M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 55 (1974), 111–144

# SUR LES CÔNES CONVEXES DE RIESZ ET LES NOYAUX DE CONVOLUTION COMPLÈTEMENT SOUS-HARMONIQUES

MASAYUKI ITÔ

## 1. Introduction

Soit $X$ un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; $\xi$ sera sa mesure de Haar. Dans les articles précédents [10] et [11], pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$, nous avons défini la famille sous-ordonnée $H(N; X)$ au noyau $N$, qui est une large classe de noyaux de convolution de Hunt sur $X$ définie par $N$ et la totalité des noyaux de convolution de Hunt bornés sur la droite réelle $\boldsymbol{R}$ portés par $\boldsymbol{R}^+ = \{t \in \boldsymbol{R}; t \geqq 0\}$.

Dans l'autre article [7], nous avons montré le théorème suivant:

Supposons que, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, il existe la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$. Pour une mesure de Radon positive $\nu$ quelconque sur $\boldsymbol{R}^+$ et pour une constante non-négative $c$, le noyau de convolution $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$ sur $X$ satisfait au principe de domination dès que cela a un sens, où $\varepsilon$ est la mesure de Dirac à l'origine dans $X$.

Cette proposition entraîne que la somme de puissances fractionnaires de $N$ satisfait aussi au principe de domination. D'autre part, la formule de Riesz concernant les potentiels de Riesz-Frostman est bien connue et très utile. Ces deux résultats portera naturellement la définition du cône convexe de Riesz relatif à un noyau de convolution de Hunt sur $X$.

Notre premier but sera de montrer le théorème suivant:

Pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$, il existe uniquement un cône convexe de Riesz $C_R(N)$ relatif au noyau $N$ contenu dans $\overline{H}(N; X) = H(N; X) \cup \{0\}$. Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$; alors $C_R(N)$ est la totalité des noyaux de convolution sur $X$ de la

Received March 16, 1973.

forme $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$, où $c$ et $\nu$ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$. On obtiendra en même temps $C_R(N) = \cap C(N)$, où $C(N)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$.

La deuxième part de cet article sera consacrée à la détermination explicite d'un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien. Soit $\boldsymbol{R}^n$ l'espace euclidien à $n(\geqq 1)$ dimensions; on notera $|x|$ la distance entre $x$ et l'origine. Un noyau de convolution $N$ sur $\boldsymbol{R}^n$ sera dit complètement sous-harmonique en dehors de l'origine si l'on a, quel que soit $k$ un entier $\geqq 1$, $\Delta^k N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où $\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur $\boldsymbol{R}^n$ et $\Delta^k = \Delta^{k-1}\Delta$ $(k \geqq 2)$. Pour un nombre $p > 0$, désignons par $G_p$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ dont la transformée de Fourier est égale à $(p + |x|^2)^{-1}$. Si un noyau de convolution $N$ sur $\boldsymbol{R}^n$ est complètemet sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations, alors il satisfait au principe complet du maximum et il est de la forme $N = c_1 + c_2\varepsilon + \int G_p d\nu(p)$, où $c_i$ $(i = 1, 2)$ et $\nu$ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$. Soit $S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$ la totalité des noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations et s'annulant à l'infini; alors si $n \geqq 3$, $S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$ sera un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur $\boldsymbol{R}^n$ et constitué par de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ invariants par rotations.

## 2. Préliminaires

Dans cette note, on notera:

$C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans $X$ à support compact,

$M_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions $\xi$-mesurables et bornées dans $X$ à valeurs réelles et à support compact,

$L_{\mathrm{loc}}(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions localement $\xi$-sommables dans $X$ à valeurs réelles.

$C_K^+(X)$, $M_K^+(X)$ et $L_{\mathrm{loc}}^+(X)$ sont respectivement leur sous-ensembles des fonctions non-négatives.

Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution $N$ sur $X$ signifie une mesure de Radon positive dans $X$. On appelle le noyau adjoint $\check{N}$ de $N$ la mesure symétrisant avec $N$ par rapport à l'origine. Si, en particulier, $N = \check{N}$, il est dit symétrique. Si $N$ est de la forme $dN = K(x)d\xi(x)$, où $K \in L^+_{\text{loc}}(X)$, alors $N$ est un noyau-fonction de convolution sur $X$, et dans ce cas, on utilisera souvent $K$ au lieu de $N$. On dit qu'un noyau de convolution $N$ sur $X$ est borné (resp. s'annule à l'infini) si, quelle que soit $f$ de $C_K(X)$, la fonction $N*f$ est bornée sur $X$ (resp. $N*f(x)$ tend vers 0 avec $x \to \infty$).

Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Pour une mesure de Radon réelle $\mu$ dans $X$, $N*\mu$ s'appelle le $N$-potentiel de $\mu$ dès que cette convolution a un sens. S'il est absolument continu par rapport à $\xi$, sa densité s'écrira $N\mu$. Pour une fonction $f$ de $L_{\text{loc}}(X)$, on notera $N*f$ et $Nf$ au lieu de $N*(f\xi)$ et $N(f\xi)$ dès que ceux sont définis. Pour une fonction borélienne $f$ dans $X$, on peut supposer $Nf = N*f$ dès que, quel que soit $x$ de $X$, $\tau_x f$ est $\check{N}$-sommable, où $\tau_x f$ est la fonction obtenue de $f$ par la translation $x$.

On dit qu'un noyau de convolution $N$ sur $X$ satisfait au principe de domination (resp. au principe complet de maximum) si, quelles que soient $f$ et $g$ de $C^+_K(X)$, l'implication suivante a lieu:

$$\begin{gathered} Nf \leqq Ng \ \text{(resp. } Nf \leqq Ng + 1) \ \text{sur} \operatorname{supp}(f) \\ \Rightarrow Nf \leqq Ng \ \text{(resp. } Nf \leqq Ng + 1) \ \text{sur}\ X\,, \end{gathered}$$

où $\operatorname{supp}(f)$ désigne le support de $f$. Si $N$ est borné, alors les deux principes pour $N$ sont équivalents (cf. [8]). On connaît bien que le principe de domination pour $N$ (resp. le principe complet du maximum pour $N$) est équivalent au principe de domination pour $\check{N}$ (resp. au principe complet du maximum pour $\check{N}$). D'autre part, il est aussi connu que le principe de domination pour $N$ (resp. le principe complet du maximum pour $N$) est équivalent au principe du balayage pour $N$ (resp. au principe du balayage avec diminution de masse pour $N$). On dit que $N$ satisfait au principe du balayage si, pour une mesure de Radon positive $\mu$ dans $X$ et pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$, il existe une mesure de Radon positive $\mu'_\omega$ dans $X$ portée par $\bar{\omega}$ telle que $N*\mu \geqq N*\mu'_\omega$ dans $X$, $N*\mu = N*\mu'_\omega$ dans $\omega$ et, quelle que soit $\mu''$ une mesure de Radon positive dans $X$ portée par $\bar{\omega}$, $N*\mu'_\omega \leqq N*\mu''$ dans $X$ dès que $N*\mu'' \geqq N*\mu$ dans $\omega$. On dit que $\mu'_\omega$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$. Si $N$ satisfait au principe du balayage et, quels que soient $\mu$ une mesure de Radon positive dans $X$ à support compact et $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$, $\int d\mu'_\omega \leqq \int d\mu$, alors on dit que $N$ satisfait au principe du balayage avec diminution de masse.

Un noyau de convolution $N$ sur $X$ satisfait au principe de domination et vérifie la condition supplémentaire "régularité" si et seulement s'il existe la résolvante associée au noyau $N$ (cf. [9]). Une famille $(N_p)_{p>0}$ de noyaux de convolution sur $X$ s'appelle une résolvante si, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$N_p - N_q = (q - p)N_p{*}N_q \text{ (Equation résolvante)} .$$

Si, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, il existe une résolvante $(N_p)_{p>0}$ telle que $\lim_{p\to 0} N_p = N$ (au sens de la topologie vague), alors elle est uniquement déterminée et $(N_p)_{p\geqq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau $N$, où $N_0 = N$. Supposons que, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, il existe la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$; alors $N$ satisfait au principe complet du maximum si et seulement si, quel que soit $p > 0$, $p\int dN_p \leqq 1$.

PROPOSITION 1 (cf. [7]). *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ et supposons qu'il existe la résolvante associée au noyau $N$. Alors, pour une constante non-négative $c$ et pour une mesure de Radon positive $\nu$ sur $\boldsymbol{R}^+$, il existe la résolvante associée au noyau $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$ dès que cela a un sens.*

Un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$ est, par définition, un noyau de convolution sur $X$ de la forme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt ,$$

où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans $X$; c'est-à-dire, $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t{*}\alpha_s = \alpha_{t+s}$ ($\forall t \geqq 0$, $\forall s \geqq 0$) et l'application $t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé, qui s'appellera le semi-groupe associé au noyau $N$.

PROPOSITION 2 (cf. [11]). *Pour qu'un noyau de convolution $N$ sur $X$ soit un noyau de convolution de Hunt sur $X$, il faut et il suffit qu'il* *existe la résolvante associée au noyau $N$ et que $N$ soit non-périodique*[1].

Pour un noyau de convolution $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur $X$, on obtiendra facilement que les trois énoncés suivants sont équivalents:

(a) $N$ est borné.

(b) $\int d\alpha_t \leqq 1$ $(\forall t \geqq 0)$.

(c) Il existe une fonction définie-négative $\psi$ dans le groupe dual $\hat{X}$ de $X$, et une seule telle que la transformée de Fourier de $\alpha_t$ soit de la forme $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$.

Dans ce cas, $\psi$ s'appelle la fonction définie-négative associée au noyau $N$. On a évidemment $\hat{N} = 1/\psi$ dès que cela a un sens. Une fonction complexe et continue $\psi$ dans $\hat{X}$ est, par définition, définie-négative si l'on a:

(1) $\psi(\hat{O}) \geqq 0$ et $\psi(-\hat{x}) = \overline{\psi(\hat{x})}$ $(\forall \hat{x} \in \hat{X})$.

(2) Quels que soient $n$ un entier $\geqq 1$, $(\hat{x}_i)_{i=1}^n \subset \hat{X}$ et $(c_i)_{i=1}^n$ nombres complexes avec $\sum_{i=1}^n c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) c_i \overline{c_j} \leqq 0 \, .$$

En particular, un noyau de convolution de Hunt symétrique sur $X$ s'appelle un noyau de convolution de Dirichlet sur $X$, qui satisfait toujours au principe complet du maximum.

PROPOSITION 3 (cf. [10] et [11]). *Supposons qu'il existe un espace vectoriel topologique $E$ appartenant à $X$ et homéomorphe avec $\boldsymbol{R}$, et soit $\kappa$ un noyau de convolution non-zéro sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$. Alors pour que, quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$, $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ soit aussi un noyau de convolution de Hunt sur $X$, il faut et il suffit que $\kappa$ soit un noyau de convolution borné de Hunt sur $\boldsymbol{R}$.*

Pour simplifier la notation, $H(A)$ et $H_b(A)$ désigneront respectivement la totalité des noyaux de convolution de Hunt sur $X$ portés par $A$ et son sous-ensemble des noyaux de convolution de Hunt bornés, où $A$ est un semi-groupe fermé dans $X$. D'après la proposition 3, on arrive à la définition suivante:

[1] Cela signifie que, quel que soit $x \neq 0$ de $X$, $N \neq N * \varepsilon_x$, où $\varepsilon_x$ est la mesure de Dirac à $x$.

DÉFINITION 1 (cf. [10] et [11]). Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$. On note

$$H(N; X) = \left\{N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t) ; \kappa \in H_b(\boldsymbol{R}^+)\right\} ,$$

qui s'appelle la famille sous-ordonnée au noyau $N$. On notera ensuite $\overline{H}(N; X) = H(N; X) \cup \{0\}$.

Soit $\kappa_0$ un noyau d'Heaviside sur $\boldsymbol{R}$; c'est-à-dire $d\kappa_0 = dt$ sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\kappa_0 = 0$ dans $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^+$. Alors on a évidemment

$$H_b(\boldsymbol{R}^+) = H(\kappa_0 ; \boldsymbol{R}) .$$

## 3. Les cônes convexes de Riesz

Commençons d'abord avec la définition du principe relatif de domination. Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$. On dit que $N_1$ satisfait au principe de domination relatif à $N_2$ si, quelles que soient $f$ et $g$ de $M_K^+$, l'inégalité $N_1 f \leqq N_2 g$ est satisfaite presque partout pour $\xi$ (noté désormais $\xi$-p.p.) sur $X$ dès qu'elle l'est $\xi$-p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. On notera, dans ce cas, $N_1 \prec N_2$. En particulier, si, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, $N \prec \xi$, on dit qu'il satisfait au principe classique du maximum.

PROPOSITION 4. *Soient $N_0$ et $H(N_0; X)$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et la famille sous-ordonnée au noyau $N_0$, respectivement. Alors tout le noyau de convolution $N$ de $H(N_0; X)$ satisfait au principe de domination relatif à $N_0$ et il existe un autre noyau de convolution $N'$ sur $X$, et un seul tel que $N*N' = N_0$.*

LEMME 1. *Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$; supposons que, pour trois mesures positives $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ dans $\boldsymbol{R}^+$, $\lambda_1 * \lambda_2 = \lambda_3$. Alors $N_{(\lambda_i)} = \int \alpha_t d\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$ a un sens et a*

$$N_{(\lambda_1)} * N_{(\lambda_2)} = N_{(\lambda_3)}$$

*dès que $N_{(\lambda_3)}$ a un sens et $\lambda_3 \neq 0$.*

En effet, on a

$$N_{(\lambda_3)} = \int \alpha_t d(\lambda_1 * \lambda_2)(t) = \int \alpha_{t+s} d\lambda_1(t) d\lambda_2(s)$$
$$= \iint \alpha_t * \alpha_s d\lambda_1(t) d\lambda_2(s) = N_{(\lambda_1)} * N_{(\lambda_2)} ,$$

d'où notre lemme.

LEMME 2. *Pour un noyau de convolution $\kappa$ de $H_b(\boldsymbol{R}^+)$, il existe un autre noyau de convolution $\kappa'$ sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que*

$$d(\kappa * \kappa') = dt \quad sur\ \boldsymbol{R}^+ \ et \quad \frac{d}{dt}\kappa' \leqq 0$$

*au sens des distributions dans* $(0, +\infty)$.

En effet, soit $\kappa_0$ le noyau d'Heaviside sur $\boldsymbol{R}$. Il suffit de montrer que $\kappa$ satisfait au principe de domination relatif à $\kappa_0$. Si c'est vrai, il existe un autre noyau de convolution borné $\kappa'$ sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ tel que $\kappa * \kappa' = \kappa_0$ (cf. [5]). Donc, au sens des distributions, $((d/dt)\kappa') * \kappa = \varepsilon$, où $\varepsilon$ désigne aussi la mesure de Dirac à l'origine de $\boldsymbol{R}$. $\kappa$ étant de la forme $\kappa = \int_0^\infty \alpha_t dt$, la famille $((\varepsilon - \alpha_t)/t)_{t>0}$ converge vers la distribution $(d/dt)\kappa'$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}$ avec $t \downarrow 0$, d'où $(d/dt)\kappa' \leqq 0$ dans $(0, +\infty)$. Pour que $\kappa$ satisfasse au principe de domination relatif à $\kappa_0$, il suffit que l'implication suivante ait lieu: Quelles que soient $f, g$ de $M_K^+(\boldsymbol{R})$,

$$\kappa f \leqq \kappa_0 g \text{ p.p. sur supp}\,(f dt) \Rightarrow \kappa f \leqq \kappa_0 g \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

(cf. [8]). Donc il suffit de voir que, dans tout l'intervalle fermé $[a, b]$ dans le complément de supp $(f dt)$, $\kappa f \leqq \kappa_0 g$ p.p. sur $[a, b]$. Soient $f_a$ et $g_a$ les restreintes de $f$ et de $g$ sur $(-\infty, a]$; alors $\kappa f = \kappa f_a$ et $\kappa_0 g = \kappa_0 g_a$ sur $(-\infty, b]$. On a

$$\kappa_0 g_a = \int g_a dt \text{ p.p. sur } [a, b] \text{ et } \kappa_0 g_a \leqq \int g_a dt \text{ p.p. sur supp}\,(f_a dt) .$$

$\kappa$ étant borné, il satisfait au principe classique du maximum (cf. par exemple, [9]). Donc $\kappa f_a \leqq \int g_a dt$ p.p. sur $[a, b]$, d'où $\kappa f \leqq \kappa_0 g$ p.p. sur $[a, b]$.

On obtiendra facilement l'inverse du lemme 2 dans la section 4. La proposition 4 résultra immédiatement des deux présents lemmes. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe associé au noyau $N_0$; alors il existe un noyau de convolution de Hunt $\kappa$ de $H_b(\boldsymbol{R}^+)$ tel que $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$. D'après le lemme 2, il existe un autre noyau de convolution $\kappa'$ sur $\boldsymbol{R}$ tel que $\operatorname{supp}(\kappa') \subset \boldsymbol{R}^+$ et $d(\kappa * \kappa')(t) = dt$ sur $\boldsymbol{R}^+$. D'après le lemme 1, on a

$$N * N_{(\kappa')} = N_0 .$$

Par conséquent, d'après le principe de domination pour $N$, on a évidemment $N \prec N_0$.

Pour simplifier la notation, on note $\bar{H}(X) = H(X) \cup \{0\}$ et $\bar{H}_b(X) = H_b(X) \cup \{0\}$.

DÉFINITION 2. Soit $N_0$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$. Une famille $C(N_0)$ contenue dans $\bar{H}(X)$ s'appelle un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N_0$ si elle est un cône convexe vaguement fermé de vertex 0 qui vérifie les conditions suivantes:

(1) $N_0 \in C(N_0)$.

(2) Pour un noyau de convolution de Hunt quelconque $N$ de $C(N_0)$, il existe un autre noyau de convolution de Hunt $N'$ de $C(N_0)$ tel que $N * N' = N_0$.

Dans (2), $N'$ est uniquement déterminé, d'après le principe d'unicité pour $N$[2], et il s'appellera le noyau dual de $N$ relatif au noyau $N_0$. La définition 2 est une notion induite de la formule classique de Riesz et de la proposition 1.

*Remarque* 1. Soient $N_0$ et $C(N_0)$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N_0$, respectivement; alors on a, quel que soit $N$ de $C(N_0)$, $N \prec N_0$. Cela résulte immédiatement de (2) et du principe de domination pour $N$.

PROPOSITION 5. *Soient $N_0$ et $C(N_0)$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N_0$, respectivement. Alors, pour tout le noyau de convolution de Hunt $N$ de $C(N_0)$, la résolvante associée au noyau $N$ est contenue dans $C(N_0)$.*

*Démonstration.* Soit $N'$ le noyau dual de $N$ relatif au noyau $N_0$. Alors, quel que soit $p > 0$, $N' + pN_0 \in C(N_0)$. Soit $\tilde{N}_p$ le noyau dual de $N' + pN_0$ relatif au noyau $N_0$; alors, quels que soient $p > 0$ et $q \geq 0$,

[2] Cela signifie que, quelle que soit $\mu$ une mesure de Radon réelle dans $X$, $\mu = 0$ dès que $N * \mu$ a un sens et $N * \mu = 0$.

$$(N' + pN_0)*\tilde{N}_p = (N' + qN_0)*\tilde{N}_q = N_0 \,.$$

On a, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}(N' + qN_0)*\tilde{N}_q &= (N' + pN_0 + (q-p)(N' + pN_0)*\tilde{N}_p)*\tilde{N}_q \\ &= (N' + pN_0)*(\tilde{N}_q + (q-p)\tilde{N}_p*\tilde{N}_q) \,.\end{aligned}$$

$N' + pN_0$ satisfaisant au principe d'unicité, on a $\tilde{N}_p - \tilde{N}_q = (q-p)\tilde{N}_p*\tilde{N}_q$, et donc $(\tilde{N}_p)_{p>0}$ est une résolvante. On a aussi $N - \tilde{N}_p = pN*\tilde{N}_p$ ($\forall p > 0$). $N$ étant un noyau de convolution de Hunt sur $X$, on a $\lim_{p\to 0} N_p = N$ (au sens de la topologie vague), d'où $(\tilde{N}_p)_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N$, où $\tilde{N}_0 = N$. La démonstration est ainsi complète.

On notera $m_1(\boldsymbol{R}^+)$ et $m(X)$ la totalité des mesures de Radon positives dans $\boldsymbol{R}^+$ de masse totale finie et la totalité des mesures de Rodon positives dans $X$, respectivement.

DÉFINITION 3. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans $X$ tel que, quelle que soit $\nu$ de $m_1(\boldsymbol{R}^+)$, $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$. Si l'application $m_1(\boldsymbol{R}^+) \ni \nu \to \int \alpha_t d\nu(t) \in m(X)$ est injective, alors ce semi-groupe est dit injectif.

Pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur $X$, $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$ ($\forall \nu \in m_1(\boldsymbol{R}^+)$).

*Remarque* 2. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans $X$ tel que $\int d\alpha_t \leqq 1$ ($t \geqq 0$); alors il existe une fonction définie-négative $\psi$ dans $\hat{X}$, et une seule telle que l'on ait $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$ ($t \geqq 0$) (cf. par exemple, [4]). Si $\{\psi(\hat{x}) \in \boldsymbol{C}; \hat{x} \in \hat{X}\} \cap \{z \in \boldsymbol{C}; \mathrm{Re.}\, z > 0\}$ contient un ensemble relativement compact et infini dans $\{z \in \boldsymbol{C}; \mathrm{Re.}\, z > 0\}$, alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est injectif. On note ici $\boldsymbol{C}$ le champ complexe et $\mathrm{Re.}\, z$ désigne la partie réelle de $z$.

En effet, il est évident que, quelle que soit $\nu$ de $m_1(\boldsymbol{R}^+)$, $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$, et on a

$$\widehat{\int \alpha_t d\nu(t)}(\hat{x}) = \int \exp(-t\psi(\hat{x}))d\nu(t)$$

pour tout $\hat{x}$ de $\hat{X}$. Posons $F_\nu(z) = \int \exp(-tz)d\nu(t)$ sur $\{z \in \boldsymbol{C}; \mathrm{Re.}\, z \geqq 0\}$;

alors $F_\nu$ est continue sur $\{z \in \boldsymbol{C}; \mathrm{Re}.\, z \geqq 0\}$ et elle est analytique dans $\{z \in \boldsymbol{C}; \mathrm{Re}.\, z > 0\}$. En utilisant le théorème de coïncidence dans la théorie classique de fonction et le fait que la transformation de Laplace est injective, on peut affirmer facilement que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est injectif.

Rappelons ensuite le théorème de Bernstein dans la théorie classique d'analyse harmonique.

PROPOSITION 4 (cf. par exemple, [13]). *Soit $\varphi$ une fonction non-négative et infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$. Pour que $\varphi$ soit complètement monotone, il faut et il suffit qu'il existe une measure de Radon positive $\lambda$ sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que*

$$\varphi(t) = \int \exp(-ts)d\lambda(s) \quad dans \quad (0, +\infty)\,.$$

On dit que $\varphi$ est complètement monotone si, quel que soit $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m \varphi^{(m)}(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$, où $\varphi^{(0)} = \varphi$ et $\varphi^{(m)}$ est la dérivée de $\varphi$ d'ordre $m$.

Nous montrerons notre premier théorème principal suivant:

THÉORÈME 1. *Soient $N$ et $(N_p)_{p\geqq 0}$ respectivement un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et la résolvante associée au noyau $N$. Alors la totalité des noyaux de convolution sur $X$ de la forme $c\varepsilon + \int N_p d\lambda(p)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$, où $c$ et $\lambda$ sont une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^+$, respectivement. En particulier, si le semi-groupe associé au noyau $N$ est injective, alors cela est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$ appartenant à $\overline{H}(N; X)$.*

On préparera d'abord un lemme élémentaire.

LEMME 3. *Soient $n$, $(p_i)_{i=0}^n$, $(a_i)_{i=0}^n$ et $c$ un entier positif, une famille de nombres avec $0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_n$, une famille de nombres positifs et un nombre positif, respectivement. La fonction*

$$f(t) = \cfrac{1}{ct + \sum_{i=0}^n \cfrac{a_i t}{t + p_i}}$$

*sur $\boldsymbol{R}$ est de la forme*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{t + q_i},$$

*où* $p_i < q_i < p_{i+1}$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$, $q_n > p_n$ *et* $b_i > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

Posons

$$g(t) = ct(t + p_1) \cdots (t + p_n) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i t(t + p_1) \cdots (t + p_n)}{t + p_i};$$

alors $g(-p_{2k}) > 0$ et $g(-p_{2m+1}) < 0$ dès que $2k \leqq n$ et $2m + 1 \leqq n$. D'autre part, il existe une constante positive $A$ telle que, quel que soit $t \geqq A$, $(-1)^n g(-t) < 0$. Donc il existe une famille $(q_i)_{i=0}^n$ de nombres positifs telle que $g(-q_i) = 0$ $(0 \leqq i \leqq n)$, $p_i < q_i < p_{i+1}$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ et $q_n > p_n$. Donc on peut écrire

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{t + q_i},$$

où $b_i$ est une constante réelle. Remarquons

$$f(t) = \frac{(t + p_1) \cdots (t + p_n)}{g(t)};$$

on a alors

$$\lim_{t \downarrow -q_i} f(t) = +\infty,$$

et par suite $b_i > 0$ $(0 \leqq i \leqq n)$, d'où notre lemme.

*Démonstration du théorème* 1. Soit $\kappa_0$ le noyau d'Heaviside sur $\boldsymbol{R}$; $(\kappa_p)_{p \geqq 0}$ désigne la résolvante associée au noyau $\kappa_0$. On a alors $\kappa_p = 0$ dans $(-\infty, 0)$ et $d\kappa_p(t) = \exp(-pt)dt$ sur $\boldsymbol{R}^+$. On notera $C_{\boldsymbol{R}}(\kappa_0)$ la totalité des noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}$ de la forme $c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)$, où $c$ et $\lambda$ sont une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$, respectivement.

On montrera d'abord que $C_{\boldsymbol{R}}(\kappa_0)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau $\kappa_0$. Il est bien connu que $C_{\boldsymbol{R}}(\kappa_0)$ appartient à $\overline{H}(\kappa_0; \boldsymbol{R}) = \overline{H}_b(\boldsymbol{R}^+)$ (cf. [7] et [11]). Evidemment $C_{\boldsymbol{R}}(\kappa_0)$ est un cône convexe de vertex 0. D'après le lemme 1, pour un noyau de convolution de Hunt $c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)$ de $C_{\boldsymbol{R}}(\kappa_0)$, il existe un noyau de convolution $\kappa'$ sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$, et un seul tel que l'on ait

$$\left(c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)\right) * \kappa' = \kappa_0 \,.$$

Pour que $\kappa'$ appartienne à $C_R(\kappa_0)$, il suffit que, quel que soit $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa' \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'après le théorème de Bernstein. Soit $\kappa'_n$ un noyau de convolution sur $X$ qui vérifie l'égalité

$$\left(\left(c + \frac{1}{n}\right)\varepsilon + \int_0^n \kappa_p d\lambda(p)\right) * \kappa'_n = \kappa_0 \,;$$

alors il est uniquement déterminé, et la suite $(\kappa'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\kappa'$ avec $n \to +\infty$. Donc on peut supposer que $c > 0$ et $\lambda$ est à support compact. Si $\lambda$ est de la forme

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon_{p_i} \,,$$

où $a_i > 0$, $p_0 = 0$, $p_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et $\varepsilon_{p_i}$ est la mesure de Dirac au point $p_i$, on a alors

$$\left(c + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{t + p_i}\right)\widetilde{\kappa'}(t) = \frac{1}{t}$$

dans $(0, +\infty)$, où $\widetilde{\kappa'}$ est la transformée de Laplace de $\kappa'$. On remarque ici que $\widetilde{\kappa'}$ a un sens, d'après le fait que $\kappa'$ est borné (cf. le lemme 2). Donc

$$\widetilde{\kappa'}(t) = \frac{1}{ct + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i t}{t + p_i}} \,.$$

D'après le lemme 3, on a

$$\widetilde{\kappa'}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{t + q_i} \,,$$

où $q_i > 0$ et $b_i > 0$, et par suite

$$\kappa' = \sum_{i=0}^{n} b_i \kappa_{q_i} \,,$$

d'où, quel que soit $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa' \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. En général, pour une mesure de Radon positive $\lambda$ dans $\boldsymbol{R}^+$ à support compact, il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de mesures de Radon positives sur $\boldsymbol{R}^+$ de la présente forme qui converge vaguement vers $\lambda$ avec $n \to +\infty$. On note encore $\kappa'_n$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}$ tel que

$$\left(c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda_n(p)\right) * \kappa'_n = \kappa_0 ,$$

et alors la suite $(\kappa'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\kappa'$ avec $n \to +\infty$. On a donc, quel que soit $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa' \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où $\kappa' \in C_R(\kappa_0)$. Supposons qu'une suite de $C_R(\kappa_0)$ converge vaguement vers un noyau de convolution $\kappa$ sur $\boldsymbol{R}$; alors on a aussi $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa \geqq 0$ au sens des distribution dans $(0, +\infty)$, et donc, d'après la proposition 6, $\kappa$ appartient à $C_R(\kappa_0)$. Par conséquent, $C_R(\kappa_0)$ est vaguement fermé, d'où $C_R(\kappa_0)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau $\kappa_0$.

Soit $C(\kappa_0)$ un autre cône convexe de Riesz relatif au noyau $\kappa_0$. D'après la proposition 5, on a $C_R(\kappa_0) \subset C(\kappa_0)$. On remarque ici que $\varepsilon \in C(\kappa_0)$ résulte de $\kappa_0 \in C(\kappa_0)$. D'après le lemme 2, on a, quel que soit $\kappa$ de $C(\kappa_0)$, $-(d/dt)\kappa \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Soit $m$ un entier positif et supposons que, quel que soit $\kappa$ de $C(\kappa_0)$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Soit $\kappa$ un noyau de convolution de Hunt quelconque de $C(\kappa_0)$; $\kappa'$ désigne le noyau dual de $\kappa$ relatif au noyau $\kappa_0$. On note ensuite $(\kappa'_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $\kappa'$; alors $(\kappa'_p)_{p\geqq 0} \subset C(\kappa_0)$ (cf. la proposition 5). On a

$$(p\kappa'_p)*\kappa = p\kappa*\kappa' - p^2\kappa*\kappa'*\kappa'_p = p\kappa_0 - p^2\kappa_0*\kappa'_p ,$$

et par suite

$$(-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(p\kappa'_p)*\kappa = p(-1)^{m+1}\frac{d^m}{dt^m}\varepsilon + p^2(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\kappa'_p .$$

Par conséquent, on a

$$(-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(p\kappa'_p)*\kappa \geqq 0$$

au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Faisant $p \to +\infty$, on obtient

$$(-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\kappa \geqq 0$$

au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, car $\lim_{p\to+\infty} p\kappa'_p = \varepsilon$ (au sens de la topologie vague). Par récurrence on obtient, quels que soient $\kappa$ de $C(\kappa_0)$ et $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa \geqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où $C_R(\kappa_0) \supset C(\kappa_0)$. Donc $C_R(\kappa_0)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau $\kappa_0$.

Soient $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. On désignera par $C_R(N)$ la totalité des noyaux de convolution sur $X$ de la forme $c\varepsilon + \int N_p d\lambda(p)$, où $c$ et $\lambda$ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^+$. Alors cela est évidemment un cône convexe de vertex 0 vérifiant les conditions (1), (2) dans la définition 1, car on a, quelle que soit $\lambda$ une mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$,

$$\int N_p d\lambda(p) = \int_0^\infty \alpha_t \int \exp(-pt) d\lambda(p) dt\ ,$$

où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau $N$. Montrons que $C_R(N)$ est vaguement fermé. Si une famille $\left(\int N_p d\lambda_\alpha(p)\right)_{\alpha\in A}$ est vaguement bornée dans $X$, alors $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ est aussi vaguement bornée sur $\boldsymbol{R}^+$. Donc il suffit de montrer que si une suite $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ de mesures de Radon positives sur $\boldsymbol{R}^+$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive $\lambda$ sur $\boldsymbol{R}^+$ et si $\left(\int N_p d\lambda_n(p)\right)_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée dans $X$, alors tout sa sous-suite converge vaguement vers un noyau de convolution de $C_R(N)$ dès qu'elle converge vaguement. On a, quelle que soit $f$ une fonction de $C_K(\boldsymbol{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int f(p) N_p d\lambda_n(p) = \int f(p) N_p d\lambda(p)$$

au sens de la topologie vague dans $X$. Donc on peut supposer qu'il existe un nombre $r > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\lambda_n) \subset [r, +\infty)$ $(\forall n \geqq 1)$. Evidemment la suite $\left(\int \kappa_p d\lambda_n(p)\right)_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée dans $R$, et on peut supposer qu'elle converge vaguement vers un noyau de convolution $\kappa$ de $C_R(\kappa_0)$ avec $n \to +\infty$. De la même manière que pour $C_R(\kappa_0)$, on obtient que $C_R(\kappa_r)$ est aussi un cône convexe de Riesz relatif au noyau $\kappa_r$. La famille

$(\kappa_{r+p})_{p\geqq 0}$ étant la résolvante associée au noyau $\kappa_r$, on a $\left(\int \kappa_p d\lambda_n(p)\right)_{n=1}^{\infty}$ $\subset C_R(\kappa_r)$ et $\kappa \in C_R(\kappa_r)$. On peut supposer $\lambda_n \neq 0$ ($\forall n \geqq 1$), $\lambda \neq 0$, et donc $\kappa \neq 0$. Soient $\kappa_n'$ et $\kappa'$ le noyau dual de $\int \kappa_p d\lambda_n(p)$ et le noyau dual de $\kappa$ relatifs au noyau $\kappa_r$, respectivement. Alors $(\kappa_n')_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\kappa'$ avec $n \to +\infty$. Ayant

$$\iint d\kappa_p d\lambda_n(p) \int d\kappa_n' = \int \frac{1}{p}\, d\lambda_n(p) \int d\kappa_n' = \int d\kappa_r = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \int d\kappa \int d\kappa' = \frac{1}{r}\,,$$

on obtient que la suite $\left(\int \frac{1}{p} d\lambda_n(p)\right)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. D'autre part, on a, quelle que soit $f$ une fonction de $C_K(X)$, $\lim_{t\to+\infty} \alpha_t * f(0) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int N_p d\lambda_n(p) = \int \alpha_t d\kappa(t)$$

au sens de la topologie vague dans $X$. Par conséquent, $C_R(N)$ est vaguement fermé, d'où $C_R(N)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$.

Supposons finalement que le semi-groupe $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ associé au noyau $N$ est injectif. Soit $C(N)$ un cône convexe de Riesz quelconque relatif au noyau $N$ appartenant à $\overline{H}(N; X)$. Pour que $C(N) = C_R(N)$, il suffit de montrer que la famille

$$C_R'(\kappa_0) = \left\{\kappa \in \overline{H}_b(\boldsymbol{R}^+)\,;\, \int \alpha_t d\kappa(t) \in C(N)\right\}$$

appartient à $C_R(\kappa_0)$, car on a toujours $C(N) \supset C_R(N)$. $C_R'(\kappa_0)$ est évidemment un cône convexe de vertex 0. Soit $\kappa$ un noyau de convolution de $H_b(\boldsymbol{R}^+) \cap C_R'(\kappa_0)$; alors il existe un autre noyau de convolution $\kappa'$ de $H_b(\boldsymbol{R}^+) \cap C_R'(\kappa_0)$ tel que

$$N = \left(\int \alpha_t d\kappa(t)\right) * \left(\int \alpha_t d\kappa'(t)\right) = \int \alpha_t d(\kappa * \kappa')(t)\,.$$

Soient $(\tilde{\kappa}_p)_{p\geqq 0}$ et $(\tilde{\kappa}_p')_{p\geqq 0}$ respectivement la résolvante associée au noyau $\kappa$ et la résolvante associée au noyan $\tilde{\kappa}$; on a alors, pour trois nombres $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$,

$$\int \alpha_t d\kappa_p * (\varepsilon - q\tilde{\kappa}_q) * (\varepsilon - r\tilde{\kappa}_r')(t) = \int \alpha_t d\tilde{\kappa}_q * \tilde{\kappa}_r' * (\varepsilon - p\kappa_p)(t)\,.$$

Ayant $\int d|\kappa_p*(\varepsilon - p\tilde{\kappa}_p)*(\varepsilon - p\tilde{\kappa}'_p)| < +\infty$ et $\int d|\tilde{\kappa}_q*\tilde{\kappa}'_r*(\varepsilon - p\kappa_p)| < +\infty$, on obtient

$$\kappa_p*(\varepsilon - q\tilde{\kappa}_q)*(\varepsilon - r\kappa'_r) = \tilde{\kappa}_q*\tilde{\kappa}'_r*(\varepsilon - p\kappa_p) .$$

Faisant séparément $p\downarrow 0$, $q\downarrow 0$ et $r\downarrow 0$, on a $\kappa_0 = \kappa*\kappa'$. Donc, de la même manière que ci-dessus, on a $C'_R(\kappa_0) \subset C_R(\kappa_0)$. La démonstration est ainsi complète.

*Remarque* 3. Soient $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et $(C_\alpha(N))_{\alpha\in A}$ une famille de cônes convexes de Riesz relatifs au noyau $N$. Alors $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha(N)$ est aussi un cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$. $C_R(N)$ est le plus petit cône convexe de Riesz relatif au noyau $N$.

## 4. Les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine.

Dès maintenant, $X$ est toujours l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ à $n$ ($\geqq 1$) dimensions. Pour un point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, on notera $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. On désignera par $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ et $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions complexes et infiniment dérivables dans $X$ à support compact, et l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions complexes et infiniment dérivables dans $X$ à décroissance rapide. Soit $k$ un entier non-négatif. On notera

$\theta_0^k$ (resp. $\theta_s^k$) l'idéal de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{S}$) constitué par toutes les fonctions qui s'annulent ainsi que leurs dérivées d'ordre $< k$ à l'origine,

$\widehat{\theta_0^k}$ (resp. $\widehat{\theta_s^k}$) l'idéal de convolution formé des fonctions $\varphi \in \mathscr{D}$ (resp. $\in \mathscr{S}$) telles que, quel que soit $\alpha$ un multi-indice avec $|\alpha| < k$, $\int x^\alpha \varphi(x)dx = 0$.

Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, on écrit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, $x^\alpha$ désigne $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. La définition suivante est mis en ordre par C. S. Herz [4].

DÉFINITION 4. (i) Soit $k$ un entier non-négatif. Une distribution $u$ dans $R^n$ sera dite $k$-conditionnellement positive si, quelle que soit $\varphi$ de $\theta_0^k$, $u(|\varphi|^2) \geqq 0$.

(ii) Une distribution $v$ dans $\boldsymbol{R}^n$ sera dite $k$-conditionnellement de type positif si, quelle que soit $\varphi$ de $\widehat{\theta_0^k}$, $v*\varphi*\overset{*}{\varphi}(0) \geqq 0$, où $\overset{*}{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

Si une distribution $v$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est $k$-conditionnellement de type positif, alors $v$ est une distribution dans $R^n$ à croissance lente (cf. [4]), et donc, quelle que soit $\varphi$ de $\theta_s^k$, $v*\varphi*\tilde{\varphi}(0) \geqq 0$, car $\theta_0^k$ est dense dans $\theta_s^k$. C. S. Herz [4] montre le théorème fondamental suivant, qui est une généralisation du théorème de Bochner.

PROPOSITION 7. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(a) *Une distribution $v$ dans $R^n$ est $k$-conditionnellement de type positif.*

(b) $v = \hat{u}$, *où $u$ est une distribution $k$-conditionnellement positive dans $R^n$ à croissance lente.*

Rappelons ici que, dans cette note, la signe $\wedge$ représente la transformation de Fourier. D'après la définition de fonction définie-négative, on obtient immédiatement que, pour une fonction définie-négative $\psi$ dans $R^n$, $-\psi$ est 1-conditionnellement de type positif. Rappelons que, d'après le théorème de Lévy-Khinchine, une fonction définie-négative $\psi$ dans $R^n$ est de la forme

$$\psi(x) = c + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\sqrt{-1} + \int\left(1 - \frac{x\cdot y}{1+|y|^2}\sqrt{-1} - \exp(x\cdot y\sqrt{-1})\right)d\sigma(y) ,$$

où $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $x\cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $c \geqq 0$, $a_{ij}$ et $b_i$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ sont constantes réelles; $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ est une forme quadratique non-négative; $\sigma$ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine avec

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2}d\sigma(x) < +\infty .$$

*Remarque* 4. Soient $\psi$ une fonction définie-négative dans $R^n$ et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans $R^n$ tel que $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$. Alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est injectif dès que $\psi \neq 0$. Cela résulte immédiatement de la remarque 2.

En particulier, si une fonction définie-négative $\psi$ dans $R^n$ est invariante par rotations, alors elle est non-négative et de la forme

$$\psi(x) = c_1 + c_2|x|^2 + \int (1 - \exp(x\cdot y\sqrt{-1}))d\sigma(y) ,$$

où $c_i$ $(i = 1, 2)$ est une constante non-négative et $\sigma$ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations et vérifiant la présente inégalité.

LEMME 4. *Soit $\varphi$ une fonction non-négative et continue sur $\boldsymbol{R}^+$. Si, pour un entier positif $m$, $\psi_m(x) = \varphi(|x|)$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^m$, alors, quel que soit $n$ un entier positif avec $n \leqq m$, la fonction $\psi_n(x) = \varphi(|x|)$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est aussi définie-négative.*

Il est facile de voir ce lemme. Dans le présent lemme, pour un entier $n > m$, la fonction $\psi_n(x) = \varphi(|x|)$ dans $\boldsymbol{R}^n$ n'est pas toujours définie-négative (voir [11]).

DÉFINITION 5. (i) Un noyau de convolution $N$ sur $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement sous-harmonique si l'on a $\Delta N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

(ii) $N$ est dit complètement sous-harmonique en dehors de l'origine si l'on a, quel que soit $k$ un entier non-négatif, $\Delta^k N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

On note ici $\Delta$ l'opérateur de Laplace sur $\boldsymbol{R}^n$, et $\Delta^1 = \Delta$, $\Delta^k = (\Delta^{k-1})\Delta$.

LEMME 5. *Soit $\varphi$ une fonction infiniment dérivable dans* $(0, +\infty)$. *Si, quel que soit $k$ un entier non-négatif, $\varphi^{(2k)} \geqq 0$ et $\overline{\lim}_{t\to+\infty}\varphi(t) < +\infty$, alors $\varphi$ est complètement monotone.*

En effet, $\varphi$ est convexe et on a $\overline{\lim}_{t\to+\infty}\varphi(t) < +\infty$, et donc $-\varphi'(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. Supposons qu'il existe un entier positif $k$ tel que $\varphi^{(2k)}$ ne soit pas décroissante au sens large. On peut supposer ici que, quel que soit $m$ un entier non-négatif avec $m < k$, $\varphi^{(2m)}$ est décroissante au sens large. Donc $\lim_{t\to+\infty}\varphi^{(2m)}(t) < +\infty$. Soit $t_0$ un nombre positif tel que $\varphi^{(2k+1)}(t_0) > 0$. Alors

$$\varphi^{(2k+1)}(t) \geqq \varphi^{(2k+1)}(t_0) \quad \text{sur} \quad [t_0, \infty)\,,$$

et donc

$$\varphi^{(2k)}(t) \geqq \varphi^{(2k+1)}(t_0)(t - t_0)$$

pour tout $t$ de $[t_0, +\infty)$. Soit $f$ une fonction non-négative et non-zéro de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1)$; alors

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} \int \varphi^{(2k)}(|t-s|)f(s)ds \geqq \underline{\lim}_{t\to+\infty} \int \varphi^{(2k+1)}(t_0)(|t-s| - t_0)f(s)ds = +\infty\,.$$

On a, d'autre part,

$$\lim_{t\to+\infty}\int\varphi^{(2k)}(|t-s|)f(s)ds=\lim_{t\to+\infty}\int\varphi^{(2k-2)}(|t-s|)f''(s)ds<+\infty\ ,$$

d'où une contradiction. Par conséquent, quel que soit $m$ un entier non-négatif, $(-1)^m\varphi^{(m)}\geqq 0$.

Dans le présent lemme, on peut remplacer $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)/t=0$ au lieu de la condition $\overline{\lim}_{t\to+\infty}\varphi(t)<+\infty$. Dès maintenant, nous considérerons principalement les noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ invariants par rotations.

LEMME 6. *Soit $N$ un noyau de convolution borné et conditionnellement sous-harmonique sur $\boldsymbol{R}^n$ invariant par rotations; alors il existe une fonction définie-négative $\psi$ dans $\boldsymbol{R}^n$ invariante par rotations, et une seule telle que $\psi=-\widehat{\Delta N}$.*

En effet, on remarque d'abord que $N$ s'écrit

$$dN=cd\varepsilon+\Phi(|x|)dx\ ,$$

où $c$ et $\Phi$ sont respectivement une constante non-négative et une fonction finie et continue dans $(0,+\infty)$, car $N$ est évidemment absolument continu par rapport à la mesure de Lebegue et sa dénsité est sous-harmonique au sens des distributions en dehors de $O$ et invariante par rotations. Pour une fonction quelconque $f$ de $C_K^+(\boldsymbol{R}^n)$ invariante par rotations, $N*f$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^n$ et sous-harmonique dans $\left\{x\in\boldsymbol{R}^n;|x|>\sup_{y\in\mathrm{supp}(f)}|y|\right\}$, Donc $\Phi$ est décroissante au sens large dans $(0,+\infty)$. Par conséquent, pour notre lemme, on peut supposer que $\Phi$ tend vers 0 avec $t\to+\infty$. $N$ satisfaisant au principe classique du maximum et étant égal à une fonction en dehors de l'origine, $N$ est de type positif (cf. [8]), et par suite $-\Delta N$ est aussi de type positif au sens des distributions. Soit $\sigma$ la restriction de $\Delta N$ en dehors de l'origine; alors $\sigma$ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations. Pour un nombre positif $r$, on pose $\sigma_r$ la restriction de $\sigma$ sur $\{x\in\boldsymbol{R}^n;|x|\geqq r\}$, et alors elle est considérée comme une mesure de Radon positive dans $\boldsymbol{R}^n$. Quelle que soit $\varphi$ de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$, la fonction $(-\Delta N+\sigma_r)*\varphi*\check{\bar{\varphi}}-\sigma_r*\varphi*\check{\bar{\varphi}}$ est de type positif, et par suite

$$\int\sigma_r*\varphi*\check{\bar{\varphi}}dx\leqq\int(-\Delta N+\sigma_r)*\varphi*\check{\bar{\varphi}}dx<+\infty\ ,$$

car $(-\Delta N+\sigma_r)*\varphi*\check{\bar{\varphi}}$ est à support compact. Par conséquent, $\int d\sigma_r < +\infty$.

D'autre part, soit $\varphi_1$ une fonction non-négative de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ invariante par rotations telle que $\varphi_1 \leqq 1$ et $\varphi_1(x)=1$ sur $\{x\in \boldsymbol{R}^n; |x|\leqq 1\}$; on pose, pour un entier positif $m$, $\varphi_m(x)=\varphi_1(mx)$. On a alors

$$\lim_{m\to+\infty}\int \Delta(|x|^2(\varphi_m(x))^2)\Phi(|x|)dx = 0\ ,$$

et par suite, en utilisant la formule de Green,

$$\begin{aligned}+\infty &> \int \Delta(|x|^2(\varphi_1(x))^2)\Phi(|x|)dx\\ &= \lim_{m\to+\infty}\int \Delta(|x|^2((\varphi_1(x))^2-(\varphi_m(x))^2))\Phi(|x|)dx\\ &= \lim_{m\to+\infty}\int |x|^2((\varphi_1(x))^2-(\varphi_m(x))^2)d\sigma(x) \geqq \int_{1\geqq|x|>0}|x|^2 d\sigma(x)\ ,\end{aligned}$$

d'où

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2}d\sigma(x) < +\infty\ .$$

Par conséquent, on peut écrire

$$-\widehat{\Delta N}(x) = c' + c|x|^2 + \int (1-\exp(x\cdot y\sqrt{-1}))d\sigma(y)\ ,$$

où $c'$ est une autre constante réelle, car $-\Delta N$ est une distribution dans $\boldsymbol{R}^n$ invariante par rotations et d'ordre $\leqq 2$. En utilisant encore le fait que $-\Delta N$ est de type positif, on a $c'\geqq 0$, d'où $-\widehat{\Delta N}$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$.

Si $n\geqq 3$, $1/\psi$ est localement sommable dès que $N$ n'est pas constant. Mais, dans le cas où $n=1,2$, cela n'est pas toujours vrai.

On notera $S_{r,0}=S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$ la totalité des noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations et s'annulant à l'infini.

*Remarque* 5. Soit $N$ un noyau de convolution borné sur $\boldsymbol{R}^n$ complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations; alors il est de la forme $N=N_0+c$, où $N_0$ est de $S_{r,0}$ et $c$ est une constante $\geqq 0$.

Le lemme suivant est obtenu par C. S. Herz [4].

LEMME 7. *Soit $k$ un entier positif; alors les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(a) *Une distribution $v$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est $k$-conditionnellement de type positif.*

(b) $v = p_{2k}(x) + v'$, *où $p_{2k}$ est un polynôme homogène de degré $2k$ et fortement positif et $v'$ est conditionnellement de type positif et vérifiant $v' = o(|x|^{2k})$ à l'infini.*

$v'$ est dite conditionnellement de type positif s'il existe un entier $k' \geqq 0$ tel que $v'$ soit $k'$-conditionnellement de type positif. $v' = o(|x|^{2k})$ à l'infini signifie que, quelle que soit $\varphi$ de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$, $v' * \varphi = o(|x|^{2k})$ à l'infini.

D'après le lemme 7, on obtiendra facilement le lemme suivant:

LEMME 8. *Soit $N$ un noyau de convolution de $S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$. Alors, quel que soit $k$ un entier positif, $\Delta^k N$ est $k$-conditionnellement positive.*

En effet, posons $\psi = -\widehat{\Delta N}$; alors $\psi$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$. On a donc

$$\Delta^k N(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)} \psi(x) .$$

On peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \exp(x \cdot y \sqrt{-1})) d\sigma(y)$$

où $c_i$ $(i = 1, 2)$ est une constante non-négative et $\sigma$ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations avec

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d\sigma(x) < +\infty .$$

Soit $v$ la distribution dans $\boldsymbol{R}^n$ définie par la fonction $x \to (-1)^k |x|^{2(k-1)}(\psi(x) - c_2 |x|^2)$; alors $v = o(|x|^{2k})$ à l'infini. La distribution $\Delta^k(N - c_2\varepsilon)$ vérifie la condition: Quelle que soit $\varphi \geqq 0$ de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ avec $\mathrm{supp}(\varphi) \not\ni O$, on a $\Delta^k(N - c_2\varepsilon)(\varphi) \geqq 0$. En utilisant le fait que la distribution $\Delta^k(N - c_2\varepsilon)$ est d'ordre fini dans un voisinage de l'origine, il existe un entier positif $k'$ tel que $\Delta^k(N - c_2\varepsilon)$ est $k'$-conditionnellement positive, et par suite $v$ est $k'$-conditionnellement de type positif, d'après la proposition 7. $v$ est donc $k$-conditionnellement de type positif (cf. le lemme 7). Par conséquent, $\Delta^k N = c_2 \Delta^k + \Delta^k(N - c_2\varepsilon)$ est $k$-conditionnellement positive.

LEMME 9. *Soit $\varphi$ une fonction finie et continue sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que,* *pour un entier positif $n$, $\varphi(|x|)$ soit définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$. Si, pour un entier positif $k$, la fonction $\psi_n(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)}\varphi(|x|)$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est $k$-conditionnellement de type positif, alors la fonction $\psi_1(t) = (-1)^k |t|^{2(k-1)}\varphi(|t|)$ dans $\boldsymbol{R}^1$ est aussi $k$-conditionnellement de type positif.*

En effet, soit $f_1$ une fonction de $\mathscr{D}^+(\boldsymbol{R}^n)$ invariante par rotations telle que

$$\operatorname{supp}(f_1) \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| \leqq 1\} \quad \text{et} \quad \int f_1 dx = 1 .$$

On pose ensuite, quel que soit $m$ un entier positif, $f_m(x) = m^n f_1(mx)$. En posant

$$\psi_{1,m}(t) = \psi_n * f_m * f_m\,(t, 0, \cdots, 0) ,$$

on obtient que la suite $(\psi_{1,m})_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $\psi_1$ sur tout compact de $\boldsymbol{R}^1$ avec $m \to +\infty$. $\psi_n$ étant $k$-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$, la fonction

$$\psi_n * \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1{}^k} f_m\right) * \widecheck{\left(\frac{\partial^k}{\partial x_1{}^k} f_m\right)} = (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1{}^{2k}} (\psi_n * f_m * f_m)$$

est de type positif. La fonction $\psi_n * f_m * f_m$ étant invariante par rotations, on a

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1{}^{2k}} (\psi_n * f_m * f_m)(t, 0, \cdots, 0) = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \psi_{1,m}(t)$$

pour tout $t$ de $\boldsymbol{R}^1$. Par conséquent,

$$(-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \psi_{1,m}$$

est de type positif. Faisant $m \to +\infty$, on obtient que $(-1)^k (d^{2k}/dt^{2k})\psi_1$ est de type positif au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^1$, d'où, quelle que soit $f$ de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1)$,

$$\psi_1 * \left(\frac{d^k}{dt^k} f\right) * \left(\frac{d^k}{dt^k} f\right)^{*}(0) \geqq 0 .$$

On remarque ici que, dans $\boldsymbol{R}^1$,

$$\theta_0^k = \left\{\frac{d^k}{dt^k} f \,;\, f \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1)\right\} ,$$

qui est facilement montré. C. S. Herz a montré sa forme générale (cf. [4]). Par conséquent, $\psi_1$ est $k$-conditionnellement de type positif.

Dans cette note, on notera toujours $G_0^{(n)}$ ou bien $r^{2-n}$ le noyau newtonien. Dans ce cas, on peut supposer $\widehat{G_0^{(n)}} = 1/|x|^2$. Pour tout $p > 0$, il existe le noyau de convolution de Dirichlet $G_p^{(n)}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 1)$ dont la transformée de Fourier est de la forme

$$\widehat{G_p^{(n)}}(x) = \frac{1}{p + |x|^2}\ .$$

La famille $(G_p^{(n)})_{p>0}$ est évidemment une résolvante. On a $\lim_{p\to 0} G_p^{(n)} = G_0^{(n)}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$, et dans ce cas, $(G_p^{(n)})_{p\geqq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau newtonien.

THÉORÈME 2. (1) *Soit $N$ un noyau de convolution borné sur $\boldsymbol{R}^n$ complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations; alors il est de la forme*

$$N = c_1 + c_2\varepsilon + \int G_p^{(n)} d\lambda(p)\ ,$$

*où $c_i$ $(i = 1, 2)$ et $\lambda$ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$, et $N$ satisfait au principe complet du maximum.*

(2) *Dans $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$, $S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur $R^n$ et constitué par de noyaux de convolution invariants par rotations.*

*Démonstration.* On montrera d'abord l'énoncé (1). D'après le lemme 6, il existe une fonction non-négative, finie et continue $\varphi$ sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que la fonction

$$-\widehat{\Delta N}(x) = \varphi(|x|)$$

soit définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$. Posons $\psi_1(t) = \varphi(|t|)$ sur $\boldsymbol{R}^1$; alors $\psi_1$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^1$. Pour tout l'entier positif $k$, $\Delta^k N$ est $k$-conditionnellement positive, et donc la fonction

$$\psi_{n,k}(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)} \varphi(|x|)$$

dans $\boldsymbol{R}^n$ est $k$-conditionnellement de type positif (au sens des distributions). D'après le présent lemme, la fonction

$$\psi_{1,k}(t) = (-1)^k |t|^{2(k-1)} \varphi(|t|)$$

est $k$-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$. Soit $u$ la distribution 1-conditionnellement positive dans $\boldsymbol{R}^1$ dont la transformée de Fourier est égale à $-\psi_1$. Ayant, quel que soit $k$ un entier non-négatif,

$$\widehat{\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}u}(t) = (-1)^{k+1} |t|^{2k} \psi_1(t) ,$$

on obtient que $(d^{2k}/dt^{2k})u$ est $(k+1)$-conditionnellement positive. Donc il existe une fonction non-négative et infiniment dérivable $\varphi_1$ dans $(0, +\infty)$ telle que $u = \varphi_1(|t|)dt$ en dehors de l'origine et, quel que soit $k$ un entier non-négatif, $(d^{2k}/dt^{2k})\varphi_1(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. $\psi_1$ étant définie-négative, on peut écrire

$$\psi_1(t) = c_1 + c_2 t^2 + \int (1 - \exp(ts\sqrt{-1}))d\sigma(s) ,$$

où $c_i$ $(i = 1, 2)$ et $\sigma$ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive en dehors de l'origine avec $\int \frac{t^2}{1+t^2} d\sigma(t) < +\infty$. On a $u = \sigma$ en dehors de l'origine, et par suite

$$\int \frac{t^2}{1+t^2} \varphi_1(|t|)dt < +\infty .$$

On a donc $\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = 0$. D'après le théorème de Bernstein et le lemme 5, il existe une mesure de Radon positive $\lambda$ sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que

$$\varphi_1(t) = \int \exp(-ts)d\nu(s) \qquad (\forall t > 0) .$$

D'après $\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = 0$, on a $\nu(\{0\}) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int (1 - \exp(ts\sqrt{-1}))\varphi_1(|s|)ds \\
&\quad = \int\Big(\int_{s>0} (1 - \exp(ts\sqrt{-1})) \exp(-sr)ds \\
&\qquad + \int_{s<0} (1 - \exp(ts\sqrt{-1})) \exp(sr)ds\Big)d\nu(r) \\
&\quad = 2\int\Big(\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s - t\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{s + t\sqrt{-1}}\Big)d\nu(s) = 2\int\Big(1 - \frac{s^2}{s^2+t^2}\Big)\frac{1}{s}d\nu(s) \\
&\quad = 2\int (1 - s^2\widehat{G_{s^2}^{(1)}}(t))\frac{1}{s}d\nu(s) .
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\psi_1(t) = c_1 + c_2 t^2 + 2\int (1 - s^2 \widehat{G_{s^2}^{(1)}}(t))\frac{1}{s} d\nu(s) \ ,$$

et par suite

$$-\widehat{\varDelta N}(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + 2\int (1 - s^2 \widehat{G_{s^2}^{(n)}}(x))\frac{1}{s} d\nu(s)$$

dans $\boldsymbol{R}^n$. Soit $N_0$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ de $S_{r,0}$ tel que $N - N_0$ soit constant (cf. la remarque 5). Alors la transformée de Fourier de $N_0$ est égale à une fonction et on a

$$\begin{aligned}\hat{N}_0(x) &= \frac{c_1}{|x|^2} + c_2 + \frac{2}{|x|^2}\int (1 - s^2 \widehat{G_{s^2}^{(n)}}(x))\frac{1}{s} d\nu(s) \\ &= \frac{c_1}{|x|^2} + c^2 + 2\int \widehat{G_{s^2}^{(n)}}(x)\frac{1}{s} d\nu(s) \ .\end{aligned}$$

Si $n = 1, 2$, alors $c_1 = 0$, car $\hat{N}_0$ est localement summable. Soit $\lambda$ la mesure de Radon positive sur $\boldsymbol{R}^+$ définie par

$$\int f d\lambda = 2\int f(t^2)\frac{1}{t} d\nu(t) + c_1 f(0)$$

pour toute la fonction $f$ de $C_K(\boldsymbol{R}^+)$. Posons encore $c_1 = N - N_0$; alors

$$N = c_1 + c_2\varepsilon + \int G_s^{(n)} d\lambda(s) \ .$$

D'après la proposition 1, $N_0$ est un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ dès que $N_0 \neq 0$, et par suite $N$ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration de (1) est ainsi complète.

Avant la démonstration de l'énoncé (2), on préparera le lemme suivant:

LEMME 10. *Soit $C(r^{2-n})$ un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur $\boldsymbol{R}^n$ ($n \geqq 3$). Alors tout l'élément de $C(r^{2-n})$ est complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et s'annulant à l'infini.*

En effet, d'après la remarque 1, on a, quel que soit $N$ de $C(r^{2-n})$, $N \prec G_0^{(n)}$, et par suite, $N$ s'annule à l'infini. Soit $N$ un noyau de convolution de Hunt quelconque sur $X$ contenu dans $C(r^{2-n})$; on désigne par $N'$ son noyau dual relatif au noyau newtonien. Alors on a $(-\varDelta N) * N' = \varepsilon$.

$N'$ étant un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$, on a $N' = \int_0^\infty \alpha'_t dt$, où $(\alpha'_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans $X$ avec $\int d\alpha'_t \leqq 1$. Donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon - \alpha'_t}{t} = -\varDelta N$$

au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$, d'où $\varDelta N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Soit $m$ un entier positif et supposons que, quel que soit $N$ de $C(r^{2-n})$, $\varDelta^m N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Soit $N$ un noyau de convolution de Hunt de $C(r^{2-n})$; on désigne ensuite par $N'$ le noyau dual de $N$ relatif au noyau newtonien, et par $(N'_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N'$. On a alors $(N'_p)_{p\geqq 0} \subset C(r^{2-n})$, d'après la proposition 5. Ayant, quel que soit $p > 0$,

$$(pN'_p) * N = pN * N' - p^2 N * N' * N'_p = pG_0^{(n)} - p^2 G_0^{(n)} * N'_p ,$$

on obtient donc

$$\varDelta^{m+1}(pN'_p) * N = -p\varDelta^m + p^2 \varDelta^m N'_p$$

au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$. D'après notre hypothèse, on a

$$\varDelta^{m+1}(pN'_p) * N \geqq 0$$

au sens des distributions en dehors de l'origine. D'après $p\int dN'_p \leqq 1$ ($\forall p > 0$) et $\lim_{p\to+\infty} pN'_p = \varepsilon$ (au sens de la topologie vague), on a $\varDelta^{m+1}N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Par récurrence $N$ est complètement sous-harmonique en dehors de l'origine, d'où notre lemme.

Montrons (2) dans le théorème 2. D'après le théorème 1, la totalité $C_R(r^{2-n})$ des noyaux de convolution $N$ sur $\boldsymbol{R}^n$ de la forme $N = c\varepsilon + \int G_p^{(n)} d\lambda(p)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien, où $c$ et $\lambda$ sont respectivement une constante $\geqq 0$ et une mesure de Radon positive sur $R^+$. Soit $C(r^{2-n})$ un cône convexe de Riesz quelconque relatif au noyau newtonien sur $\boldsymbol{R}^n$ et constitué par noyaux de convolution invariants par rotations. D'après l'énoncé (1), on a $S_{r,0} \subset C_R(r^{2-n})$, et d'après la remarque 3, $C_R(r^{2-n}) \subset C(r^{2-n})$. En utilisant finalement le lemme 10, $C(r^{2-n}) \subset S_{r,0}$, d'où $S_{r,0} = C(r^{2-n})$. La démonstration est ainsi complète.

*Remarque* 6. Pour un noyau de convolution de Hunt borné $\kappa$ sur $\boldsymbol{R}$ porté par $\boldsymbol{R}^+$ et pour un nombre $p > 0$, le noyau de convolution

$$N_{(\kappa,p)} = \int \alpha_t \exp(-pt) d\kappa(t)$$

sur $\boldsymbol{R}^n$ est aussi un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$, où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau newtonien, car le noyau de convolution $\kappa_{(p)}$ sur $\boldsymbol{R}$ satisfait au principe complet du maximum, où $d\kappa_{(p)}(t) = \exp(-pt)d\kappa(t)$. Est-ce qu'une discussion analogue pour $(N_{(\kappa,p)})_{p\geqq 0}$ a lieu?

Nous discuterons finalement sur une généralisation du théorème de Bernstein.

Soit $C^\infty(0, +\infty)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions réelles et infiniment dérivables dans $(0, +\infty)$ muni des semi-normes

$$p_{m,k}(f) = \sup_{1/m \leqq t \leqq m} |f^{(k)}(t)| \qquad (m = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, 2, \cdots) .$$

Rappelons le théorème de Krein-Milman et le lemme 5. Alors le théorème de Bernstein affirme l'éconcé suivant:

Le sous-ensemble

$$\begin{aligned} CM_1 = \{f \in C^\infty(0, +\infty) ; f^{(2k)}(t) \geqq 0 \\ \text{dans } (0, +\infty),\ \overline{\lim_{t\to 0}} f(t) \leqq 1,\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} f(t) < +\infty\} \end{aligned}$$

est convexe et compact dans $C^\infty(0, +\infty)$, et on a

$$\text{ex.}\ CM_1 = \{g_p ; 0 \leqq p \leqq \infty\} ,$$

où ex. $CM_1$ est l'ensemble des points extrêmes de $CM_1$, $g_p(t) = \exp(-\sqrt{p}t)$ $(0 \leqq p < \infty)$ et $g_\infty(t) = 0$.

DÉFINITION 6. Soit $\alpha$ un entier non-négatif. Une fonction $f$ de $C^\infty(0, +\infty)$ sera dite compètement monotone d'ordre $\alpha$ si l'on a, quel que soit $k$ un entier non-négatif,

$$(B_\alpha)^k\left(t ; \frac{d}{dt}\right) f(t) \geqq 0 \quad \text{dans} \quad (0, +\infty) \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}} f(t) < +\infty ,$$

où

$$B_\alpha\left(t ; \frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\alpha}{t}\frac{d}{dt} , \qquad B_\alpha^0\left(t ; \frac{d}{dt}\right) f = f$$

et

$$B_\alpha^{k+1}\left(t; \frac{d}{dt}\right) = B_\alpha\left(t; \frac{d}{dt}\right)\left(B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right)\right).$$

On notera $CM_{\alpha,1}$ la totalité des fonctions complètement monotones d'ordre $\alpha$ dans $(0, +\infty)$ telles que $\overline{\lim}_{t\to+\infty} f(t) \leqq 1$. En utilisant la fonction besselien, on obtient que, pour tout le nombre $p \geqq 0$, il existe une fonction $g_p^{(\alpha)}$ de $CM_{\alpha,1}$, et une seule telle que

$$B_\alpha\left(t; \frac{d}{dt}\right)g_p^{(\alpha)} = pg_p^{(\alpha)} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} g_p^{(\alpha)}(t) = 1 .$$

On a évidemment $g_0^{(\alpha)} = 1$. Il est évident que $g_p^{(0)} = g_p$ $(\forall p \geqq 0)$. Cela est, d'autre part, compris par

$$\Delta\left(\frac{\varphi(|x|)}{|x|^{\alpha+1}}\right) = \frac{B_\alpha(|x|; d/dt)\varphi(|x|)}{|x|^{\alpha+1}}$$

dans $\boldsymbol{R}^{\alpha+3} - \{0\}$, où $\varphi$ et $\Delta$ sont respectivement une fonction de $C^\infty(0, +\infty)$ et le laplacien sur $\boldsymbol{R}^{\alpha+3}$.

LEMME 11. *Soient $\alpha$ un entier non-négatif et $f$ une fonction non-négative de classe $C^2$ dans $(0, +\infty)$ telle que $B_\alpha(t; d/dt)f(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$ et $\overline{\lim}_{t\to+\infty} f(t) < +\infty$; alors $f$ est décroissante (au sens large).*

En effet, posons $n = \alpha + 3$. On a

$$\Delta\left(\frac{f(|x|)}{|x|^{n-2}}\right) = \frac{B_\alpha(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}$$

dans $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$. Donc la fonction $f(|x|)/|x|^{n-2}$ est sous-harmonique en dehors de l'origine. Elle tendant vers 0 avec $|x| \to +\infty$, il est facile de voir que $f$ est décroissante (au sens large).

Par conséquent, pour toute la fonction $f$ complètement monotone d'ordre $\alpha$, la limite $\lim_{t\to 0} f(t)$ existe, qui notera $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$. En généralisant le théorème de Bernstein, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit $\alpha$ un entier non-négatif. Alors $CM_{\alpha,1}$ est un sous-ensemble convexe et compact de $C^\infty(0, +\infty)$, et l'ensemble des points extrêmes* ex. $CM_{\alpha,1}$ *de $CM_{\alpha,1}$ est égal à $\{g_p^{(\alpha)}; 0 \leqq p \leqq +\infty\}$, où $g_\infty^{(\alpha)} \equiv 0$.*

*Démonstration.* Evidemment $CM_{\alpha,1}$ est convexe. Pour que $CM_{\alpha,1}$ soit compact, il suffit qu'il soit fermé et borné dans $C^\infty(0, +\infty)$. On rappelle ici le théorème d'Ascoli. Il est facile de voir qu'il est fermé. Montrons que $CM_{\alpha,1}$ est borné dans $C^\infty(0, +\infty)$. On a, quels que soient $m$ un entier $\geqq 1$ et $f$ une fonction de $CM_{\alpha,1}$, $p_{m,0}(f) \leqq 1$. Pour simplifier la notation, on pose $n = \alpha + 3$. Pour tout l'entier non-négatif $k$ et pour toute la fonction $f$ de $CM_{\alpha,1}$, la fonction

$$\frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}$$

est sous-harmonique dans $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$. On a, quelle que soit $\varphi \geqq 0$ de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} \int \frac{B_\alpha^k(|x-y|; d/dt)f(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}}\varphi(y)dy = \lim_{|x|\to+\infty} \int \frac{f(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}}\Delta^k\varphi(y)dy = 0$$

et donc

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} = 0 .$$

Par conséquent, $B_\alpha^k(t; d/dt)f(t)$ est décroissante (au sens large) dans $(0, +\infty)$.

Soit $k$ un entier quelconque $\geqq 1$, et supposons que, pour un entier quelconque $j$ avec $0 \leqq j \leqq 2k$ et pour un entier quelconque $m \geqq 1$, il existe une constante $c_{m,j} > 0$ telle que, quelle que soit $f$ de $CM_{\alpha,1}$, $p_{m,j}(f) \leqq c_{m,j}$. Alors, pour un entier quelconque $j$ avec $0 \leqq j \leqq k$, il existe un autre constante positive $a_{m,j}$ telle que, quelle que soit $f$ de $CM_{\alpha,1}$,

$$\sup_{1/m\leqq t\leqq m} \left| B_\alpha^j\left(t; \frac{d}{dt}\right)f(t)\right| \leqq a_{m,j} .$$

Soit $m$ un entier positif fixé. Alors il existe une constante $c_m$ avec $0 < c_m < 1$ telle que

$$\varphi_m(x) = \int G_0^{(n)}(x-y)ds_{1/2m}(y) - c_m \int G_0^{(n)}(x-y)ds_{1/4m}(y) - (1-c_m)$$
$$\int G_0^{(n)}(x-y)ds_{1/m}(y)$$

soit zéro sur $\{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| \leqq 1/4m \text{ ou } |x| \geqq 1/m\}$, où, pour $r > 0$, $s_r$ désigne la mesure uniforme sur $\{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| = r\}$ de masse totale d'unité. On a, dans ce cas, $\varphi_m(x) > 0$ dans $\{x \in \boldsymbol{R}^n; 1/4m < |x| < 1/m\}$. On a ensuite, quelle que soit $f$ de $CM_{\alpha,1}$,

$$\int \frac{B_\alpha^{k+1}(|x|;\, d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}\varphi_m(x)dx$$
$$= c_m \int \frac{B_\alpha^{k}(|x|;\, d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}ds_{1/4m}(x) + (1-c_m)\int \frac{B_\alpha^{k}(|x|;\, d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}ds_{1/m}(x)$$
$$- \int \frac{B_\alpha^{k}(|x|;\, d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}ds_{1/2m}(x)$$
$$= c_m(4m)^{n-2}B_\alpha^k\Big(\frac{1}{4m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{4m}\Big) + (1-c_m)m^{n-2}B_\alpha^k\Big(\frac{1}{m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{m}\Big)$$
$$- (2m)^{n-2}B_\alpha^k\Big(\frac{1}{2m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{2m}\Big)$$
$$\leqq (4m)^{n-2}a_{4m,k}\,,$$

car

$$\Delta\varphi_m = c_m s_{1/4m} + (1-c_m)s_{1/m} - s_{1/2m}$$

au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$. On a donc

$$\Big(\int\varphi_m dx\Big)B_\alpha^{k+1}\Big(\frac{1}{m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{m}\Big) \leqq (4m)^{n-2}a_{4m,k}\,.$$

La fonction $B_\alpha^{k+1}(t, d/dt)f(t)$ étant décroissante dans $(0, +\infty)$, pour tout l'entier $m \geqq 1$, il existe une constante positive $a_{m,k+1}$ telle que, quelle que soit $f$ de $CM_{\alpha,1}$,

$$\sup_{1/m\leqq t\leqq m}\Big|B_\alpha^{k+1}\Big(t, \frac{d}{dt}\Big)f(t)\Big| \leqq a_{m,k+1}\,.$$

On a, pour une fonction $f$ de $CM_{\alpha,1}$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t) - \frac{\alpha}{t}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t)\Big) \geqq 0$$

et

$$\frac{d}{dt}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t) - \frac{\alpha}{t}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t) \leqq 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2m}\sup_{1/m\leqq t\leqq m}\Big|\frac{d}{dt}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t) - \frac{\alpha}{t}B_\alpha^k\Big(t;\frac{d}{dt}\Big)f(t)\Big|$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(-\frac{d}{dt}B_\alpha^k\Big(\frac{1}{m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{m}\Big) + m\alpha B_\alpha^k\Big(\frac{1}{m};\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big)$$

$$\leqq B_\alpha^k\Big(\frac{1}{2m}\,;\,\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{2m}\Big) + \Big(\frac{\alpha}{2} - 1\Big)B_\alpha^k\Big(\frac{1}{m}\,;\,\frac{d}{dt}\Big)f\Big(\frac{1}{m}\Big)$$

$$\leqq \Big(1 + \frac{\alpha}{2}\Big)a_{2m,k}\ ,$$

et par suite

$$\sup_{1/m\leqq t\leqq m}\left|\frac{d}{dt}B_\alpha^k\Big(t\,;\,\frac{d}{dt}\Big)f(t)\right| \leqq 2m^2\alpha a_{m,k} + 2m\Big(1 + \frac{\alpha}{2}\Big)a_{2m,k}\ .$$

On a, en même temps,

$$\sup_{f\in CM_{\alpha,1}}\Big(\sup_{1/m\leqq t\leqq m}\left|\frac{d^2}{dt^2}B_\alpha^k\Big(t\,;\,\frac{d}{dt}\Big)f(t)\right|\Big) < +\infty\ .$$

On obtient ainsi que, quel que soit $m$ un entier $>1$,

$$\sup_{f\in CM_{\alpha,1}} p_{m,2k+1}(f) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{f\in CM_{\alpha,1}} p_{m,2(k+1)}(f) < +\infty\ .$$

Par récurrence, $CM_{\alpha,1}$ est borné dans $C^\infty(0, +\infty)$, d'où $CM_{\alpha,1}$ est un sous-ensemble convexe et compact de $C^\infty(0, +\infty)$.

Montrons ensuite ex. $CM_{\alpha,1} = \{g_p^{(\alpha)}\,;\, 0 \leqq p \leqq +\infty\}$. Rappelons encore que, quelle que soit $\varphi$ de $C^\infty(0, +\infty)$,

$$\Delta\Big(\frac{\varphi(|x|)}{|x|^{n-2}}\Big) = \frac{B_\alpha(|x|\,;\,d/dt)\varphi(|x|)}{|x|^{n-2}}\ .$$

On a alors

$$G_p^{(n)} = \frac{g_p^{(\alpha)}(|x|)}{|x|^{n-2}}dx \qquad (\forall p \geqq 0)\ .$$

Soit $f$ une fonction non-zéro de ex. $CM_{\alpha,1}$. Alors on a évidemment $f(0) = 1$. Le noyau de convolution $(f(|x|)/|x|^{n-2})dx$ sur $\boldsymbol{R}^n$ appartenant à $S_{r,0}(\boldsymbol{R}^n)$, il existe une mesure de Radon positive $\lambda$ dans $[0, +\infty)$ de masse totale d'unité telle que

$$f = \int g_p^{(\alpha)}d\lambda(p)\ .$$

Supposons que $\lambda$ n'est pas une mesure d'unité à un point. Alors il existe un nombre $t > 0$ tel que $\lambda([0, t)) > 0$ et $\lambda([t, +\infty)) > 0$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les restrictions de $\lambda$ sur $[0, t)$ et sur $[t, +\infty)$, respectivement. On a alors

$$f \pm \left(\int d\lambda_2 \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_1(p) - \int d\lambda_1 \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_2(p)\right) \in CM_{\alpha,1} ,$$

et par suite

$$\frac{1}{\int d\lambda_1} \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_1(p) = \frac{1}{\int d\lambda_2} \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_2(p) .$$

Mais cela est en contradiction avec $g_p^{(\alpha)} > g_q^{(\alpha)}$ dans $(0, +\infty)$ dès que $p < q$, d'où $\lambda$ est une mesure d'unité à un point. Par conséquent, ex. $CM_{\alpha,1} - \{0\} \subset \{g_p^{(\alpha)}; 0 \leqq p < +\infty\}$. On montrera l'inclusion inverse. Supposons que l'inclusion inverse n'a pas lieu; alors il existe un nombre $q > 0$ et une mesure de Radon positive $\lambda \neq \varepsilon_q$ dans $[0, +\infty)$ de masse totale d'unité tels que

$$g_q^{(\alpha)} = \int g_p^{(\alpha)} d\lambda(p) ,$$

et donc

$$G_q^{(n)} = \int G_p^{(n)} d\lambda(p) .$$

On a alors

$$\frac{1}{t^2 + q} = \int \frac{1}{t^2 + p} d\lambda(p)$$

sur $\boldsymbol{R}^1$, et par suite

$$\exp(-\sqrt{q}t) = \int \exp(-\sqrt{p}t) d\lambda(p) \qquad (\forall t \geqq 0) ,$$

d'après l'injectivité de la transformation de Fourier. Mais cette égalité est en contradiction avec l'injectivité de la transformation de Laplace. Par conséquent, l'inclusion inverse a lieu. Il est évident que 0 est extrême. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 1. *Soient $\alpha$ un entier non-négatif et $\varphi$ une fonction de $C^\infty(0, +\infty)$. Pour que $\varphi$ soit complètement monotone d'ordre $\alpha$, il faut et il suffit qu'il existe une mesure de Radon positive $\lambda$ sur $[0, +\infty)$ telle que*

$$\varphi = \int g_p^{(\alpha)} d\lambda(p) .$$

*Dans ce cas, $\lambda$ est uniquement déterminée.*

Cela résulte immédiatement des théorèmes 2 et 3.

COROLLAIRE 2. *Soit $S_{r,0}^{(1)}$ la totalité des noyaux de convolution $N$ sur $\boldsymbol{R}^n$ ($n \geqq 3$) complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations, s'annulant à l'infini et vérifiant $N(\{O\}) = 0$ et $\overline{\lim}_{x \to 0} N(x)|x|^{n-2} \leqq 1$*[3]. *Alors $S_{r,0}^{(1)}$ est convexe et compact dans $C^\infty(\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ et on a*

$$\text{ex.}\, S_{r,0}^{(1)} = \{G_p^{(n)}\,;\, 0 \leqq p \leqq +\infty\} ,$$

*où $G_\infty^{(n)} = 0$, où $C^\infty(\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ est l'espace de Fréchet usuel des fonctions réelles et infiniment dérivables en dehors de l'origine et où* ex. $S_{r,0}^{(1)}$ *est l'ensemble des points extrêmes de $S_{r,0}^{(1)}$.*

Cela est un résultat immédiat du théorème 3.

## BIBLIOGRAPHIES


[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), 208–215.

[2] N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1966.

[3] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **12** (1962), 643–667.

[4] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables, Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.

[5] I. Higuchi et M. Itô: Characterization of the relative domination principle, Nagoya Math. J., **50** (1972), 175–184.

[6] M. Itô: Remarque sur la somme d'un noyau de Dirichlet et du noyau newtonien, Proc. Japan Acad., **46** (1970), 362–363.

[7] ——: Remarque sur la somme des résolvantes, Proc. Japan Acad., **46** (1970), 243–245.

[8] ——: Sur les principles divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44** (1971), 133–164.

[9] ——: Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., à paraître.

[10] ——: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt, Nagoya Math. J., **51** (1973), 45–56.

[11] ——: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt II, Nagoya Math. J., **53** (1974), 115–126.


(3) $N$ est considéré comme une fonction infiniment dérivable en dehors l'origine.

[12] M. Riesz: Intégrales de Riemann-Lioville et potentiels, Acta Sc. Math., Szeged, **9** (1938), 1–42.
[13] D. Widder: The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

*Institut Mathématique*
*d'Université de Nagoya*