
$$w''+e^z w'-w=0 \qquad \text{mit der Lösung } w(z)=e^z-1.$$

Beide Differentialgleichungen sind Spezialfälle von $w''+p(e^z)w'+q(e^z)w=0$, wo $p(t)$ und $q(t)$ Polynome in t sind. Auf diese Differentialgleichung beziehen sich die folgenden Bemerkungen.

1. Nach M. Frei [1] besitzen die Differentialgleichungen

$$(*) \qquad w''+e^{-z}w'+\alpha w=0,\ \alpha \text{ konst.} \neq 0,$$

Received June 22, 1966.

genau dann eine Lösung endlicher Ordnung, wenn $\alpha=-n^2$ gilt, $n=1,2,\ldots\ldots$ Zum Beweis dieser Behauptung wird zunächst mit Hilfe der Wimannschen Theorie des Zentralindex gezeigt, daß eine solche Lösung $w_0(z)$ höchstens vom Mitteltypus der Ordnung 1 ist. Dann wird im zweiten Schritt mit Hilfsmitteln der Wertverteilung die Behauptung $\alpha=-n^2$ bewiesen und weiter gezeigt, daß $w_0(z)$ ein Polynom vom Grad n in e^z ist. Dieser zweite Beweisschritt kann auch so erledigt werden.

Es sei $w(z)$ eine Lösung von (*), für die $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log M(r,w)}{r}\leq\kappa<\infty$ gilt. Dann ist $f(s)=\int_0^\infty e^{-sz}w(z)dz$ holomorph in $|s|>\kappa$, $\lim\limits_{s\to\infty}f(s)=0$. Nach den Regeln über die Abbildung der Differentiation bei Laplacetransformation geht (*) in die Bildgleichung

$$(s^2+\alpha)f(s)+(s+1)f(s+1)-(s+1)w(0)-w'(0)=0 \tag{**}$$

über, gültig für $\Re s>\sigma_0$ mit passendem σ_0. Mit dieser Funktionalgleichung lässt sich $f(s)$ in eine Halbebene $\Re s>\sigma_1$ fortsetzen, die den Kreis $|s|\leq\kappa$ enthält. Diese Fortsetzung zeigt, daß $f(s)$ in $\Re s>\sigma_1$ bis auf endlich viele Pole holomorph ist. $f(s)$ ist also eine rationale Funktion, die in $s=\infty$ verschwindet. Es sei s_0 eine der Polstellen mit kleinstem Realteil. Aus

$$((s-1)^2+\alpha)f(s-1)+s\cdot f(s)=sw(0)+w'(0)$$

folgt für $s\to s_0$, da $f(s-1)$ bei s_0 holomorph ist, $s_0=0$. Diese Polstelle ist einfach. Aus der Funktionalgleichung folgt dann, daß $f(s)$ nur einfache Pole hat, die bei $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=2,\ldots\ldots$ liegen. Da $f(s)$ nur endlich viele Polstellen hat, muß $\alpha=-n^2$ sein. Wegen $f(\infty)=0$ ist $f(s)$ von der Form

$$f(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s-1}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{s-n},$$

also

$$w(z)=a_0+a_1e^z+\cdots\cdots a_ne^{nz}.$$

Ist in (*) $\alpha=-n^2$, dann lassen sich im Ansatz

$$w(z)=a_0+a_1e^z+\cdots\cdots+a_ne^{nz}$$

die Koeffizienten a_j so bestimmen, daß $w(z)$ die Differentialgleichung (*) löst. Durch Vorgabe von $a_0\neq 0$ sind die restlichen Koeffizienten eindeutig festgelegt.

2. In der Differentialgleichung

$$(D) \qquad w''+p(e^z)w'+q(e^z)w=0$$

sei $p(e^z)$ bzw. $q(e^z)$ ein Polynom vom Grad α bzw. β in e^z. Ist $w_1(z)$, $w_2(z)$ ein Fundamentalsystem von (D), dann folgt mit $W(z)=w_1\cdot w_2\left(\frac{w_2'}{w_2}-\frac{w_1'}{w_1}\right)$

$$\begin{aligned} m(r,W) &\leq m(r,w_1)+m(r,w_2)+m\left(r,\frac{w_1'}{w_1}\right)+m\left(r,\frac{w_2'}{w_2}\right)+\log 2 \\ &\leq m(R,w_1)+m(R,w_2)+4\overset{+}{\log}\, m(R,w_1)+4\overset{+}{\log}\, m(R,w_2)+A\overset{+}{\log}\, R+B \\ &=(1+(R))m(R,w_1)+(1+(R))m(R,w_2) \end{aligned}$$

für alle $r>r_0$ mit $R=r+1$. Mit (r) wird immer eine Grösse bezeichnet, die für $r\to\infty$ gegen Null konvergiert. Zur Abschätzung von $m(r,W)$ nach unten wird der Zusammenhang

$$W(z)=W(0)\exp\left(-\int_0^z p(e^z)dz\right)=C_1\exp(b_0e^{\alpha z}-b_1e^{(\alpha-1)z}-\cdots-b_{\alpha-1}e^z-b_\alpha z)$$

benützt. Aus

$$f_0(z)=C_2W(z)e^{b_\alpha z}\prod_{j=1}^{\alpha-1}f_j(z),\quad f_j(z)=\exp b_je^{(\alpha-j)z},$$

folgt

$$m(r,f_0)\leq m(r,W)+\sum_{j=1}^{\alpha-1}m(r,f_j)+C_3\log r+C_4$$

und wegen $m(r,f_j)\leq\log M(r,f_j)\leq|b_j|\,e^{(\alpha-j)r}$

$$m(r,f_0)\leq m(r,W)+C_5e^{(\alpha-1)r},\ r>r_0.$$

Weiter ist wegen

$$m(r,f_0)\geqq\log\frac{M(r-1,f_0)}{2r-1}\ \text{und}\ \log M(\rho,f_0)\geq$$

$$\log M(\rho,\exp e^{\alpha z+\beta_0})\geq e^{\alpha\rho-|\beta_0|}$$

$$m(r,f_0)\geq C_6\frac{e^{\alpha r}}{r}.$$

Für alle hinreichend großen r gilt also

$$K\frac{e^{\alpha r}}{r}(1+(r))\leq(1+(R))m(R,w_1)+(1+(R))m(R,w_2)$$

oder wegen $R=r+1$

$$\alpha \leq \varliminf_{r\to\infty}\left(\frac{\overset{+}{\log}\, m(r, w_1)}{r}+\frac{\overset{+}{\log}\, m(r, w_2)}{r}\right). \tag{1}$$

Ist $\alpha=0$, dann folgt für jede Lösung $w(z) \not\equiv 0$ aus

$$q(e^z)=-\frac{w''}{w}-p(e^z)\frac{w'}{w} \text{mit } \rho=r-1$$

$$m(\rho, q(e^z)) \leq 2m\left(\rho, \frac{w'}{w}\right)+m\left(\rho, \frac{w''}{w'}\right)+K_1$$

$$\leq 12 \log m(r, w)+4 \overset{+}{\log}\, m\left(r, \frac{w'}{w}\right)+K_2 \overset{+}{\log}\, r+K_3$$

$$=12(1+(r))\log m(r, w), \qquad r>r_0.$$

Damit ergibt sich wegen $m(\rho, q(e^z))=\frac{\beta\rho}{\pi}(1+(\rho))$

$$\frac{\beta}{12\pi} \leq \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log m(r, w)}{r}. \tag{2}$$

Lösungen $w(z) \not\equiv 0$ von (D), die der Wachstumseinschränkung
$\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log m(r, w)}{r}=0$ genügen, heißen subnormale Lösungen.

(2) zeigt, daß für $\alpha=0$ (aber $\beta \geq 1$) keine subnormalen Lösungen von (D) möglich sind, während nach (1) für $\alpha \geq 1$ eine subnormale Lösung vorkommen kann. Weiter zeigt (1), daß zwei subnormale Lösungen linear abhängig sind. Wir werden sehen, daß jede subnormale Lösung $w(z) \not\equiv 0$ von (D) vom Mitteltypus der Ordnung 1 ist.

3. Mit $t=e^z$ und $w(z(t))=v(t)$ geht (D) über in

$$(D') \quad t^2v''+t(1+p(t))v'+\dot{q}(t)v=0; \; v'=\frac{dv}{dt}, \; v''=\frac{d^2v}{dt^2}.$$

$t=0$ ist, da $p(t)$ und $q(t)$ bei $t=0$ holomorph sind, eine Stelle der Bestimmtheit, während $t=\infty$ eine Unbestimmtheitsstelle ist. Sind ρ_1, ρ_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\rho(\rho-1)+(1+p(0))\rho+q(0)=0$, $\Re\rho_1 \leq \Re\rho_2$, dann hat (D') ein Fundamentalsystem der Form

$$v_1(t)=t^{\rho_1}a(t), v_2(t)=\delta v_1(t) \log t+t^{\rho_2}b(t).$$

$a(t), b(t)$ sind ganze Funktionen. Ist $\rho_1-\rho_2$ keine ganze Zahl, dann ist $\delta=0$; sonst kann δ von Null verschieden sein und darf dann gleich 1 gesetzt werden.

Im Falle $\rho_1=\rho_2$ ist $\delta\neq 0$. Es sei $0\leq \arg t<2\pi$ und m eine ganze Zahl. Dann gilt

$$v_1(e^{2\pi i m}\cdot t)=e^{2\pi i\, m\rho_1}\, t^{\rho_1}a(t)=\sigma_1{}^m v_1(t)$$

$$v_2(e^{2\pi i m}t)=e^{2\pi i m\rho_2}t^{\rho_2}b(t)=\sigma_2{}^m v_2(t) \qquad \text{für } \delta=0$$

$$v_2(e^{2\pi i m}t)=\sigma_1{}^m v_2(t)+\sigma_1{}^m v_1(t)\cdot 2\pi i m \qquad \text{für } \delta=1.$$

Daraus folgt mit $|t|=\rho$

$$\begin{aligned}&\overset{+}{\log}|v_1(e^{2\pi i m}t)|\leq p_1\,|m|+A_1\overset{+}{\log}\,\rho+\overset{+}{\log}\,M(\rho,a)+B_1\\ (3)\qquad &\\ &\overset{+}{\log}\,|v_2(e^{2\pi i m}t)|\leq p_2\,|m|+A_2\overset{+}{\log}\,\rho+\overset{+}{\log}\,|m|+2\overset{+}{\log}\,M(\rho,a)+\overset{+}{\log}\,M(\rho,b)+B_2.\end{aligned}$$

Die positiven Größen p_j, A_j und B_j sind unabhängig von ρ und m. Aus (3) folgt für eine beliebige Lösung $v(t)=c_1\cdot v_1(t)+c_2\cdot v_2(t)$ von (D')

$$(4')\qquad \overset{+}{\log}\,|v(e^{2\pi i m}t)|\leq p\,|m|+3\overset{+}{\log}\,M(\rho,a)+\overset{+}{\log}\,M(\rho,b)+\overset{+}{\log}\,|m|+A\overset{+}{\log}\,\rho+B.$$

Es sei nun $w(z)=v(t(z))$ eine Lösung von (D) und $M(r,w)=|w(\zeta)|$, $|\zeta|=r$. Mit $\zeta=\zeta_0+2m\pi i$, $0\leq\Im\zeta_0<2\pi$, ist $|m|\leq\dfrac{r}{2\pi}$ und $|e^{\zeta_0}|\leq e^r$. Nach (4′) ist dann

$$T(r,w)\leq\overset{+}{\log}\,M(r,w)\leq 3\overset{+}{\log}\,M(e^r,a)+\overset{+}{\log}\,M(e^r,b)+k_1\cdot r+k_2.$$

Daraus folgt, da die ganzen Funktionen $a(t)$, $b(t)$ höchstens von der Ordnung $\lambda=\max\left(\alpha,\dfrac{\beta}{2}\right)$ sind [3]

$$(4)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\log T(r,w)}{r}\leq\lambda=\max\left(\alpha,\frac{\beta}{2}\right).$$

4. Es sei nun $w_1(z)$ eine subnormale Lösung von (D), für die also $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log T(r,w_1)}{r}=0$ gilt. Dann ist $\alpha\geq 1$, und für jede von $w_1(z)$ linear unabhängige Lösung $w_2(z)$ ist nach (1) $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log T(r,w_2)}{r}\geq\alpha$ erfüllt.

Mit $w_1(z)$ ist auch $w(z)=w_1(z+2\pi i)$ eine subnormale Lösung von (D), wonach $w(z)=C\cdot w_1(z)$ gilt. Wir setzen $C=e^{2\pi i s}$, $0\leq\Re s<2\pi$, und bilden $y(z)=w(z)e^{-sz}$. Dann erhalten wir in $y_1(z)=w_1(z)e^{-sz}$ eine ganze Funktion mit der Periode $2\pi i$, die der Differentialgleichung

$$y''+(2s+p(e^z))y'+(s^2+sp(e^z)+q(e^z))y=0$$

genügt. Mit $t=e^z$, $y(z(t))=v(t)$ geht diese Differentialgleichung über in

$$(D'') \qquad t^2v''+t((2s+1)+p(t))v'+(s^2+sp(t)+q(t))v=0,\ v'=\frac{dv}{dt}.$$

Der subnormalen Lösung $w_1(z)$ von (D) entspricht eine in $0<|t|<\infty$ holomorphe Lösung $v_1(t)$ von (D''). Diese Lösung verhält sich rational in $t=0$, da $t=0$ Bestimmtheitsstelle von (D'') ist: $v_1(t)=t^n\cdot u(t)$. $u(t)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda(u)<\infty$. Da $u(t)$ selber eine ganze Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten ist, gilt

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\log M(\rho,u)}{\rho^\lambda}=\lim_{\rho\to\infty}\frac{\log|u(\tau)|}{\rho^\lambda}=k,\ 0<k<\infty,\ M(\rho,u)=|u(\tau)| \text{ mit } |\tau|=\rho,$$

also

$$k\rho^\lambda(1+(\rho))=\log M(\rho,u)\leq \overset{+}{\log}|y_1(z(\tau))|+C\overset{+}{\log}\rho.$$

Die Strecke $z=\log\rho+i\varphi$, $0\leq\varphi<2\pi$, ist im Kreis $|z|\leq\log\rho+2\pi$ enthalten. Daher gilt mit $\rho=e^r$

$$k\cdot e^{\lambda r}(1+(r))\leq\log M(r+2\pi,y_1)+C_1r,\ r>r_0.$$

Daraus folgt wegen $M(r,y_1)\leq e^{|s|r}M(r,w_1)$

$$(5) \qquad \lambda\leq\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,w_1)}{r},$$

also $\lambda(u)=0$. Das bedeutet, da $u(t)$ eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten löst, daß $u(t)$ ein Polynom sein muß. Aus dem Verhalten von $v_1(t)$ in $t=\infty$ folgt nach (D'') $\beta\leq\alpha$. Damit ergibt sich nach (1) und (4) für jede von der subnormalen Lösung $w_1(z)$ linear unabhängige Lösung $w(z)\not\equiv 0$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,w)}{r}=\alpha.$$

Für eine subnormale Lösung $w_1(z)$ von (D) gilt mit $\sigma=n+s$

$$w_1(z)=e^{\sigma z}(A_0+A_1e^z+\cdots\cdots+A_me^{mz}),\ A_0\cdot A_m\neq 0.$$

Dieser Lösung entspricht $v_1(t)=t^\sigma(A_0+A_1t+\cdots\cdots+A_mt^m)$ von (D'). Hat umgekehrt (D') eine Lösung $v_1(t)$ dieser Form, dann ist $w_1(z)=v_1(e^z)$ eine subnormale Lösung von (D). σ ist eine Wurzel der Gleichung $\sigma^2+p(0)\sigma+q(0)=0$. Für die Exponentialsumme

$$w_1(z)=\sum_{j=0}^{m} A_j e^{(\sigma+j)z}$$

lässt sich die Charakteristik angeben [4].

Es ist $$T(r, w_1)=\frac{|\sigma|+|\sigma+m|+m}{2\pi}\cdot r(1+(r)),\ \text{also}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r, w_1)}{r}=\frac{|\sigma|+|\sigma+m|+m}{2\pi}$$

Im Falle $\sigma=0$ ist der Defekt $\delta(w_1, 0)$ des Wertes Null gleich Null, während für $\sigma\neq 0$ $\delta(w_1, 0)$ positiv ist:

$$\delta(w_1, 0)=\frac{|\sigma|+|\sigma+m|-m}{|\sigma|+|\sigma+m|+m}.$$

Zusammengefaßt gilt der

SATZ: Die Differentialgleichung $w''+p(e^z)w'+q(e^z)w=0$ *hat genau dann eine subnormale Lösung* $w_1(z)$, *wenn die Differentialgleichung*

$$t^2\frac{d^2v}{dt^2}+t(1+p(t))\frac{dv}{dt}+q(t)v=0$$

eine multiplikative Lösung $v_1(t)=t^\sigma\cdot P_m(t)$ *zulässt, wo* $P_m(t)$ *ein Polynom ist.*
Ist

$$w_1(z)=\sum_{j=0}^{m} A_j e^{(\sigma+j)z}$$

subnormale Lösung, dann gilt für die Charakteristiken $T(r, w_1)$ *und* $T(r, w)$, $w(z)\not\equiv Cw_1(z)$,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r, w)}{r}=\alpha,\ \lim_{r\to\infty}\frac{T(r, w_1)}{r}=\frac{|\sigma|+|\sigma+m|+m}{2\pi}.$$

5. Für die Differentialgleichung $w''+\left(-\frac{1}{2}-2e^z\right)w'+\mu e^z w=0$, μ ein Parameter, lautet

$$(D')\qquad t^2v''+t\left(\frac{1}{2}-2t\right)v'+\mu t v=0.$$

Die charakteristische Gleichung $\sigma\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)=0$ hat die Wurzeln $\sigma_1=0$ und $\sigma_2=\frac{1}{2}$.

Lösungen $v_1(t)$, die zu subnormalen Lösungen $w_1(z)$ Anlass geben, existieren genau dann, wenn für $\sigma_1=0$ $\mu=2m$ und für $\sigma_2=\frac{1}{2}$ $\mu=2m+1$ ist, $m=1, 2, \cdots\cdots$. Die Differentialgleichung hat also genau dann subnormale Lösungen, wenn μ eine natürliche Zahl ist. Sie lauten für

$$\mu=2m \qquad w_1(z)=A_0+A_1e^z+\cdots+A_me^{mz}$$

$$\mu=2m+1 \qquad w_1(z)=e^{\frac{z}{2}}(B_0+B_1e^z+\cdots+B_me^{mz}).$$

Die von M. Frei betrachtete Differentialgleichung

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2}+e^{-\zeta}\frac{dW}{d\zeta}-c^2W=0 \quad \text{geht mit} \quad \zeta=-z,$$

$W(\zeta(z))=w(z)$ über in $w''-e^zw'-c^2w=0$. Aus $t^2v''+t(1-t)v'-c^2v=0$ folgt $\sigma=\pm c$. Diese Differentialgleichung (D') hat genau dann eine Lösung $v_1(t)=t^\sigma P_m(t)$, wenn $\sigma=-m, m=1, 2,\cdots\cdots$ ist. Für $c^2=m^2$ ist

$$w_1(z)=e^{-mz}P_m(e^z) \text{ und } W(\zeta)=C_0+C_1e^\zeta+\cdots\cdots+C_me^{m\zeta}.$$

Die Differentialgleichung $w''-e^zw'-c^2w=0$ geht mit $t=e^z$, $w(z(t))=v(t)=t^c\cdot y(t)$ über in eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$ty''+(2c+1-t)y'-cy=0.$$

Für $c=\mu=1, 2, \cdots\cdots$ ist

$$y_1(t)=t^{-2\mu}{}_1F_1(-\mu, 1-2\mu, t), \; y_2(t)=e^t\sum_{j=1}^{\mu}\frac{A_j}{t^{\mu+j}}$$

ein Fundamentalsystem und daher

$$w_1(z)=P_\mu(e^{-z}), \; w_2(z)=e^{-z}Q_\mu(e^{-z}) \exp e^z$$

ein solches von $w''-e^zw'-\mu^2w=0$.

Für $\mu=0$ ist $w_1(z)\equiv 1$, $w_2(z)=z+\sum_1^\infty\frac{e^{nz}}{n\cdot n!}$ ein Fundamentalsystem.

Aus diesen Darstellungen ist zu ersehen, daß für $c=1, 2, \cdots\cdots$ jede Lösung von $w''-e^z\cdot w'-c^2w=0$ periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist. Hat umgekehrt diese Differentialgleichung auch nur eine periodische Lösung $w(z)\equiv w(z+2\pi i) \not\equiv C$, dann folgt $c=1, 2, \cdots\cdots$.

Literaturverzeichnis:

[1] Frei, Margit: Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w''+e^{-z}w'+$ konst.$\cdot w=0$. Comment. Math. Helv. **36** (1962).

[2] Pöschl, K.: Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Annalen **125** (1953).

[3] Wittich, H.: Zur Theorie linearer Differentialgleichungen im Komplexen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. Math. **379** (1966).

[4] Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Springer-Verlag 1955.

Mathem. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe