M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 57 (1975), 121-125

DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA REPRESENTATION INTÉGRALE DU NOYAU COMPLÈTEMENT SOUS-HARMONIQUE ET INVARIANT PAR ROTATIONS

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite $\boldsymbol{R}^n$ désigne l'espace euclidien à dimension n ($\geqq 1$). On désigne par $\varDelta$ l'opérateur de Laplace sur $\boldsymbol{R}^n$. Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ signifie une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^n$. Rappelons qu'un noyau de convolution de Dirichlet N sur $\boldsymbol{R}^n$ est un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que $1/\hat{N}$ soit égal à une fonction définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles, où $\hat{N}$ désigne la transformée de Fourier de N (cf. [1]). Pour un nombre $p > 0$, G_p désigne le noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $(\varDelta - p)G_p = -\varepsilon$ (au sens des distributions), où ε est la mesure de Dirac à l'origine. Si $n \geqq 3$, on note $G = G_0$ le noyau newtonien avec $\varDelta G = -\varepsilon$. Dans l'article précédent [2], on a montré le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini*[1] *et invariant par rotations. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *N est complètement sous-harmonique (en dehors de l'origine); c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\varDelta^m N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où $\varDelta^0 N = N$, $\varDelta^1 = \varDelta$ et $\varDelta^m = \varDelta^{m-1}\varDelta$ ($\forall m \geqq 2$).*

(2) *N est de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int G_p d\nu(p) ,$$

où c et ν sont respectivement une constante $\geqq 0$ et une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+ = \{t \in \boldsymbol{R}^1 ; t \geqq 0\}$.

Received April 17, 1974.

1) Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $\lim_{x\to\infty} N*f(x)=0$.

Si un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifie l'énoncé (2), alors N est un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ ou bien 0. Donc le présent théorème joue un rôle essentiel dans la discussion sur le cône convexe divisible (cf. [2] et [3]).

La démonstration du théorème dans [2] est très compliquée. Le but de cette note est de fournir une démonstration simple du présent théorème, en utilisant seulement le théorème de Bernstein.

§ 2. Une démonstration simple du théorème

Rappelons d'abord le théorème de Bernstein (cf. par exemple, [4]).

LEMME. *Soit φ une fonction infiniment dérivable dans* $(0, +\infty)$ *à valeurs réelles. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *φ est complètement monotone; c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\varphi \geqq 0$ dans* $(0, +\infty)$.

(b) *φ est de la forme*

$$\varphi(t) = \int \exp(-ts)d\nu(s) \qquad (\forall t > 0) ,$$

où ν est une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$.

Dans ce cas, ν est uniquement déterminée, d'après l'injectivité de la transformation de Laplace.

Montrons notre théorème. L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) résulte immédiatement du fait que, pour tout l'entier $m \geqq 0$ et pour tout $p \geqq 0$, $\Delta^m G_p = p^m G_p$ en dehors de l'origine. Donc on montrera seulement l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que l'énoncé (1) a lieu; alors il existe uniquement une constante $c \geqq 0$ et une fonction infiniment dérivable $\varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$ telles que $\int_0^1 \varphi(r^2)r^{n-1}dr < +\infty$ et $N = c\varepsilon + \varphi(|x|^2)dx$. Ayant, pour tout l'entier $m \geqq 0$,

$$\Delta^m N = \left(4|x|^2\frac{d^2}{dt^2} + 2n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(|x|^2)dx$$

en dehors de l'origine, on a $(2t(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m\varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. On a, pour toute la fonction infiniment dérivable f dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact,

$$\lim_{x\to\infty}\int f(x-y)d(\Delta^m N)(y) = \lim_{x\to\infty}\int \Delta^m f(x-y)dN(y) = 0 ,$$

et la fonction $(2|x|^2(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m\varphi(|x|^2)$ de x dans $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$ est sous-harmonique. Donc on a

$$\frac{d}{dt}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \leqq 0 \quad \text{dans} \quad (0, +\infty)\ ,$$

et par suite

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \geqq 0 \quad \text{dans} \quad (0, +\infty)\ .$$

Soit k un entier $\geqq 1$ et supposons que, quel que soit m un entier $\geqq 0$,

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \geqq 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \leqq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On a alors, pour tout l'entier $m \geqq 0$,

$$\begin{aligned} 0 \geqq \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \varphi(t) &= 2t\frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \\ &+ (n + 4k - 2)\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \end{aligned}$$

dans $(0, +\infty)$. D'après la présente hypothèse, on a

$$\frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \leqq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On a aussi

$$\begin{aligned} 0 \leqq \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \varphi(t) &= 2t\frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \\ &+ (4k + n)\frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \end{aligned}$$

dans $(0, +\infty)$. D'après l'inégalité obtenue ci-dessus, on a

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \geqq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On obtient ainsi, par récurrence, que pour tous les entiers $k \geqq 0$ et $m \geqq 0$,

$$(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) \geqq 0$$

dans $(0, +\infty)$. D'après le lemme, pour tout l'entier $m \geqq 0$, il existe une mesure positive ν'_m sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que

$$\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) = \int \exp(-ts)d\nu'_m(s)$$

dans $(0, +\infty)$. Ayant $\lim_{t\to+\infty}(2t(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m\varphi(t) = 0$, on a $\nu'_m(\{0\}) = 0$. Donc, en utilisant une certaine transformation, il existe une mesure positive ν_m dans $(0, +\infty)$ telle que

$$\left(2t\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) = \int \frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{t}{4s}\right)d\nu_m(t)$$

dans $(0, +\infty)$. Ayant, pour tout l'entier $m \geqq 0$,

$$\Delta_{(x)}\left(2|x|^2\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^m \varphi(|x|^2) = \left(2|x|^2\frac{d^2}{dt^2} + n\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \varphi(|x|^2)$$

et

$$\Delta_{(x)}\left(\frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right)$$

dans $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$, on obtient, pour tout l'entier $m \geqq 1$ et pour $t > 0$,

$$\int \frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n}\exp\left(-\frac{t}{4s}\right)d\nu_m(s) = \int \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n}\exp\left(-\frac{t}{4s}\right)\right)d\nu_{m-1}(s)\,.$$

Donc on a, quels que soient k un entier $\geqq 1$ et f une fonction infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$ à support compact,

$$\begin{aligned} &k\int \frac{1}{s^{n/2}}\int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right)f(t)dtd\nu_m(s) \\ &= k\int \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^{n/2}}\int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right)f(t)\,dt\right)d\nu_{m-1}(s)\,. \end{aligned}$$

On peut montrer, d'autre part, qu'il existe un entier $k_0 \geqq 1$ tel que, quels que soient k un entier avec $k \geqq k_0$ et un point s de $(0, \frac{1}{2}\min_{t\in\operatorname{supp}(f)} t)$,

$$k\int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right)|f(t)|\,dt \geqq (k+1)\int_s^\infty \exp\left(-\frac{(k+1)(t-s)}{4s}\right)|f(t)|\,dt\,.$$

Par conséquent, en faisant $k \to +\infty$, on obtient

$$\int s^{1-n/2}f(s)d\nu_m(s) = \int \frac{d}{ds}(s^{1-n/2}f(s))d\nu_{m-1}(s)\,.$$

La fonction f étant quelconque, on a $\nu_m = -(d/dt)\nu_{m-1}$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\nu_0 = \nu_m$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Donc il existe uniquement une fonction non-négative et infiniment dérivable φ dans $(0, +\infty)$ telle que $\nu_0 = \varphi(t)dt$ dans $(0, +\infty)$ et pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. En utilisant encore le théorème de Bernstein, on peut écrire

$$\varphi(t) = \int \exp(-pt)d\nu(p) \qquad (\forall t > 0) ,$$

où ν est une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} N &= c\varepsilon + \left(\int \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) d\nu_0(t)\right) dx \\ &= c\varepsilon + \left(\int\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \exp(-pt)dt d\nu(p)\right) dx . \end{aligned}$$

Ayant

$$G_p = \left(\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \exp(-pt)dt\right) dx$$

on obtient

$$N = c\varepsilon + \int G_p d\nu(p) .$$

La démonstration est ainsi complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beurling and J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. U.S.A., **45** (1959), 208–215.

[2] M. Itô: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, Nagoya Math. J., **55** (1974), 111–144.

[3] ——: Sur l'unicité du cône convexe divisible constitué par de noyaux de convolution de Dirichlet, Nagoya Math. J., à paraître.

[4] D. Widder: The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

Université de Nagoya