

## SUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION CONDITIONNELLEMENT SOUS-MEDIANS

MASAYUKI ITÔ

### 1. Introduction

Dans toute la suite  $X$  désignera un groupe abélien localement compact et séparé, et  $\xi$  désignera la mesure de Haar sur  $X$ . Pour simplifier la discussion, on supposera toujours que  $X$  est à base dénombrable.

On rappelle qu'un noyau de convolution  $N$  sur  $X$  est une mesure de Radon positive dans  $X$  et que, pour une mesure (de Radon) réelle  $\mu$  dans  $X$ , le  $N$ -potentiel de  $\mu$  est la convolution  $N*\mu$  dès qu'elle est définie au sens des mesures.

Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe vaguement continu associé au noyau  $N_0$ . On dit qu'un noyau de convolution  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  si  $\lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{\alpha_t - \varepsilon}{t} \right) * N$  a un sens en dehors de l'origine pour la topologie vague et s'il définit une mesure positive en dehors de l'origine, où  $\varepsilon$  désigne la mesure d'unité à l'origine.

En particulier, soit  $X = \mathbb{R}^n$  (l'espace euclidien à dimension  $n \geq 1$ ) et supposons qu'il existe un laplacien généralisé  $T$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $T*N_0 = -\varepsilon$  (au sens des distributions). Alors  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  si et seulement si, pour tout  $t > 0$ ,  $N*\alpha_t$  a un sens et  $T*N \geq 0$  au sens des distributions en dehors de l'origine.

Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt sur  $X$  et  $N$  un noyau de convolution. On connaît que s'il existe un noyau de convolution de Hunt  $N'$  tel que  $N*N' = N_0$ , alors  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  et  $N = 0(N_0)^{(1)}$  (cf. [5]).

Received March 5, 1976.

(1) On écrit  $N=0(N_0)$  si, pour une fonction finie et continue  $f$  dans  $X$  à support compact quelconque, il existe une fonction finie et continue  $g$  dans  $X$  à support compact telle que  $N*f \leq N_0*g$  en dehors d'un certain compact de  $X$ .

Il est plus important si son inverse a lieu. Le but de cette note est d'affirmer que cela a lieu. Si  $X = \mathbf{R}^n$  et  $N_0$  est le noyau newtonien, cela est déjà connu (cf. [3]).

Pour le montrer, on utilisera les deux résultats suivants :

(1) Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution sur  $X$ . Si  $N_1$  satisfait au principe transitif de domination par rapport à  $N_2$  et si  $N_1$  est injectif<sup>(2)</sup>, alors  $N_1$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_2$ .

(2) Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $N$  un noyau de convolution. Si  $N \neq 0$  et si  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$ , alors  $N$  satisfait au principe transitif de domination par rapport à  $N_0$ .

## 2. Le principe transitif de domination et le balayage relatif

On notera toujours :

$L_2 = L_2(X)$  l'espace hilbertien usuel des fonctions réelles et carré  $\xi$ -sommables dans  $X$  ;

$M_K = M_K(X)$  l'ensemble formé par toutes les fonctions réelles,  $\xi$ -mesurables et bornées dans  $X$  à support compact ;

$C_K = C_K(X)$  l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans  $X$  à support compact ;

$L_2^+, M_K^+$  et  $C_K^+$  leur sous-ensembles des fonctions  $\geq 0$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles et  $\xi$ -mesurables dans  $X$ . Dans cette note, on utilise souvent la notation  $f \geq g$  (resp.  $f = g$ ) si  $f \geq g$  (resp.  $f = g$ )  $\xi$ -p.p. sur  $X$ , où  $\xi$ -p.p. signifie "presque partout pour  $\xi$ ".

Soit  $N$  un noyau de convolution sur  $X$ . Pour une fonction localement  $\xi$ -sommable  $f$  dans  $X$ , on désigne par  $Nf$  la densité de  $N*(f\xi)$  par rapport à  $\xi$  dès que  $N*(f\xi)$  a un sens.

*Remarque 1.* Pour  $f \in M_K$  quelconque,  $Nf$  a un sens et elle est localement bornée.

**PROPOSITION 1.** *Soit  $N$  un noyau de convolution. Pour  $f \in L_2$  à support compact quelconque,  $Nf$  a un sens et elle est localement carré  $\xi$ -sommable. Pour un compact  $F$  de  $X$  quelconque, il existe une constante  $A(F) > 0$  telle que, quelle que soit  $f$  une fonction de  $L_2$  portée par  $F$ ,*

(2) On dit que  $N$  est injectif si, pour une mesure réelle  $\mu$  quelconque,  $\mu = 0$  dès que  $N*\mu$  a un sens et que  $N*\mu = 0$  dans  $X$ .

$$\int_F |Nf|^2 d\xi \leq A(F) \int_F |f|^2 d\xi. \tag{2.1}$$

Voir, par exemple, le lemme 1.4 dans [4]. Pour un fermé  $F$  de  $X$ , on désigne par  $L_2(F)$  le sous-espace de  $L_2$  des fonctions portées par  $F$ .

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $F$  un compact de  $X$ . Pour  $f \in L_2$  à support compact, on pose  $(Nf)_F = Nf$  sur  $F$  et  $(Nf)_F = 0$  dans  $\mathcal{C}F$ . Alors l'application  $L_2(F) \ni f \rightarrow (Nf)_F \in L_2(F)$  est fortement continue et faiblement continue dans  $L_2$ .*

La continuité forte résulte de (2.1) et la continuité faible résulte de l'égalité  $\int (Nf)_F g d\xi = \int f(\check{N}g)_F d\xi$  pour toutes  $f, g \in L_2(F)$  et de  $(\check{N}g)_F \in L_2(F)$ .

Pour un noyau de convolution  $N$ , on note  $\check{N}$  le noyau de convolution défini par  $\int f d\check{N} = \int f(-x) dN(x)$  pour toute  $f \in C_X$  et on l'appelle le noyau adjoint de  $N$ .

**DÉFINITION 1.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. On dit que  $N_1$  satisfait au principe transitif de domination par rapport à  $N_2$  (noté simplement  $N_1 \sqsubset N_2$ ) si, quelle que soient  $f, g \in M_K^+$ ,  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$  dès que  $N_1 f \leq N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(f\xi)$ .

Pour une mesure réelle  $\mu$  dans  $X$ ,  $\text{supp}(\mu)$  désigne le support de  $\mu$ .

**PROPOSITION 2.** *Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. Alors  $N_1 \sqsubset N_2$  et  $\check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$  sont équivalents.*

*Démonstration.* Evidemment il suffit de montrer que  $N_1 \sqsubset N_2 \Leftrightarrow \check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$ . Supposons que, pour  $f, g \in M_K^+$ ,  $\check{N}_1 f \leq \check{N}_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(f\xi)$ ; alors  $N_1 \check{f} \leq N_1 \check{g}$   $\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(\check{f}\xi)$ , où  $\check{f}(x) = f(-x)$ . D'après  $N_1 \sqsubset N_2$ , on a  $N_2 \check{f} \leq N_2 \check{g}$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ , d'où  $\check{N}_2 f \leq \check{N}_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . On voit ainsi que  $\check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$ , et la démonstration est complète.

Considérons une condition commode pour le principe transitif de domination. La proposition suivante est analogue au théorème 1 dans [2].

**PROPOSITION 3.** *Soient  $N_1 \neq 0$  et  $N_2 \neq 0$  deux noyaux de convolution. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $N_1 \sqsubset N_2$ .
- (2) Pour toute constante  $c > 0$ ,  $N_1 + c\xi \sqsubset N_2$ .

(3) Pour  $f, g \in C_K^+$  quelconques,  $N_2 * f \leq N_2 * g$  partout sur  $X$  dès que  $N_1 * f \leq N_1 * g$  sur  $\text{supp}(f)$ .

(4) Pour  $f, g \in C_K^+$  quelconques et pour une constante  $c > 0$  quelconque,  $N_2 * f \leq N_2 * g$  partout sur  $X$  dès que  $N_1 * f + cf \leq N_1 * g + cg$  sur  $\text{supp}(f)$ .

On désigne aussi par  $\text{supp}(f)$  le support de  $f$ . Pour montrer la proposition 3, on prépare le lemme suivant:

**LEMME 1.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution sur  $X$ ; supposons que  $N_1 \sqsubset N_2$ . Si, pour  $f, g \in M_K^+$ ,  $N_1 f \leq N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) > 0\}$ , alors  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ .

Montrons d'abord le lemme 1. On peut choisir une suite croissante  $(F_n)_{n=1}^\infty$  de compacts de  $X$  telle que  $F_n \subset \{x \in X; N_1 f(x) \leq N_1 g(x)\}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}F_n} f d\xi = 0$ . Posons  $f_n = f$  sur  $F_n$  et  $f_n = 0$  dans  $\mathcal{C}F_n$ . Alors  $N_1 f_n \leq N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(f_n \xi)$ , et donc  $N_1 \sqsubset N_2$  donne que  $N_2 f_n \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . En faisant  $n \uparrow +\infty$ , on arrive à  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ , d'où le lemme 1.

Montrons la proposition 3. On montrera d'abord que (1)  $\Leftrightarrow$  (2). Soit  $c$  une constante  $> 0$  et supposons que, pour  $f, g \in M_K^+$ ,  $N_1 f + cf \leq N_1 g + cg$   $\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(f\xi)$ . Alors on a

$$N_1(f - g)^+ + c(f - g)^+ \leq N_1(f - g)^- + c(f - g)^-$$

$\xi$ -p.p. sur  $\text{supp}(f\xi)$ , et donc  $N_1(f - g)^+ \leq N_1(f - g)^-$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; (f - g)^+(x) > 0\}$ . D'après le lemme 1, on a  $N_2(f - g)^+ \leq N_2(f - g)^-$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ , d'où  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . On voit ainsi (1)  $\Leftrightarrow$  (2).

De la même manière, on obtient que (3)  $\Leftrightarrow$  (4). On montrera ensuite que (4)  $\Leftrightarrow$  (2). Soit  $c$  une constante  $> 0$  quelconque et supposons que, pour  $f, g \in M_K^+$ ,  $N_1 f + cf \leq N_1 g + cg$  sur  $\text{supp}(f\xi)$ . On prend une suite décroissante  $(G_n)_{n=1}^\infty$  d'ouverts relativement compacts de  $X$  telle que  $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \text{supp}(f\xi)$ . Soit  $\varphi_n$  la fonction caractéristique de  $G_n \cap \mathcal{C}(\text{supp}(f\xi))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et posons

$$a = \text{ess. sup}_{x \in G_1} N_1 f(x) \quad (< +\infty).$$

Alors on a

$$N_1 f + c f \leq N_1 \left( g + \frac{a}{c} \varphi_n \right) + c \left( g + \frac{a}{c} \varphi_n \right)$$

$\xi$ -p.p. dans  $G_n$ . Il existe donc un voisinage compact  $V_n$  de l'origine tel que  $\varphi \in C_K^+$ , portée par  $V_n$  quelconque,

$$(N_1 + c\varepsilon) * (f * \varphi) \leq (N_1 + c\varepsilon) * \left( \left( g + \frac{a}{c} \varphi_n \right) * \varphi \right)$$

sur  $\text{supp}(f * \varphi)$ . L'énoncé (4) donne que

$$N_2 * (f * \varphi) \leq N_2 * \left( \left( g + \frac{a}{c} \varphi_n \right) * \varphi \right)$$

En faisant  $\varphi \xi \rightarrow \varepsilon$  (vaguement), on a  $N_2 f \leq N_2 \left( g + \frac{a}{c} \varphi_n \right)$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ .

En faisant ensuite  $n \uparrow +\infty$ , on arrive à  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . On voit ainsi que (4)  $\Rightarrow$  (2).

Evidemment on a (1)  $\Leftrightarrow$  (3) et (2)  $\Leftrightarrow$  (4). Donc il suffit de montrer que (2)  $\Leftrightarrow$  (1). On remarque que, pour  $f \in M_K^+$  quelconque,  $N_1 f > 0$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) > 0\}$  sous la condition (2). En effet, supposons qu'il existe  $f \in M_K^+$  telle que  $\xi(\{x \in X; f(x) > 0, N_1 f(x) = 0\}) > 0$ . Posons  $A = \{x \in X; f(x) > 0, N_1 f(x) = 0\}$  et  $g(x) = f(x)$  sur  $A$ ,  $= 0$  dans  $\mathcal{C}A$ . Alors  $g \neq 0 \in M_K^+$  et  $N_1 g = 0$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; g(x) > 0\}$ . Comme  $N_1 \neq 0$ , il existe  $h \in M_K^+$  telle que  $N_1 h \geq g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . Alors, pour une constante  $c > 0$  quelconque,  $N_1 g + c g \leq c(N_1 h + c h)$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; g(x) > 0\}$ . D'après  $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$ , on a  $N_2 g \leq c N_2 h$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . Comme  $c$  est quelconque, on a  $N_2 g = 0$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . Mais cela est en contradiction avec  $N_2 \neq 0$ . On voit ainsi que, pour  $f \in M_K^+$  quelconque,  $N_1 f > 0$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) > 0\}$ . On montrera que (2)  $\Leftrightarrow$  (1). Pour cela, il suffit de montrer l'implication suivante: Pour  $f, g \in M_K^+$  quelconques,

$$N_1 f < N_1 g \text{ } \xi\text{-p.p. sur } \{x \in X; f(x) > 0\} \Leftrightarrow N_2 f \leq N_2 g \text{ } \xi\text{-p.p. sur } X,$$

car si  $N_1 f \leq N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) > 0\}$ , alors, pour toute la constante  $0 < a < 1$ ,  $a N_1 f < N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) > 0\}$ . On peut supposer encore que  $f \leq 1$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . Posons

$$B_n = \left\{ x \in X; N_1 f(x) + \frac{1}{n} \leq N_1 g(x) \right\}$$

et  $f_n = f$  sur  $B_n$ ,  $= 0$  dans  $\mathcal{C}B_n$ . Alors  $N_1 f_n + \frac{1}{n} f_n \leq N_1 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f_n(x) > 0\}$ , et donc  $N_1 + \frac{1}{n} \varepsilon \sqsubset N_2$  donne que  $N_2 f_n \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . En faisant  $n \uparrow +\infty$ , on arrive à  $N_2 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ , d'où (2)  $\Rightarrow$  (1). La démonstration est ainsi complète.

*Remarque 2.* Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. Si  $N_1 \sqsubset N_2$  et  $N_1 = 0$ , alors on a aussi  $N_2 = 0$ .

Discutons le principe relatif du balayage. On donne d'abord sa définition.

**DÉFINITION 2.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. On dit que  $N_1$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_2$  si, pour une mesure positive  $\mu$  dans  $X$  à support compact quelconque et pour un ouvert relativement compact  $G$  dans  $X$  quelconque, il existe une mesure positive  $\mu'$  portée par  $\bar{G}$  telle que l'on ait:

$$(B.1) \quad N_1 * \mu' \leq N_2 * \mu \text{ dans } X.$$

$$(B.2) \quad N_1 * \mu' = N_2 * \mu \text{ dans } G \text{ (au sens des mesures).}$$

Montrons le premier théorème qui a déjà introduit dans § 1.

**THÉORÈME 1.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. Si  $N_1 \sqsubset N_2$  et si  $N_2$  est injectif, alors  $N_1$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_2$ .

Pour le montrer, on prépare les deux lemmes suivants.

**LEMME 2.** Soient  $N_1 \neq 0, N_2$  deux noyaux de convolution. Supposons que, pour toute  $f \in M_K^+$ , tout le compact  $F$  de  $X$  et pour toute la constante  $c > 0$ , il existe  $f'_{F,c} \in M_K^+$  portée par  $F$  telle que  $N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} \leq N_2 f$   $\xi$ -p.p. sur  $X$  et  $N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} = N_2 f$   $\xi$ -p.p. sur  $F$ . Alors  $N_1$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_2$ .

Le présent lemme sera obtenu de la même manière que dans le lemme 1.6 dans [4]. Montrons précisément le lemme 2. Soient  $\mu$  une mesure positive dans  $X$  à support compact et  $G$  un ouvert relativement compact de  $X$ . On choisit une suite  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  de  $C_K^+$  telle que  $\varphi_n$  soit portée par un compact fixé et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \xi = \varepsilon$  (vaguement). Alors, pour toute la constante  $c > 0$ , il existe  $f'_{c,n} \in M_K^+$  portée par  $\bar{G}$  telle que l'on ait  $N_1 f'_{c,n} + c f'_{c,n} \leq N_2(\mu * \varphi_n)$   $\xi$ -p.p. sur  $X$  et  $N_1 f'_{c,n} + c f'_{c,n} = N_2(\mu * \varphi_n)$   $\xi$ -p.p.

sur  $\bar{G}$ . Evidemment  $(f'_{c,n}\xi)_{n=1}^\infty$  est vaguement bornée. Soit  $\mu'_c$  un point vaguement adhérent de  $(f'_{c,n}\xi)_{n=1}^\infty$ ; alors on a  $N_1*\mu'_c + c\mu'_c \leq N_2*\mu$  dans  $X$  et  $N_1*\mu'_c + c\mu'_c = N_2*\mu$  dans  $G$ . Comme  $N_1 \neq 0$ , on voit que  $(\mu'_c)_{c>0}$  est vaguement bornée. Soit  $\mu'$  un point vaguement adhérent de  $(\mu'_c)_{c>0}$  lorsque  $c \rightarrow 0$ ; alors on a  $N_1*\mu' \leq N_2*\mu$  dans  $X$  et  $N_1*\mu' = N_2*\mu$  dans  $G$ , d'où le lemme 2.

**LEMME 3.** *Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. Supposons que  $N_1 \sqsubset N_2$ ,  $N_2$  est injectif et que, pour  $f \in M_K^+$  quelconque et pour un compact  $F$  de  $X$  quelconque, il existe  $f'_F \in M_K^+$  portée par  $F$ , et une seule telle que  $N_1 f'_F = N_2 f$   $\xi$ -p.p. sur  $F$ . Alors on a toujours  $N_1 f'_F \leq N_2 f$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $f \in M_K^+$  et un compact  $F$  de  $X$  tels que

$$\xi(\{x \in X; N_1 f'_F(x) > N_2 f(x)\}) > 0.$$

On choisit un compact  $F'$  de  $X$  tel que  $\xi(F') > 0$  et que  $N_1 f'_F > N_2 f$  sur  $F'$ . On a alors

$$N_1 f'_F = N_1 f'_{F \cup F'} \quad \xi\text{-p.p. sur } \text{supp}(f'_F \xi)$$

et

$$N_1 f'_F \geq N_1 f'_{F \cup F'} \quad \xi\text{-p.p. sur } \text{supp}(f'_{F \cup F'} \xi).$$

D'après  $N_1 \sqsubset N_2$ , on a  $N_2 f'_F = N_2 f'_{F \cup F'}$   $\xi$ -p.p. sur  $X$ . Comme  $N_2$  est injectif, on a  $f'_F = f'_{F \cup F'}$ . Mais cela est en contradiction avec

$$N_1 f'_F > N_2 f = N_1 f'_{F \cup F'}$$

$\xi$ -p.p. sur  $F'$ . Par conséquent on voit ainsi le lemme 3.

*Démonstration du théorème 1.* Comme  $N_2$  est injectif,  $N_2 \neq 0$  et donc la remarque 2 donne que  $N_1 \neq 0$ . D'après la proposition 3 et les présents deux lemmes, il suffit de montrer que, pour  $f \in M_K^+$  quelconque, un compact  $F$  de  $X$  quelconque et pour une constante  $c > 0$  quelconque, il existe  $f'_{F,c} \in M_K^+$  portée par  $F$ , et une seule telle que

$$N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} = N_2 f \quad \xi\text{-p.p. sur } F. \quad (2.2)$$

Si  $f'_{F,c}$  existe, alors  $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$  et l'injectivité de  $N_2$  donnent l'unicité de  $f'_{F,c}$ . Donc on montrera seulement l'existence de  $f'_{F,c}$ . Posons

$$\alpha = \inf_{g \in L_2^+(F)} \int_F |N_1 g + c g - N_2 f|^2 d\xi, \quad (2.3)$$

où  $L_2^+(F) = \{f \in L_2(F); f \geq 0\}$ . Comme, pour toute  $g \in L_2^+(F)$ ,

$$\left( \int_F |N_1 g + c g - N_2 f|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq c \left( \int_F g^2 d\xi \right)^{1/2} - \left( \int_F (N_2 f)^2 d\xi \right)^{1/2}$$

et l'application  $L_2(F) \ni g \rightarrow (N_1 g)_F \in L_2(F)$  est faiblement continue dans  $L_2$  (cf. le corollaire 1), il existe  $f'_{F,c} \in L_2^+(F)$  telle que

$$\int_F |N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} - N_2 f|^2 d\xi = \alpha. \quad (2.4)$$

Pour que  $f'_{F,c}$  soit la fonction demandée, il suffit que  $\alpha$  s'annule. Comme  $(N_1 f'_{F,c})_F + c f'_{F,c}$  est la projection de  $(N_2 f)_F$  sur  $\{(N_1 g)_F + c g; g \in L_2^+(F)\}$ , on voit que, pour  $g \in L_2^+(F)$  quelconque,

$$\int_F (N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c})(N_1 g + c g) d\xi \geq \int_F (N_2 f)(N_1 g + c g) d\xi \quad (2.5)$$

et

$$\int_F (N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c})^2 d\xi = \int_F (N_2 f)(N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c}) d\xi. \quad (2.6)$$

Pour simplifier la notation, on note  $h_1 = (N_1 f'_{F,c})_F + c f'_{F,c}$  et  $h_2 = (N_2 f)_F$ . Alors on a, d'après (2.5),

$$\check{N}_1 h_1 + c h_1 \geq \check{N}_1 h_2 + c h_2 \quad \xi\text{-p.p. sur } F \quad (2.7)$$

et, d'après (2.6),

$$\check{N}_1 h_1 + c h_1 = \check{N}_1 h_2 + c h_2 \quad \xi\text{-p.p. sur } \{x \in X; f'_{F,c}(x) > 0\}. \quad (2.8)$$

D'après la présente égalité, on a  $c^2 f'_{F,c} \leq \check{N}_1 h_2 + c h_2$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f'_{F,c}(x) > 0\}$ . Comme  $h_2 \in M_K^+$ ,  $\check{N}_1 h_2 + c h_2$  est bornée sur  $F$ , et donc  $f'_{F,c} \in M_K^+$ . On a aussi  $h_1 \in M_K^+$ . D'après  $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$ , (2.7), la proposition 2 et  $\text{supp}(h_1 \xi) \subset F$ , on a

$$\check{N}_2 h_1 \geq \check{N}_2 h_2 \quad \xi\text{-p.p. sur } X,$$

et donc

$$\int (\check{N}_2 h_1) f d\xi \geq \int (\check{N}_2 h_2) f d\xi,$$



d'où

$$\int_{\mathcal{F}} (N_1 f'_{\mathcal{F},c} + c f'_{\mathcal{F},c})(N_2 f) d\xi \geq \int_{\mathcal{F}} (N_2 f)^2 d\xi. \quad (2.9)$$

D'après (2.6) et (2.9), on a  $\alpha \leq 0$ , d'où  $\alpha = 0$ . On voit ainsi que  $f'_{\mathcal{F},c}$  est la fonction demandée. La démonstration est complète.

On ne connaît pas maintenant si l'on peut éviter l'injectivité de  $N_2$  dans le théorème 1. De la même manière que dans la discussion du principe du balayage, on aura la remarque suivante :

*Remarque 3.* Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution ; supposons que  $N_1 \sqsubset N_2$  et que  $N_2$  est injectif. Alors, pour une mesure positive  $\mu$  dans  $X$  à support compact quelconque et pour un ouvert relativement compact  $G$  de  $X$  quelconque, il existe une mesure positive  $\mu'$  portée par  $\bar{G}$ , et une seule telle que l'on ait (B.1), (B.2) et (B.3) :

(B.3) Quelle que soit  $\nu$  une mesure positive par  $\bar{G}$ ,  $N_2 * \nu \geq N_2 * \mu'$  dans  $X$  dès que  $N_1 * \nu \geq N_2 * \mu$  dans  $G$ .

En effet, on prend une suite  $(G_n)_{n=1}^{\infty}$  d'ouverts relativement compacts de  $X$  telle que  $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$  et  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ . D'après le théorème 1, il existe une mesure positive  $\mu'_n$  portée par  $\bar{G}_n$  telle que  $N_1 * \mu'_n \leq N_2 * \mu$  dans  $X$  et  $N_1 * \mu'_n = N_2 * \mu$  dans  $G_n$ . D'après  $N_1 \neq 0$ ,  $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$  est vaguement bornée. On désigne par  $\mu'$  son point vaguement adhérent quelconque. Alors  $\mu'$  vérifie évidemment (B.1) et (B.2). Soit  $\nu$  une mesure positive portée par  $\bar{G}$  telle que  $N_1 * \nu \geq N_2 * \mu$  dans  $G$ ; alors, pour tout  $n$ ,  $N_1 * \nu \geq N_1 * \mu'_n$  dans un certain voisinage de  $\text{supp}(\mu'_n)$ . Donc  $N_1 \sqsubset N_2$  donne que  $N_2 * \nu \geq N_2 * \mu'_n$  dans  $X$ . En faisant  $n \uparrow +\infty$ , on arrive à  $N_2 * \nu \geq N_2 * \mu'$  dans  $X$ . On voit ainsi que  $\mu'$  vérifie (B.3). Soit  $\mu''$  une autre mesure positive portée par  $\bar{G}$  satisfaisant à (B.1), (B.2) et (B.3); alors on a  $N_2 * \mu' = N_2 * \mu''$  dans  $X$ , et donc l'injectivité de  $N_2$  donne  $\mu' = \mu''$ , d'où l'unicité de  $\mu'$ .

De la manière usuelle, on verra que l'inverse du théorème 1 a lieu. Mais cela n'est pas très important.

**PROPOSITION 4.** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. Si  $N_1$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_2$ , alors on a  $N_1 \sqsubset N_2$ .

*Démonstration.* Supposons que, pour  $f, g \in C_K^+$ ,  $\check{N}_1 * f \leq \check{N}_1 * g$  sur  $\text{supp}(f)$ . Soit  $x \in X$  quelconque; alors il existe une mesure positive  $\epsilon'_x$  portée par  $\text{supp}(f)$  telle que  $N_1 * \epsilon'_x \leq N_2 * \epsilon_x$  dans  $X$  et  $N_1 * \epsilon'_x = N_2 * \epsilon_x$

dans  $\{y \in X; f(y) > 0\}$ , où  $\varepsilon_x$  désigne la mesure d'unité au point  $x$ . Donc on a

$$\begin{aligned} \check{N}_2 * f(x) &= \int f(y) dN_2 * \varepsilon_x(y) = \int f(y) dN_1 * \varepsilon'_x(y) = \int \check{N}_1 * f(y) d\varepsilon'_x(y) \\ &\cong \int \check{N}_1 * g(y) d\varepsilon'_x(y) = \int g(y) dN_1 * \varepsilon'_x \cong \int g(y) dN_2 * \varepsilon_x(y) = \check{N}_2 * g(x) . \end{aligned}$$

Comme  $x$  est quelconque, on a  $\check{N}_2 * f \leq \check{N}_2 * g$  partout sur  $X$ . D'après les propositions 2, 3, on voit que  $N_1 \sqsubset N_2$ . La démonstration est ainsi complète.

### 3. Les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians

Commeçons avec la discussion préparatoire des noyaux de convolution de Hunt.

Une famille  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  de mesures positives dans  $X$  est, par définition, un semi-groupe vaguement continu si  $\alpha_0 = \varepsilon$ , pour tous  $t \geq 0$  et  $s \geq 0$ ,  $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$  et si l'application  $t \rightarrow \alpha_t$  est vaguement continue. Si un noyau de convolution  $N$  sur  $X$  s'écrit, pour un semi-groupe vaguement continu  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ , comme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt , \quad (3.1)$$

alors  $N$  s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas,  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe vaguement continu associé au noyau  $N$ .

Posons, pour tout le nombre  $p \geq 0$ ,  $N_p = \int \alpha_t \exp(-pt) dt$ ; alors  $(N_p)_{p \geq 0}$  est la résolvante associée au noyau  $N$  et, pour tout  $p > 0$ ,

$$N + \frac{1}{p} \varepsilon = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n , \quad (3.2)$$

où  $(\cdot)^0 = \varepsilon$  et  $(\cdot)^{n+1} = (\cdot)^n * (\cdot)$ . La remarque suivante est bien connue (cf. [1]).

*Remarque 4.* Si  $N$  est un noyau de convolution de Hunt, alors pour tout la constante  $c > 0$ ,  $N + c\varepsilon$  est aussi un noyau de convolution de Hunt.

Les deux lemmes suivants sont aussi bien connus (cf. [1], [2] et [4]).

LEMME 4. *Soit  $N$  un noyau de convolution. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- (a)  *$N$  un noyau de convolution de Hunt.*
- (b)  *$N$  est injectif et il existe la résolvente associée au noyau  $N$ .*

Une famille  $(N_p)_{p \geq 0}$  de noyaux de convolution s'appelle la résolvente associée au noyau  $N$  si, pour  $p \geq 0$  et  $q > 0$  quelconques,  $N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q$  et si  $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N_0 = N$  (vaguement).

Pour simplifier la notation, on note  $D^+(N)$  la totalité des mesures positives  $\mu$  dans  $X$  telles que  $N * \mu$  ait un sens.

LEMME 5. *Soit  $N$  un noyau de convolution de Hunt. Alors on a :*

- (a)  *$N$  satisfait au principe de domination.*
- (b) *Soient  $\mu \in D^+(N)$  et  $G$  un ouvert de  $X$ . Alors il existe une mesure positive  $\mu'_G$  portée par  $\bar{G}$ , et une seule telle que l'on ait*

$$(B.1)' \quad N * \mu \geq N * \mu'_G \text{ dans } X;$$

$$(B.2)' \quad N * \mu = N * \mu'_G \text{ dans } G;$$

- (B.3)' *pour une mesure positive  $\nu$  portée par  $\bar{G}$  quelconque,  $N * \nu \geq N * \mu'_G$  dès que  $N * \nu \geq N * \mu$  dans  $F$ .*

On dit que  $N$  satisfait au principe de domination si  $N \sqsubset N$ . On dit ensuite que  $\mu'_G$  est la mesure balayée de  $\mu$  sur  $G$  relativement au noyau  $N$ . On connaît que l'injectivité de  $N$  donne  $N * \mu \neq N * \mu'_G$  dès que  $\text{supp}(\mu) \not\subset \bar{G}$ ,

Soient  $\mu \in D^+(N)$  et  $x \in X$  quelconques. On désigne par  $\mu'_{x,G}$  la mesure balayée de  $\mu * \varepsilon_x$  sur  $G$  relativement au noyau  $N$ .

LEMME 6. (1) *L'application  $X \ni x \rightarrow \mu'_{x,G}$  est borélienne ; c'est-à-dire, pour  $f \in C_K$  quelconque, la fonction  $\int f d\mu'_{x,G}$  de  $x$  est borélienne.*

- (2) *Pour  $\mu, \nu \in D^+(N)$ , on a*

$$(\mu * \nu)'_G = \int \mu'_{x,G} d\nu(x) = \int \nu'_{x,G} d\mu(x) \tag{3.3}$$

dès que  $\mu * \nu \in D^+(N)$ .

On remarque que l'intégrale de (3.3) a un sens, d'après (1).

Montrons que (1) a lieu. On suppose d'abord que  $G$  est relativement compact. Soit  $(x_n)_{n=1}^\infty$  une suite de points convergeant vers  $x \in X$ . Comme  $N \neq 0$ ,  $(\mu'_{x_n,G})_{n=1}^\infty$  est vaguement bornée. Soit  $f \in C_K^+$  quelconque. On choisit une sous-suite  $(x_m)_{m=1}^\infty$  de  $(x_n)_{n=1}^\infty$  telle que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f dN * \mu'_{x_n, G} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f dN * \mu'_{x_m, G} .$$

Dans ce cas, on peut supposer que  $(\mu'_{x_m, G})_{m=1}^{\infty}$  converge vaguement vers la limite  $\mu''$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Comme  $\bar{G}$  est compact,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} N * \mu'_{x_m, G} = N * \mu'' \quad (\text{vaguement}) .$$

Comme  $\text{supp}(\mu'') \subset \bar{G}$ , (B.3)' donne que  $N * \mu'' \geq N * \mu'_{x, G}$  dans  $X$ . Donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f dN * \mu'_{x_n, G} = \int f dN * \mu'' \geq \int f dN * \mu'_{x, G} ,$$

et par suite la fonction  $\int f dN * \mu'_{x, G}$  de  $x$  est semi-continue inférieurement. Notons  $(N_p)_{p>0}$  la résolvante associée au noyau  $N$ . Alors, d'après l'équation résolvante  $N_p = N * (\varepsilon - pN_p)$ , on voit que, pour tout  $p > 0$ , la fonction  $\int f dN_p * \mu'_{x, G}$  de  $x$  est borélienne sur  $X$ . Comme  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN_p = \varepsilon$  (vaguement), on voit que la fonction  $\int f d\mu'_{x, G}$  de  $x$  est borélienne. Supposons que  $G$  est général. Prenons une suite  $(G_n)_{n=1}^{\infty}$  d'ouverts relativement compacts de telle que  $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$  et  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ . Il suffit de montrer que, pour  $x \in X$  quelconque,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{x, G_n} = \mu'_{x, G} \quad (\text{vaguement}) .$$

D'après  $N \neq 0$ , on voit que  $(\mu'_{x, G_n})_{n=1}^{\infty}$  est vaguement bornée. Soient  $\mu''_{x, G}$  un point vaguement adhérent de  $(\mu'_{x, G_n})_{n=1}^{\infty}$  quelconque et  $(\mu'_{x, G_m})_{m=1}^{\infty}$  une sous-suite de  $(\mu'_{x, G_n})_{n=1}^{\infty}$  convergeant vaguement vers  $\mu''_{x, G}$ . Soit  $V$  un voisinage compact de l'origine quelconque. Alors, pour toute  $f \in C_K^+$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int f dN * \mu'_{x, G_m} &\leq \int f dN * (\varepsilon - \varepsilon'_{CV}) * \mu''_{x, G} + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int f dN * \varepsilon'_{CV} * \mu'_{x, G_m} \\ &\leq \int f dN * \mu''_{x, G} + \int f dN * \varepsilon'_{CV} * \mu * \varepsilon_x . \end{aligned}$$

On connaît bien que  $N * \varepsilon'_{CV}$  converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque  $V \uparrow X$  (cf., par exemple, le théorème 3 de [4]), et donc

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int f dN * \mu'_{x, G_m} \leq \int f dN * \mu''_{x, G} ,$$

d'où  $\lim_{m \rightarrow \infty} N * \mu'_{x, G_m} = N * \mu'_{x, G}$  (vaguement). On a alors  $\text{supp}(\mu'_{x, G}) \subset \bar{G}$  et  $N * \mu'_{x, G} = N * (\mu * \varepsilon_x)$  dans  $G$ . Donc (B.3)' donne que  $N * \mu'_{x, G} \geq N * \mu'_{x, G}$  dans  $X$ . Evidemment  $N * \mu'_{x, G_m} \leq N * \mu'_{x, G}$  dans  $X$ , d'où  $N * \mu'_{x, G} = N * \mu'_{x, G}$ . L'injectivité de  $N$  donne que  $\mu'_{x, G} = \mu'_{x, G}$ . On voit ainsi que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{x, G_n} = \mu'_{x, G}$  (vaguement), d'où (1).

Montrons que (2) a lieu. D'après (1), on voit aussi que l'application  $X \ni x \rightarrow N * \mu'_{x, G}$  est aussi borélienne. Pour  $f \in C_K^+$  quelconque, on a

$$\iint f dN * \mu'_{x, G} d\nu(x) \leq \iint f dN * (\mu * \varepsilon_x) d\nu(x) = \int f dN * (\mu * \nu)$$

et, si  $\text{supp}(f) \subset G$ ,

$$\iint f dN * \mu'_{x, G} d\nu(x) = \int f dN * (\mu * \nu).$$

Donc  $\int \mu'_{x, G} d\nu(x)$  définit une mesure positive dans  $X$ . On a encore  $\text{supp}\left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right) \subset \bar{G}$ ,  $N * (\mu * \nu) \geq N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right)$  dans  $X$  et  $N * (\mu * \nu) = N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right)$  dans  $G$ . D'après (B.3)', on a  $N * (\mu * \nu)'_G \leq N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right)$  dans  $X$ . Soit  $(G_n)_{n=1}^\infty$  une suite d'ouverts relativement compacts de  $X$  telle que  $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$  et  $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = G$ . D'après le principe de domination pour  $N$ , on a

$$N * (\mu * \nu)'_G \geq N * \left(\int \mu'_{x, G_n} d\nu(x)\right) \quad \text{dans } X.$$

Comme, pour  $x \in X$  quelconque,  $(N * \mu'_{x, G_n})_{n=1}^\infty$  converge d'une manière croissante vers  $N * \mu'_{x, G}$  lorsque  $n \uparrow \infty$ , on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} N * \left(\int \mu'_{x, G_n} d\nu(x)\right) = N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right) \quad (\text{vaguement}),$$

et donc  $N * (\mu * \nu)'_G \geq N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right)$  dans  $X$ , d'où  $N * (\mu * \nu)'_G = N * \left(\int \mu'_{x, G} d\nu(x)\right)$ . On a alors  $(\mu * \nu)'_G = \int \mu'_{x, G} d\nu(x)$ , d'après l'injectivité de  $N$ . On a aussi  $(\mu * \nu)'_G = \int \nu'_{x, G} d\mu(x)$ . On achève ainsi la démonstration du lemme 6.

Pour un entier  $n \geq 0$  et pour  $G \ni 0$ , on note successivement

$$\mu_G^{(0)} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_G^{(n)} = \int \mu_{x,G}^{(n-1)} d\mu'_G(x) \quad (n \geq 1) \quad (3.4)$$

dès que l'intégrale a un sens. On a évidemment  $\mu_G^{(1)} = \mu'_G$  dans  $G$ .

LEMME 7. Soient  $N$  un noyau de convolution de Hunt et  $\mu \in D^+(N)$ . Supposons que, pour un entier  $k \geq 2$ ,  $(\mu)^k \in D^+(N)$ . Alors, pour tout l'entier  $m$  ( $1 \leq m \leq k$ ), tout l'ouvert  $G$  de  $X$  et pour tout  $x \in G$ ,  $\mu_{x,G}^{(m)}$  a un sens et

$$\int \mu_{y,G}^{(m)} d\mu_{x,G}^{(k-m)}(y) = \mu_{x,G}^{(k)} \quad \text{dans } G. \quad (3.5)$$

En effet, on a, pour  $1 \leq m \leq k$  quelconque,  $(\mu)^m \in D^+(N)$ . Donc le lemme 6 donne que  $\mu_{x,G}^{(m)}$  a un sens. L'égalité (3.5) résulte seulement du théorème de Fubini.

LEMME 8. Soient  $N$  un noyau de convolution de Hunt et  $\mu \in D^+(N)$ . Si  $N(\{0\}) > 0$  et  $N * \mu$  est absolument continu par rapport à  $\xi$ , alors, pour une mesure positive  $\nu$  dans  $X$  quelconque et pour un ouvert  $G$  de  $X$  quelconque,  $(\mu * \nu)'_G$  est absolument continue par rapport à  $\xi$  dès que  $\mu * \nu \in D^+(N)$ .

En effet, pour  $x \in X$  quelconque,  $\mu'_{x,G}$  est absolument continue par rapport à  $\xi$ , car

$$N(\{0\})\mu'_{x,G} \leq N * \mu'_{x,G} \leq N * \mu * \varepsilon_x$$

dans  $X$ . Donc  $(\mu * \nu)'_G = \int \mu'_{x,G} d\nu(x)$  est absolument continue par rapport à  $\xi$ , d'où le lemme 8.

Le lemme suivant jouera un rôle essentiel dans la démonstration de notre théorème principal.

LEMME 9. Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt,  $\sigma \in D^+(N_0)$  et  $f, g \in C_K^+$ . Supposons que, pour tout l'entier  $n \geq 1$ ,  $(\sigma)^n$  a un sens et appartient à  $D^+(N_0)$ . Si  $\check{N}_0 * (\varepsilon - \delta) * f < \check{N}_0 * (\varepsilon - \delta) * g$  sur  $\text{supp}(f)$  et s'il existe  $\varphi \in C_K^+$  telle que  $\check{N}_0 * (\varepsilon - \delta) * \varphi > 0$  sur  $\text{supp}(f)$ , alors  $\check{N}_0 * f \leq \check{N}_0 * g$  sur  $X$ .

Démonstration. On peut choisir une constante  $c > 0$  et un ouvert relativement compact  $G \supset \text{supp}(f)$  tels que  $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \delta) * \varphi > 0$  et

$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * f \leq (N_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * g$  dans  $\bar{G}$ . Soit  $\nu'_G$  la mesure balayée de  $g\xi$  sur  $G$  relativement au noyau  $\check{N}_0 + c\varepsilon$  (voir la remarque 4). Alors il existe  $g'_G$  portée par  $G$  telle que  $\nu'_G = g'_G\xi$ . Dans ce cas, on peut supposer que  $g'_G$  est borélienne. Comme  $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G \leq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$  et  $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G = (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g$   $\xi$ -p.p. dans  $G$ , on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * g'_G \geq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * g$$

$\xi$ -p.p. dans  $G$ . Donc

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * f \leq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * g'_G \quad \text{dans } G. \quad (3.6)$$

Notons, pour  $x \in X$  quelconque,  $\sigma'_{x,G}$  la mesure balayée de  $\sigma$  sur  $G$  relativement au noyau  $N_0 + c\varepsilon$ . On suppose que, pour  $x \in G$  quelconque, la notation  $\sigma_{x,G}^{(n)}$  est la même que dans (3.4) ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). D'après le lemme 8,  $\sigma_{x,G}^{(n)}$  a toujours un sens. Soit  $h \in M_K^+$  portée par  $G$  quelconque. Alors, pour tout l'entier  $n \geq 2$ , le lemme 6 donne que

$$\int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x) = \int \sigma_{x,G}^{(n-1)} d((h\xi) * \sigma)'_G(y),$$

où  $((h\xi) * \sigma)'_G$  est la mesure balayée de  $(h\xi) * \sigma$  sur  $G$  relativement au noyau  $N_0 + c\varepsilon$ . D'après le lemme 8,  $((h\xi) * \sigma)'_G$  est absolument continue par rapport à  $\xi$ . On a donc  $\int_{\mathcal{G}G} d((h\xi) * \sigma)'_G = 0$ . Alors on voit, par récurrence, que  $\int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x)$  est absolument continue par rapport à  $\xi$ . Sa

densité  $\tilde{h}_G^{(n)}$  est portée par  $G$ . D'après (3.6) et  $\int_{\mathcal{G}G} g'_G d\xi = 0$ , on a, pour tout l'entier  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * (g'_G - f)(y) d\left(\sum_{n=0}^k \int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x)\right)(y) \\ &= \sum_{n=0}^k \iiint (g'_G(z) - f(z)) d(N_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \sigma) * \varepsilon_y(z) d\sigma_{x,G}^{(n)}(y) h(x) d\xi(x) \\ &= \sum_{n=0}^k \iiint (g'_G(z) - f(z)) d(N_0 + c\varepsilon) * (\sigma_{y,G}^{(0)} - \sigma_{y,G}^{(1)}) d\sigma_{x,G}^{(n)}(y) h(x) d\xi(x) \\ &= \sum_{n=0}^k \iint (g'_G(z) - f(z)) d(N_0 + c\varepsilon) * (\sigma_{x,G}^{(n)} - \sigma_{x,G}^{(n+1)})(z) h(x) d\xi(x) \\ &= \iint (g'_G(y) - f(y)) d(N_0 + c\varepsilon) * (\sigma_{x,G}^{(0)} - \sigma_{x,G}^{(k+1)})(y) h(x) d\xi(x) \\ &= \int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(x) h(x) d\xi(x) \end{aligned}$$

$$- \iint (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(y) d\sigma_{x,G}^{(k+1)}(y) h(x) d\xi(x) .$$

Admettons que, pour  $h \in M_K^+$  portée par  $G$  quelconque,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (N_0 + c\varepsilon) * \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x) = 0 \quad (\text{vaguement}) . \quad (3.7)$$

Comme  $(g'_G - f)$  est bornée et à support compact, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \iint (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(y) d\sigma_{x,G}^{(k+1)}(y) h(x) d\xi(x) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint (g'_G - f) d(N_0 + c\varepsilon) * \sigma_{x,G}^{(k+1)} h(x) d\xi(x) = 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(x) h(x) d\xi(x) \geq 0 .$$

Comme  $h$  est quelconque, on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G \quad \xi\text{-p.p.} \quad \text{sur } G .$$

D'après le principe de domination pour  $\check{N}_0 + c\varepsilon$ , on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G \quad \xi\text{-p.p.} \quad \text{sur } X ,$$

d'où  $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g$  partout sur  $X$ . Notons  $(N_p)_{p \geq 0}$  la résolvante associée au noyau  $N_0$ . Alors  $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * \left(\frac{1}{c} \check{N}_{1/c}\right) = \check{N}_0$ , et donc  $\check{N}_0 * f \leq \check{N}_0 * g$  sur  $X$ .

Montrons finalement que (3.7) a lieu. Posons

$$a = \inf_{x \in G} (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi(x) > 0 .$$

Soit  $\varphi' \xi$  la mesure balayée de  $\varphi \xi$  sur  $G$  relativement au noyau  $\check{N}_0 + c\varepsilon$ . On peut supposer que  $\varphi'$  est borélienne et portée par  $G$ . De la même manière comme ci-dessus, on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi' \geq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi \geq a \quad \xi\text{-p.p.}$$

dans  $G$ . Comme la mesure  $\int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x)$  est absolument continue par rapport à  $\xi$  et  $\text{supp} \left( \int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x) \right) \subset \bar{G}$ , on a



$$\begin{aligned}
 a \sum_{n=0}^k \int \sigma_{x,G}^{(n)}(X)h(x)d\xi(x) &\leq \int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi'(y) d\left(\sum_{n=0}^k \int \sigma_{x,G}^{(n)}h(x)d\xi(x)\right) \\
 &= \int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * \varphi'(x)h(x)d\xi(x) \\
 &\quad - \iint (\check{N}_0 + c\varepsilon) * \varphi'(y) d\sigma_{x,G}^{(k+1)}h(x)d\xi(x) \\
 &\leq \int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * \varphi'(x)h(x)d\xi(x) .
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \sigma_{x,G}^{(n)}(X)h(x)d\xi(x) = 0 .$$

Comme  $\text{supp}\left(\int \sigma_{x,G}^{(n)}h(x)d\xi(x)\right) \subset \bar{G}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), on voit que (3.7) a lieu. La démonstration est ainsi complète.

*Remarque 5.* Dans le présent lemme 9, on peut remplacer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0 * (\sigma)^n = 0 \quad (\text{vaguement})$$

au lieu de la condition qu'il existe  $\varphi \in C_K^+$  telle que  $\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi > 0$  sur  $\text{supp}(f)$ .

Comme  $N_0 * \sigma_{x,G}^{(n)} \leq N_0 * (\sigma)^n * \varepsilon_x$  dans  $X$ , on voit facilement que (3.7) a lieu.

Dès que maintenant, nous considérerons notre théorème principal. Répétons d'abord la définition des noyaux de convolution conditionnellement sous-médians.

**DÉFINITION 3.** Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe vaguement continu associé au noyau  $N_0$ . On dit qu'un noyau de convolution  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  si, pour tout  $t > 0$ ,  $N * \alpha_t$  a un sens,  $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_t - \varepsilon}{t}\right) * N$  a un sens en dehors de l'origine pour la topologie vague et s'il définit une mesure positive en dehors de l'origine.

**LEMME 10.** Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $N$  un noyau de convolution conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$ . Alors pour que  $N = 0(N_0)$ , il faut et il suffit que, pour un voisinage compact  $V$  de l'origine quelconque, il existe deux mesures positives  $\lambda_{1,V}$

et  $\lambda_{2,V}$  telle que  $\text{supp}(\lambda_{1,V}) \subset V$  et

$$N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V})) = N_0*(\lambda_{1,V} - \lambda_{2,V}), \quad (3.8)$$

où  $\varepsilon'_{\mathcal{C}V}$  est la mesure balayée de  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}V$  relativement au noyau  $N_0$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour  $f \in C_K^+$  quelconque, on choisit  $g \in C_K^+$  et un voisinage compact  $V$  de l'origine tels que  $f \leq N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V})*g$ . Prenons encore  $h \in C_K^+$  telle que  $N_0*h \geq N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))*g$  sur  $\text{supp}(g) + V = \{x + y; x \in \text{supp}(g), y \in V\}$ . Alors on a

$$N_0*(\lambda_{1,V}*g) \leq N_0*h + N_0*(\lambda_{2,V}*g) \quad \text{sur} \quad \text{supp}(\lambda_{1,V}*g),$$

et donc la même inégalité a lieu sur  $N$ , d'après le principe de domination pour  $N_0$ . Par conséquent  $N*f \leq N_0*h$  sur  $X$ , d'où  $N = 0(N_0)$ .

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Soit  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe vaguement continu associé au noyau  $N_0$ . Alors on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} N_0*\alpha_t = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\infty \alpha_t dt = N_0 \quad (\text{vaguement}).$$

Soit  $f \in C_K^+$  quelconque. Comme  $N = 0(N_0)$  et  $\text{supp}(N_0) \ni 0$ , il existe  $g \in C_K^+$  telle que  $N*f \leq N_0*g$  sur  $X$ . Donc  $N*\varepsilon'_{\mathcal{C}V}$  a un sens et, d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_t * N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}) = N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}) \quad (\text{vaguement}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_t dt \right) * N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\varepsilon - \alpha_t}{t} \right) * (N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))*N \quad (\text{vaguement}). \end{aligned}$$

Comme, dans  $\mathcal{C}V$ ,  $\left( \frac{\alpha_t - \varepsilon}{t} \right) * N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))$  converge vaguement vers une mesure positive lorsque  $t \rightarrow 0$ , on a  $\text{supp}((N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))^+) \subset V$ . Posons  $\lambda_{1,V} = (N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))^+$  et  $\lambda_{2,V} = (N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V}))^-$ ; alors celles sont des mesures demandées. En effet, soit  $(N_p)_{p > 0}$  la résolvante associée au noyau  $N_0$ . Comme  $N = 0(N_0)$ , on voit que, pour tout  $p > 0$ ,  $N*N_p$  a un sens et

$$N*(N_p*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V})) = N_p*(N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathcal{C}V})). \quad (3.9)$$

On a  $N*(N_p*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) = N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V}))*(\varepsilon - pN_p)$  et  $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p * N_0 = 0$  (vaguement), et donc  $\lim_{p \rightarrow 0} N*(N_p*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) = N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V}))$  (vaguement).

D'après (3.9) et  $\text{supp}(\lambda_{1,V}) \subset V, N_0*(N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V}))$  a un sens. Donc, en faisant  $p \rightarrow 0$  dans (3.9),

$$N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) = N_0*(N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) = N_0*(\lambda_{1,V} - \lambda_{2,V}).$$

La démonstration est ainsi complète.

L'étude du principe transitif de domination et la proposition suivante sont les deux clefs pour notre démonstration du théorème principal.

**PROPOSITION 5.** *Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $N \neq 0$  un noyau de convolution. Alors pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt  $N'$  tel que  $N*N' = N_0$ , il faut et il suffit que, pour toute la constante  $c \geq 0, N + cN_0$  satisfasse au principe du balayage relatif à  $N_0$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord que la condition est suffisante. Soit  $(G_n)_{n=1}^\infty$  une suite d'ouverts relativement compacts de  $X$  telle que  $G_1 \ni 0, \overline{G_n} \subset G_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = X$ . Pour un nombre  $p > 0$  quelconque, il existe une mesure positive  $\varepsilon'_{p,n}$  portée par  $\overline{G_n}$  telle que  $(N + pN_0)*\varepsilon'_{p,n} \leq N_0$  dans  $X$  et  $(N + pN_0)*\varepsilon'_{p,n} = N_0$  dans  $G_n$ . Comme  $N + pN_0 \sqsubset N_0$  (cf. la proposition 4) et  $\text{supp}(\varepsilon'_{p,n}) \subset G_{n+1}$  on a  $N_0*\varepsilon'_{p,n} \leq N_0*\varepsilon'_{p,n+1} \leq \frac{1}{p}N_0$  dans  $X$ . Comme  $(\varepsilon'_{p,n})_{n=1}^\infty$  est vaguement bornée, on peut supposer qu'elle converge vaguement vers la limite  $N'_p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $\varepsilon''_m$  la mesure balayée de  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}\overline{G_m}$  relativement au noyau  $N_0$ ; alors  $\lim_{m \rightarrow \infty} N_0*\varepsilon''_m = 0$  (vaguement). Comme, pour, tout  $m \geq 1, N_0*\varepsilon''_m*\varepsilon'_{p,n} \leq \frac{1}{p}N_0*\varepsilon''_m$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (N_0 - N_0*\varepsilon''_m)*\varepsilon'_{p,n} = (N_0 - N_0*\varepsilon''_m)*N'_p \quad (\text{vaguement}),$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0*\varepsilon'_{p,n} = N_0*N'_p \quad (\text{vaguement})$$

et, pour un nombre  $\delta > 0$  quelconque et pour  $f, g \in C_K^+$  quelconques, il existe un compact  $F$  de  $X$  et un entier  $n_0 \geq 1$  tels que, pour  $n \geq n_0$

quelconque,  $\int_F \tilde{N}_0 * f \varepsilon'_{p,n} * g d\xi < \delta$ . D'autre part, pour  $f \in C_K^+$  quelconque, il existe  $g \in C_K^+$  telle que  $f \leq \varepsilon'_{p,1} * g$ , et par suite  $N * f \leq N_0 * g$  sur  $X$ . Donc on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N * \varepsilon'_{p,n} = N * N'_p \quad (\text{vaguement}).$$

Par conséquent, pour  $p > 0$  quelconque, il existe un noyau de convolution  $N'_p$  tel que  $(N + pN_0) * N'_p = N_0$ . Pour  $p > 0$  et  $q > 0$  quelconques, on a

$$\begin{aligned} N_0 * N'_q &= (N + pN_0) * N'_p * N'_q = (N_0 + qN_0) * N'_q * N'_p + (p - q)N_0 * N'_p * N'_q \\ &= N_0 * (N'_p + (p - q)N'_p * N'_q). \end{aligned}$$

L'injectivité de  $N_0$  donne que  $N'_p - N'_q = (p - q)N'_p * N'_q$ . Comme  $N \neq 0$ ,  $\lim_{p \downarrow 0} N'_p$  a un sens. On le désigne par  $N' (= N'_0)$ . Alors  $(N'_p)_{p \geq 0}$  est la résolvante associée au noyau  $N'$ . Comme  $\lim_{p \rightarrow 0} pN'_p = 0$  (vaguement) et,

pour tout  $p > 0$ ,  $N_0 * (pN'_p) \leq N_0$ , on obtient, de la même manière comme ci-dessus,  $\lim_{p \rightarrow 0} pN_0 * N'_p = 0$  (vaguement). Par conséquent on a  $N * N' = N_0$ .

Montrons que  $N'$  est injectif. Comme, pour  $p > 0$  quelconque,  $pN' * (\varepsilon - pN'_p) = pN'_p$ , il suffit de montrer que  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN'_p = \varepsilon$  (vaguement).

Comme  $N_0 * (pN'_p) = N_0 - N * N'_p$  et  $\lim_{p \rightarrow \infty} N * N'_p = 0$  (vaguement) on a, pour tout le voisinage compact  $V$  de l'origine,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (N_0 - N_0 * \varepsilon''_{\mathcal{E}V}) * (pN'_p) = (N_0 - N_0 * \varepsilon''_{\mathcal{E}V}) \quad (\text{vaguement}),$$

où  $\varepsilon''_{\mathcal{E}V}$  est la mesure balayée de  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{E}V$  relativement au noyau  $N_0$ . Donc on voit facilement que  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN'_p = \varepsilon$  (vaguement), d'où l'injectivité de  $N'$ . Le lemme 4 donne que  $N'$  est un noyau de convolution de Hunt.

Montrons que la condition est nécessaire. On désigne aussi par  $(N'_p)_{p \geq 0}$  la résolvante associée au noyau  $N'$ . Posons, pour  $p > 0$  quelconque,  $\tilde{N}_p = pN * N'_p$ ; alors

$$\tilde{N}_p = pN_0 * (\varepsilon - pN'_p).$$

Soient  $\mu$  une mesure positive dans  $X$  et  $G$  un ouvert relativement compact de  $X$ . On désigne par  $\mu'$  la mesure balayée de  $\mu$  sur  $G$  relativement au noyau  $N_0$  et l'on suppose que la notation  $(pN'_p)_{x,G}^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) est la même que ci-dessus. Posons, pour un entier  $k \geq 1$  quelconque,

$$\tilde{\mu}_p^{(k)} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^k \int (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x);$$

alors  $\tilde{\mu}_p^{(k)}$  est une mesure positive portée par  $\bar{G}$ . D'après le lemme 6, on a

$$\begin{aligned} \tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p^{(k)} &= \sum_{n=0}^k \int N_0 * (\varepsilon - pN'_p) * (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x) \\ &= \sum_{n=0}^k \iint N_0 * (\varepsilon_y - (pN'_p)'_{y,G}) d(pN'_p)^{(n)}_{x,G}(y) d\mu'(x) \\ &= N_0 * \mu' - N_0 * \left( \int (pN'_p)^{(k+1)}_{x,G} d\mu'(x) \right) \leq N_0 * \mu' \end{aligned}$$

dans  $G$ . En rappelant (B.3)' dans le lemme 5, on a

$$\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p^{(k)} \leq N_0 * \mu'$$

dans  $X$ . Ceci donne que  $\sum_{n=0}^k \int (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x)$  converge vaguement vers la limite  $\tilde{\mu}_p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x) = 0$  (vaguement), et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0 * \left( \int (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x) \right) = 0 \quad (\text{vaguement}),$$

car  $\text{supp} \left( \int (pN'_p)^{(n)}_{x,G} d\mu'(x) \right) \subset \bar{G}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), d'où  $\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p \leq N_0 * \mu$  dans  $X$  et  $\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p = N_0 * \mu$  dans  $G$ . Comme  $pN_0 * N'_p \leq N_0$  et  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN'_p = \varepsilon$  (vaguement), on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN_0 * N'_p = N_0$ , et donc  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN * N'_p = N$  (vaguement). Par conséquent, en faisant  $p \uparrow +\infty$ , on voit qu'il existe une mesure positive  $\mu''$  portée par  $\bar{G}$  telle que  $N * \mu'' \leq N_0 * \mu$  dans  $X$  et  $N * \mu'' = N_0 * \mu$  dans  $G$ , d'où la condition est nécessaire. La démonstration est ainsi complète.

Montrons finalement notre théorème principal.

**THÉORÈME 2.** Soient  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt et  $N \neq 0$  un noyau de convolution. Alors pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt  $N'$  tel que  $N * N' = N_0$ , il faut et il suffit que  $N$  soit conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  et que  $N = 0$  ( $N_0$ ).

*Démonstration.* On connaît déjà que la condition est nécessaire (cf. [5]), est donc on montrera seulement que la condition est suffisante.

Pour toute la constante  $c > 0$ ,  $N + cN_0$  est aussi conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  et l'on a  $N + cN_0 = 0(N_0)$ . Par conséquent, en rappelant le théorème 1 et la présente proposition, on voit qu'il suffit de montrer l'énoncé suivant :

Soient  $N_0$  et  $N$  les mêmes que ci-dessus. Si  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  et si  $N = 0(N_0)$ , alors  $N \sqsubset N_0$ .

Montrons le présent énoncé. D'après la proposition 3, on peut supposer que  $N(\{0\}) > 0$ . Donc, en utilisant encore les propositions 2 et 3, il suffit de montrer l'implication suivante: Pour  $f, g \in C_K^+$  quelconques,

$$\check{N} * f < \check{N} * g \text{ sur } \text{supp}(f) \Leftrightarrow \check{N}_0 * f \leq \check{N}_0 * g \text{ sur } X.$$

On choisit un ouvert relativement compact  $G$  de  $X$  telle que  $\text{supp}(f) \subset G \subset \bar{G} \subset \{x \in X; \check{N} * f(x) < \check{N} * g(x)\}$  et  $\varphi \in C_K^+$  telle que  $N * \varphi > 0$  sur  $\bar{G}$ . Pour un voisinage compact  $V$  de l'origine quelconque, on note  $\varepsilon'_{\varphi V}$  la mesure balayée de  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}V$  relativement au noyau  $N_0$  et  $a_V = \int dN_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})$ . Posons

$$\nu_{i,V} = \frac{1}{a_V} \lambda_{i,V} \quad (i = 1, 2) \quad \text{et} \quad \sigma_V = \frac{1}{\int d\nu_{1,V}} \nu_{2,V},$$

où  $\lambda_{i,V}$  ( $i = 1, 2$ ) est la mesure positive obtenue dans le lemme 10. On remarque ici que  $N \neq 0$  donne  $\lambda_{1,V} \neq 0$ . Rappelons que  $\text{supp}(\nu_{1,V}) \subset V$  et que  $\nu_{2,V}$  converge vaguement vers la mesure positive  $\lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{\alpha_t - \varepsilon}{t} \right) * N$  en dehors de l'origine lorsque  $V \downarrow \{0\}$ , où  $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ . Alors on a

$$\begin{aligned} N &= \lim_{V \downarrow \{0\}} \frac{1}{a_V} N * (N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) = \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0 * (\nu_{1,V} - \nu_{2,V}) \\ &= \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0 * \left( \nu_{1,V} - \frac{1}{\int d\nu_{1,V}} \nu_{1,V} * \nu_{2,V} \right) \\ &= \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0 * \nu_{1,V} * (\varepsilon - \sigma_V) \quad (\text{vaguement}). \end{aligned}$$

Donc il existe un voisinage compact  $V_0$  de l'origine symétrique par rapport à l'origine tel que  $\text{supp}(f) + V_0 \subset G$  et que, pour un voisinage compact  $V$  de l'origine contenu dans  $V_0$  quelconque,

$$\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * f \leq \check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * g$$

et

$$\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * \varphi > 0$$

dans  $G$ . D'après le lemme 9, on a  $\check{N}_0 * \check{\nu}_{1,V} * f \leq N_0 * \check{\nu}_{1,V} * g$  sur  $X$ . Par conséquent on a

$$\check{N}_0 * f - \check{N}_0 * g = \lim_{V \downarrow \{0\}} \frac{1}{\int d\nu_{1,V}} (\check{N}_0 * \check{\nu}_{1,V} * f - N_0 * \check{\nu}_{1,V} * g) \leq 0$$

dans  $X$ , d'où l'implication demandée. La démonstration est ainsi complète.

*Remarque 6.* Soient  $N_0$  et  $N$  les mêmes que ci-dessus; supposons que  $N$  est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau  $N_0$  et que  $N = 0(N_0)$ . Si  $N$  est absolument continu par rapport à  $\xi$ , alors on voit plus facilement que  $N$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_0$ .

En effet, d'après le théorème d'existence (cf. le théorème 1 dans [6]), on voit que, pour  $f \in C_K^+$  quelconque, un compact  $F$  de  $X$  quelconque et pour une constante  $c > 0$  quelconque, il existe  $f'_{c,F} \in M_K^+$  portée par  $F$  telle que l'on ait  $Nf'_{c,F} + cf'_{c,F} \geq N_0 * f$   $\xi$ -p.p. sur  $F$  et  $Nf'_{c,F} + cf'_{c,F} = N_0 * f$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f'_{c,F}(x) \neq 0\}$ . Désignons aussi par  $N$  la densité de  $N$  par rapport à  $\xi$ . Alors  $N * f'_{c,F}$  est finie et continue, et donc  $N * f'_{c,F} \leq N_0 * f$  sur  $\text{supp}(f'_{c,F}\xi)$ . On peut choisir  $h \in C_K^+$  telle que  $N_0 * h \geq 1$  dans un certain voisinage de  $\text{supp}(f'_{c,F}\xi)$ . Alors, pour tout l'entier  $n \geq 1$ , il existe un voisinage ouvert  $V_n$  de l'origine tel que, pour un voisinage compact  $V$  de l'origine contenu dans  $V_n$  quelconque et pour  $\varphi \in C_K^+$  vérifiant  $\int \varphi d\xi = 1$  et  $\text{supp}(\varphi) \subset V_n$  quelconque,

$$\frac{1}{a_V} N * (f'_{c,F} * \varphi) * (N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) \leq N_0 * \left( f + \frac{1}{n} h \right)$$

dans  $\text{supp}(f'_{c,F}) + 2V_n$ , où  $2V_n = V_n + V_n$ . Le lemme 10 donne que

$$N_0 * (f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{1,V} \leq N_0 * \left( f + \frac{1}{n} h + (f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{2,V} \right)$$

sur  $\text{supp}((f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{1,V})$ , et donc le principe de domination pour  $N_0$  donne

que la même inégalité a lieu sur  $X$ , d'où

$$\frac{1}{a_V} N * (f'_{c,F} * \varphi) * (N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{\varepsilon_V})) \leq N_0 * \left( f + \frac{1}{n} h \right)$$

sur  $X$ . En faisant  $V \downarrow \{0\}$ ,  $\varphi_\xi \rightarrow \varepsilon$  et ensuite  $n \uparrow +\infty$ , on arrive à  $N * f'_{c,F} \leq N_0 * f$  sur  $X$ . De la même manière que dans le lemme 2, on voit que  $N$  satisfait au principe du balayage relatif à  $N_0$ .

Dans ce cas, on obtient, en même temps, que  $N_0$  est aussi absolument continu par rapport à  $\xi$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643-667.
- [ 2 ] M. Itô: Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., **50** (1973), 149-173.
- [ 3 ] —: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, *ibid.*, **55** (1974), 111-144.
- [ 4 ] —: Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 293-350.
- [ 5 ] —: Sur le cône convexe maximum constitué par des diviseurs d'un noyau de convolution et son application, Ann. Inst. Fourier, **25** (1975), 289-308.
- [ 6 ] —: Le principe relatif de domination et le principe transitif de domination pour les noyau-fonctions boréliennes, Hiroshima Math. J., **6** (1976), 207-219.

*Département de Mathématiques  
Université de Nagoya*