M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 97 (1985), 1-49

UNE CARACTÉRISATION DES NOYAUX DE CONVOLUTION RÉELS DE TYPE LOGARITHMIQUE

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Soit X un groupe abélien localement compact séparé et dénombrable à l'infini. On désignera par ξ la mesure de Haar sur X. Un noyau de convolution réel N (c'est-à-dire, une mesure de Radon réelle) sur X sera dit de type logarithmique s'il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ vaguement continu, markovien et récurrent des noyaux de convolution (non-négatifs) tel que $\lim_{t\to\infty}\alpha_t = 0$ (vaguement) et, pour toute $\mu \in M_K^0(X)$ (pour la notation, voir § 2),

$$N*\mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt^{(1)} . \tag{1.1}$$

Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est déterminé d'une manière unique. S'il existe un noyau de convolution réel de type logarithmique sur X, alors X est non-compact. Donc, dans cet article, on supposera toujours que X est non-compact et l'on désignera par δ le point d'Alexandroff de X.

Dans le théorie classique du potentiel, il est bien connu que le noyau logarithmique sur l'espace euclidien R^2 à 2 dimensions vérifie le principe du maximum semi-complet (équivalent au principe du semi-balayage) (voir [9] et [10]).

Le but de cet article est de montrer les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME A. *Soit N un noyau de convolution réel sur X.*

(a) *Supposons que $X \not\approx R\times F$ et $X \not\approx Z\times F$, où R est la droite réelle, Z est le groupe additif d'entiers et F est un groupe abélien compact. Alors, pour que N soit de type logarithmique, il faut et il suffit que l'on ait:*

Received May 11, 1981.

(1) Cela signifie que, pour $f\in C_K(X)$ quelconque,

$$\int f dN*\mu = \lim_{a\to\infty}\int_0^a\int f d\alpha_t*\mu dt = \int_0^\infty\int f d\alpha_t*\mu dt.$$

(1) *N vérifie le principe du maximum semi-complet.*

(2) *N est non-périodique.*

(3) *Pour* $f \in C_K^0(X)$ *quelconque* $\inf_{x\in X} N*f(x) \leqq 0$.

(4) *Pour une exhaustion* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* X[2], *on désigne par* η_{N,CK_n} *la réduite de* N *sur* CK_n. *Alors on a* $\lim_{n\to\infty} \eta_{N,CK_n} = -\infty$; *c'est-à-dire, pour toute* $0 \neq f \in C_K^+(X)$, $\lim_{n\to\infty} \int f d\eta_{N,CK_n} = -\infty$[3].

(b) *Supposons que* $X \approx R \times F$ *ou bien* $X \approx Z \times F$. *Sous la condition* $N = o(|x|)$ *à l'infini (c'est-à-dire, pour* $f \in C_K(X)$ *quelconque,* $N*f((x, y)) = o(|x|)$ *lorsque* $|x| \to \infty$, *où* $(x, y) \in R \times F$ *ou bien* $\in Z \times F$), *N est de type logarithmique si et seulement si N vérifie* (1), (2), (3) *et* (4). *Dans ce cas, on ne peut pas éviter la condition supplémentaire.*

THÉORÈME B. *S'il existe un noyau de convolution réel de type logarithmique sur* X, *alors pour un voisinage compact* V *de l'origine quelconque,* $X_V \approx R^2 \times F_V$ *ou* $X_V \approx R \times Z \times F_V$ *ou* $X_V \approx Z^2 \times F_V$ *ou* $X_V \approx R \times F_V$ *ou* $X_V \approx Z \times F_V$, *où* X_V *est le sous-groupe fermé engendré par* V *et* F_V *est un certain groupe abélien compact.*

§ 2. Le principe du maximum semi-complet et le principe du semi-balayage

On désignera par:

$C(X)$ l'espace de Fréchet usuel des fonctions finies et continues sur X;

$C_b(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur X à valeurs réelles muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$;

$C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues sur X à support compact;

$M(X) = C_K(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X muni de la topologie vague;

$M_K(X) = C(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X à support compact;

$C^+(X)$, $C_b^+(X)$, $C_K^+(X)$, $M^+(X)$ et $M_K^+(X)$ leur sous-ensembles des éléments $\geqq 0$;

$$C^0(X) = \left\{f \in C(X); \int |f| d\xi < \infty, \int f d\xi = 0\right\};$$

---

[2] Pour $n \geqq 1$ quelconque, K_n est compact, contenu dans l'intérieur de K_{n+1} et $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$.

[3] Lorsque une famille filtrante $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $M(X)$ converge vaguement vers $\mu \in M(X)$, on écrit aussi $\lim_{\alpha\in A} \mu_\alpha = \mu$.

$$C_K^0(X) = \left\{f \in C_K(X);\ \int f d\xi = 0\right\};$$

$$M^0(X) = \left\{\mu \in M(X);\ \int d|\mu| < \infty,\ \int d\mu = 0\right\};$$

$$M_K^0(X) = \left\{\mu \in M_K(X);\ \int d\mu = 0\right\}.$$

DÉFINITION 1. Soient N_1 et N_2 des noyaux de convolution réels sur X.

(1) N_1 vérifie le principe relatif du maximum semi-complet par rapport à N_2. (désigné par $(N_1, N_2) \in (PRMS)$) si, pour $f,\ g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$ quelconques, $N_1 * f \leqq N_2 * g + a$ sur X dès que la même inégalité a lieu sur le support de f, $\mathrm{supp}(f)$, où $*$ désigne la convolution sur X.

(2) N_1 vérifie le principe transitif du maximum semi-complet par rapport à N_2 (désigné par $(N_1, N_2) \in (PTMS)$) si, pour $f,\ g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$ quelconques, $N_2 * f \leqq N_2 * g + a$ sur X dès que $N_1 * f \leqq N_1 * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$.

Evidemment, pour un noyau de convolution réel N, $(N, N) \in (PRMS)$ et $(N, N) \in (PTMS)$ sont équivalents. Dans ce cas, N est dit simplement de vérifier le principe du maximum semi-complet et désigné par $N \in (PMS)$.

Remarque 2. On a $(N_1, N_2) \in (PRMS)$ (resp. $\in (PTMS)$) $\Longleftrightarrow (\check{N}_1, \check{N}_2) \in (PRMS)$ (resp. $\in (PTMS)$), où $\check{N}_j$ est le noyau de convolution symétrique de N_j par rapport à l'origine ($j = 1, 2$).

En effet, pour un noyau de convolution réel N et $f \in C_K(X)$, on a $\check{N} * f(x) = N * \check{f}(-x)$, où $\check{f}(x) = f(-x)$, et cela montre la remarque 2.

Remarque 3. Si $(N_1, N_2) \in (PTMS)$, alors, pour $f \in C_K^0(X)$ quelconque, $N_2 * f$ est bornée sur X.

En effet, posons $a = \max\{N_1 * f(x);\ x \in \mathrm{supp}(f^+)\}$ et $b = \max\{-N_1 * f(x);\ x \in \mathrm{supp}(f^-)\}$. Alors $(N_1, N_2) \in (PTMS)$ montre que $N_2 * f \leqq a$ et $-N_2 * f \leqq b$ sur X, d'où $|N_2 * f| \leqq \max(a, b)$ sur X.

Pour $x \in X$, on désigne par ε_x la mesure d'unité à x. En particulier, on écrit $\varepsilon = \varepsilon_0$, où 0 désigne l'origine de X.

Remarque 4. Soit $(N_1, N_2) \in (PTMS)$. Alors l'application

$$C_K(X) \times X \ni (f, x) \longrightarrow N_2 * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f \in C_b(X)$$

est continue.

En effet, soit $(f, x) \in C_K(X) \times X$ quelconque. Pour un compact K de X vérifiant $K \supset \mathrm{supp}(f)$ et un entier $n \geqq 1$ quelconques, il existe un entier $m \geqq 1$ et un voisinage compact $V_n(x)$ de x tels que, pour $g \in C_K(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(g) \subset K$ et $\|f - g\| < 1/m$ et $y \in V_n(x)$ quelconques, en posant $K + V_n(x) = \{y + z;\ y \in K,\ z \in V_n(x)\}$, on ait

$$|N_1 * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f - N_1 * (\varepsilon_y - \varepsilon) * g| < \frac{1}{n} \qquad \text{sur } (K + V_n(x)) \cup K.$$

Comme $(\varepsilon_x - \varepsilon) * f - (\varepsilon_y - \varepsilon) * g$ est portée par $(K + V_n(x)) \cup K$ et $(\varepsilon_x - \varepsilon) * f - (\varepsilon_y - \varepsilon) * g \in C_K^0(X)$, $(N_1, N_2) \in (PTMS)$ montre que

$$\|N_2 * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f - N_2 * (\varepsilon_y - \varepsilon) * g\| \leqq \frac{1}{n}.$$

Cela donne notre remarque.

Remarque 5. (1) $(N_1, N_2) \in (PRMS) \Longleftrightarrow$ Pour toute constante $c > 0$, $(N_1 + c\varepsilon, N_2) \in (PRMS)$.

(2) $(N_1, N_2) \in (PTMS) \Longleftrightarrow$ Pour toute constante $c > 0$, $(N_1 + c\varepsilon, N_2) \in (PTMS)$.

(3) $N \in (PMS) \Longleftrightarrow$ Pour toute constante $c > 0$, $N + c\varepsilon \in (PMS)$.

En effet, l'implication $\Rightarrow$ de (1) est évident. Supposons que, pour toute $c > 0$, $(N_1 + c\varepsilon, N_2) \in (PRMS)$ et que, pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$, $N_1 * f \leqq N_2 * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Alors, pour $c > 0$ quelconque, $(N_1 + c\varepsilon) * f \leqq N_2 * g + a + c\|f\|$ sur $\mathrm{supp}(f)$, et donc la même inégalité a lieu sur X. En faisant $c \downarrow 0$, on a $N_1 * f \leqq N_2 * g + a$ sur X, d'où $\Leftarrow$ de (1). De la même façon, on voit $\Leftarrow$ de (2) et $\Leftarrow$ de (3).

Supposons que $(N_1, N_2) \in (PTMS)$ et que, pour une constante $c > 0$, $f, g \in C_K^+(X)$ avec $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$, $(N_1 + c\varepsilon) * f \leqq (N_1 + c\varepsilon) * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Alors $N_1 * (f - g)^+ \leqq (N_1 + c\varepsilon) * (f - g)^+ \leqq (N_1 + c\varepsilon) * (f - g)^- + a = N_1 * (f - g)^- + a$ sur $\mathrm{supp}((f - g)^+)$ et donc $N_2 * (f - g)^+ \leqq N_2 * (f - g)^- + a$ sur X. Ainsi $(N_1 + c\varepsilon, N_2) \in (PTMS)$, d'où $\Rightarrow$ de (2). De la même façon, on voit $\Rightarrow$ de (3).

Si $(N, \xi) \in (PRMS)$ (resp. $(N, \xi) \in (PTMS)$), alors on désigne simplement par $N \in (PM)$ (resp. $N \in (PPM)$). Evidemment, $N \in (PM)$ est équivalent à l'énoncé suivant:

Pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, on a

$$N * f \leqq \sup_{x \in \mathrm{supp}(f)} N * f(x) \text{ sur } X. \tag{2.1}$$

On verra facilement la remarque suivante:

Remarque 6. Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors on a (1) $\Longleftrightarrow$ (2):

(1) $N \in (PMS)$ et $N \in (PPM)$.

(2) Pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$ quelconques, on a $a \geqq 0$ et $N * f \leqq N * g + a$ sur X dès que $N * f \leqq N * g + a$ sur X.

Par conséquent, on aura la remarque suivante:

Remarque 7. Soit $N \in (PMS)$. Alors on a (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3):

(1) $N \in (PPM)$.

(2) Pour $f \in C_K^0(X)$ *et* $0 < a \in R$ quelconques, $\{x \in X; N * f(x) \geqq a\} \neq X$.

(3) Pour $f \in C_K^0(X)$ quelconque,

$$\inf_{x \in X} N * f(x) \leqq 0 . \tag{2.2}$$

Remarque 8. (1) On a $(N_1, N_2) \in (PRMS) \Longleftrightarrow$ Pour $\mu, \nu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = \int d\nu$ et $a \in R$ quelconques, $N_1 * \mu \leqq N_2 * \nu + a\xi$ dès que $N_1 * \mu \leqq N_2 * \nu + a\xi$ dans un certain voisinage de $\mathrm{supp}(\mu)$. Dans ce cas, si $N = N_1 = N_2$ et $N \in (PPM)$, alors $a \geqq 0$.

(2) Soit $N \in (PMS)$ et c une constante > 0. Si, pour $\mu, \nu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = \int d\nu$ et $a,\ b \in R$, $(N + c\varepsilon) * \mu + a\xi = (N + c\varepsilon) * \nu + b\xi$, alors $\mu = \nu$ et $a = b$.

Evidemment $\Leftarrow$ dans (1) a lieu. Montrons son inverse. On choisit un voisinage ouvert V de l'origine tel que $N * \mu \leqq N * \nu + a\xi$ dans $\mathrm{supp}(\mu) + V$. Alors, pour toute $f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}(f) \subset V$, $\int \mu * f d\xi = \int \nu * f d\xi$ et $N_1 * (\mu * f) \leqq N_2 * (\nu * f) + a \int f d\xi$ sur $\mathrm{supp}(\mu * f)$, et donc la même inégalité a lieu sur X. En faisant $f\xi \to \varepsilon$ dans $M_K(X)$, on arrive à $N * \mu \leqq N * \nu + a\xi$, d'où $\Rightarrow$.

Montrons (2). Comme $(N + c\varepsilon, N) \in (PTMS)$, on a, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $N * \mu * f + a \int f d\xi = N * \nu * f + b \int f d\xi$, et donc $N * \mu + a\xi = N * \nu + b\xi$. Donc $\mu = \nu$ et $a = b$.

DÉFINITION 9. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution réels sur X. On dit que N_1 vérifie le principe relatif du semi-balayage par rapport à N_2 (désigné par $(N_1, N_2) \in (PRSB)$) si, pour $\mu \in M_K^+(X)$ $a \in R$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $\mu' \in M_K^+(X)$ et $a' \in R$ tels que:

(B.1) $\int d\mu' = \int d\mu$.

(B.2) $\mathrm{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$.

(B.3) $N_1 * \mu' + a'\xi = N_2 * \mu + a\xi$ dans ω.

(B.4) $N_1 * \mu' + a'\xi \leqq N_2 * \mu + a\xi$ dans X.

Dans ce cas, (μ', a') s'appelle un couple semi-balayé de (μ, a) sur ω relativement à (N_1, N_2). On désigne par $SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega)$ l'ensemble des couples semi-balayés ci-dessus. Evidemment, pour une constante $c \in R$ quelconque, $SB_{N_1+c\xi,N_2+c\xi}((\mu, a); \omega) = SB_{N_1,N_2}(\mu, a); \omega)$. En particulier, si $(N, N) \in (PRSB)$, alors on dit simplement que N vérifie le principle du semi-balayage et désigne par $N \in (PSB)$. On note encore $SB_N((\mu, a); \omega) = SB_{N,N}((\mu, a); \omega)$. Un élément de $SB_N((\mu, a); \omega)$ s'appelle simplement un couple N-semi-balayé de (μ, a) sur ω.

Evidemment on aura la remarque suivante:

Remarque 10. (1) $(N_1, N_2) \in (PRMS) \Longleftrightarrow$ Pour tous $a, b \in R$, $(N_1 + a\xi, N_2 + b\xi) \in (PRMS)$.

(2) $(N_1, N_2) \in (PTMS) \Longleftrightarrow$ Pour tous $a, b \in R$, $(N_1 + a\xi, N_2 + b\xi) \in (PTMS)$.

(3) $(N_1, N_2) \in (PRSB) \Longleftrightarrow$ Pour tous $a, b \in R$, $(N_1 + a\xi, N_2 + b\xi) \in (PRSB)$.

De la même manière que dans [3] (voir aussi [1]), on obtiendra la proposition suivante:

PROPOSITION 11. *On a* $(N_1, N_2) \in (PTMS) \Longleftrightarrow (N_1, N_2) \in (PRSB)$.

Preuve. $\Leftarrow$: Supposons que, pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$, $\check{N}_1 * f \leqq \check{N}_1 * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Posons $\omega = \{x \in X; f(x) > 0\}$. Pour $x \in X$ quelconque, on choisit $(\varepsilon_x', b) \in SB_{N_1,N_2}((\varepsilon_x, 0); \omega)$. Alors

$$\begin{aligned}\check{N}_2 * g(x) + a &= \int g dN_2 * \varepsilon_x + a \geqq \int g d(N_1 * \varepsilon_x' + b\xi) + a \\ &= \int \check{N}_1 * g d\varepsilon_x' + b \int g d\xi + a \\ &\geqq \int \check{N}_1 * f d\varepsilon_x' + b \int f d\xi + a\Big(1 - \int d\varepsilon_x'\Big) \\ &= \int f d(N_1 * \varepsilon_x' + b\xi) = \int f dN_2 * \varepsilon_x = N_2 * f(x)\,.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $(\check{N}_1, \check{N}_2) \in (PTMS)$, et donc $(N_1, N_2) \in (PTMS)$.

$\Rightarrow$: On utilisera la méthode de Choquet-Deny (voir [3]). Pour $\mu \in$

$M_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ dans X, on pose

$$(2.3) \qquad A_{\mu,\omega} = \left\{ N_1 * \nu + b\xi + \eta ; \begin{array}{l} \nu \in M_K^+(X),\ \mathrm{supp}(\nu) \subset \bar{\omega},\ \int d\nu = \int d\mu,\ b \in R \\ \eta \in M^+(X),\ \mathrm{supp}(\eta) \subset C\omega \end{array} \right\}.$$

Alors $A_{\mu,\omega}$ est convexe et fermé dans $M(X)$. Evidemment $(N_1, N_2) \in (PRSB)$ si et seulement si, pour tous $\mu \in M_K^+(X)$ et $a \in R$, $N_2 * \mu + a\xi \in A_{\mu,\omega}$. Supposons que $(N_1, N_2) \notin (PRSB)$. Alors il existe $\mu \in M_K^+(X)$ et $a \in R$ tels que $\int d\mu = 1$ et $N_2 * \mu + a\xi \notin A_{\mu,\omega}$. Alors le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe $f \in C_K(X)$ et $c \in R$ tels que

$$(2.4) \qquad \int fd(N_2 * \mu + a\xi) < c \text{ et, pour } \gamma \in A_{\mu,\omega} \text{ quelconque, } \int fd\gamma \geqq c\,.$$

Soient $\nu \in M_K^+(X)$ et $\eta \in M^+(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(\nu) \subset \bar{\omega}$, $\int d\nu = 1$ et $\mathrm{supp}(\eta) \subset C\omega$ quelconques fixées. Alors, pour tout $b \in R$, $\int fd(N_1 * \nu + \eta) + b\int fd\xi \geqq c$, et donc $\int fd\xi = 0$. Comme, pour tout $x \in C\omega$ et tout $0 < b \in R$, $N_1 * \nu + b\varepsilon_x \in A_{\mu,\omega}$, on a $f \geqq 0$ sur $C\omega$. Comme, pour tout $x \in \bar{\omega}$, $N_1 * \varepsilon_x \in A_{\mu,\omega}$, on a $\check{N}_1 * f(x) = \int fdN_1 * \varepsilon_x \geqq c$ sur $\bar{\omega}$. Ainsi on obtient que $f \in C_K^0(X)$, $\check{N}_1 * f^- \leqq \check{N}_1 * f^+ - c$ sur $\bar{\omega}$ et $\mathrm{supp}(f^-) \subset \bar{\omega}$. D'après $(\check{N}_1, \check{N}_2) \in (PTMS)$ (voir la remarque 2), on a $\check{N}_2 * f \geqq c$ sur X. Mais cela est en contradiction avec (2.4), d'où $(N_1, N_2) \in (PRSB)$.

Corollaire 12. *Supposons que* $(N_1, N_2) \in (PRSB)$. *Alors, pour* $\mu \in M_K^+(X)$, $a \in R$ *et un ouvert relativement compact* $\omega \neq \phi$ *dans* X *quelconques, il existe* $(\mu', a') \in SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega)$ *tel que*:

(B.5) *Pour* $\nu \in M_K^+(X)$ *vérifiant* $\mathrm{supp}(\nu) \subset \bar{\omega}$ *et* $\int d\nu = \int d\mu$, $b \in R$ *et un noyau de convolution réel* N_3 *vérifiant* $(N_1, N_3) \in (PTMS)$ *quelconques, on a* $N_3 * \nu + b\xi \geqq N_3 * \mu' + a'\xi$ *dès que* $N_1 * \nu + b\xi \geqq N_2 * \mu + a\xi$ *dans* ω.

En particulier, dans le cas où $N = N_1 = N_2$, *tout* $(\mu', a') \in SB_N((\mu, a); \omega)$ *vérifiant* (B.5) *possède la propriété suivante*:

(B.5′) *Pour* $\nu \in M_K^+(X)$ *vérifiant* $\mathrm{supp}(\nu) \subset \bar{\omega}$ *et* $\int d\nu = \int d\mu$, $b \in R$ *et un noyau de convolution réel* N' *vérifiant* $(N, N') \in (PRMS)$ *quelconques,* $N' * \nu + b\xi \geqq N * \mu' + a'\xi$ *dès que* $N' * \nu + b\xi \geqq N * \mu + a\xi$ *dans* ω.

Preuve. On choisit une famille filtrante $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'ouverts $\neq \phi$ vérifiant $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega_\beta$ $(\alpha \lneqq \beta)$ et $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega$. Soit $(\mu'_\alpha, a'_\alpha) \in SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega_\alpha)$. Alors, pour N_3 vérifiant $(N_1, N_3) \in (PTMS)$ quelconque, la remarque 8, (1) montre que $(N_3 * \mu'_\alpha + a'_\alpha\xi)_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille filtrante à droite, car, pour $\alpha, \beta \in \Lambda$ vérifiant $\alpha \lneqq \beta$ quelconques, $N_1 * \mu'_\alpha + a'_\alpha\xi \leqq N_1 * \mu'_\beta + a'_\beta\xi$ dans ω_β et $\mathrm{supp}(\mu'_\alpha) \subset \omega_\beta$. Comme $\int d\mu'_\alpha = \int d\mu$, $(\mu'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée, et donc on peut supposer qu'elle converge vaguement. Posons $\mu' = \lim_{\alpha\in\Lambda}\mu'_\alpha$. Alors $\lim_{\alpha\in\Lambda} N_j * \mu'_\alpha = N_j * \mu'$ $(j = 1, 2, 3)$, et donc $\lim_{\alpha\in\Lambda} a'_\alpha$ existe. Posons $a' = \lim_{\alpha\in\Lambda} a'_\alpha$. Alors (μ', a') est un couple demandé. En effet, évidemment $(\mu', a') \in SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega)$. Si, pour $\nu \in M^+_K(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(\nu) \subset \bar{\omega}$ et $\int d\nu = \int d\mu$ *et* $b \in R$, $N_1 * \nu + b\xi \geqq N_2 * \mu + a\xi$ dans ω, alors $(N_1, N_3) \in (PTMS)$ montre que, pour $\alpha \in \Lambda$ quelconque, $N_3 * \nu + b\xi \geqq N_3 * \mu'_\alpha + a'_\alpha\xi$. En faisant $\omega_\alpha \uparrow \omega$, on voit que (μ', a') vérifie (B.5).

Montrons la deuxième partie. On remarque que, pour (μ', a'), $(\mu'', a'') \in SB_N((\mu, a); \omega)$ vérifiant (B.5) quelconques, $N * \mu' + a'\xi = N * \mu'' + a''\xi$. D'après la remarque 8, (1), $(\mu', a') \in SB_N((\mu, a); \omega)$ obtenu ci-dessus vérifie (B.5′). Ainsi le corollaire 12 est démontré.

Posons $\underline{SB}_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega) = \{(\mu', a') \in SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega); (\mu', a')$ vérifie (B.5)$\}$. Si $\underline{SB}_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega)$ forme un seul élément, il s'appelle le couple canonique semi-balayé de (μ, a) sur ω relativement à (N_1, N_2). De la même façon, on définit $\underline{SB}_N((\mu, a); \omega)$ et le couple canonique N-semi-balayé de (μ, a) sur ω.

D'après le corollaire 12, on voit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 13. *Soit* $(N_1, N_2) \in (PRSB)$, *et soient* ω_1 *et* ω_2 *deux ouverts relativement compacts dans* X *vérifiant* $\omega_2 \supset \omega_1 \neq \phi$. *Pour* $\mu \in M^+_K(X)$, $a \in R$ *et* $(\mu', a') \in SB_{N_1,N_2}((\mu, a); \omega_2)$ *quelconques, on a* $\underline{SB}_{N_1,N_2}(\mu, a); \omega_1) = \underline{SB}_{N_1,N_2}((\mu', a'); \omega_1)$.

COROLLAIRE 14. *Si* $N \in (PMS)$ *et* $N \in (PPM)$, *alors* $N \in (PM)$.

Preuve. Soit $f \in C^+_K(X)$ quelconque. Pour montrer (2.1), on peut supposer que $\int fd\xi = 1$. On pose $m_f = \sup_{x\in\mathrm{supp}(f)} N * f(x)$. D'après la proposition 11, on a $(N, \xi) \in (PRSB)$. Pour un ouvert relativement compact $\omega \supset \mathrm{supp}(f)$, on choisit $(\lambda'_\omega, a_\omega) \in \underline{SB}_{N,\xi}((\varepsilon, 0); \omega)$. Alors on peut choisir $g \in C^+_K(X)$ vérifiant $\int gd\xi = 1$ telle que, en posant $g_0 = \lambda'_\omega * g$, on ait $N * g_0 + a_\omega \leqq 1$ sur X et $N * g_0 + a_\omega = 1$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Comme $\int g_0 d\xi = 1$ et $(N, N + (a_\omega + m_f - 1)\xi) \in (PRMS)$ (voir la remarque 10), on a

$$N * f \leqq (N + (a_\omega + m_f - 1)\xi) * g_0 \leqq m_f \qquad \text{sur } X,$$

d'où (2.1), ce qui montre $N \in (PM)$.

PROBLÈME 15. Est-ce qu'il existe $(N_1, N_2) \in (PRMS) \Longleftrightarrow (N_1, N_2) \in (PRSB)$?

PROPOSITION 16. *Soit $N \in (PMS)$. Alors, pour $0 < p \in R$, $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}((\mu, 0); \omega)$ forme un seul élément. On le désigne par $(\mu'_{p,\omega}, a_{\mu,p,\omega})$. On a encore:*

(1) *Pour toute $f \in C_K(X)$, les fonctions $\int f d\varepsilon'_{x,p,\omega}$ et $a_{x,p,\omega}$ de x sont universellement mesurables sur X, où $(\varepsilon'_{x,p,\omega}, a_{x,p,\omega}) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}((\varepsilon_x, 0); \omega)$.*

(2) *Pour toute $\mu \in M_K^+(X)$, $\mu'_{p,\omega} = \int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$*(4) *et $a_{\mu,p,\omega} = \int a_{x,p,\omega} d\mu(x)$.*

(3) *Pour tous ouverts relativement compacts ω_1 et ω_2 dans X vérifiant $\omega_2 \supset \omega_1 \neq \phi$, on a $\mu'_{p,\omega_1} \geqq \mu'_{p,\omega_2}$ dans ω_1.*

Preuve. D'après la remarque 8, (2) et (B. 5), on voit que $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}((\mu, 0); \omega)$ forme un seul élément.

Montrons (1). Il suffit de montrer que pour toute $f \in C_K^+(X)$, les fonctions $\int fd(N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega} \int fd\xi$ et $\int fdN * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega} \int fd\xi$ de x sont semi-continues inférieurement, car si c'est vrai, alors, pour $g \in C_K(X)$ quelconque, $\int gd\varepsilon'_{x,p,\omega}$ est une fonction universellement mesurable de x, et donc $\int gdN * \varepsilon'_{x,p,\omega}$ l'est aussi. Soient $x \in X$ et $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante $\subset X$ vérifiant $x_\alpha \to x$ quelconques. Comme $\int d\varepsilon'_{x_\alpha,p,\omega} = 1$ et $(N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x_\alpha,p,\omega} + a_{x_\alpha,p,\omega} = N * \varepsilon_{x_\alpha}$ dans ω, $(a_{x_\alpha,p,\omega})_{\alpha \in A}$ est bornée. Donc, pour $f \in C_K^+(X)$, on peut choisir $\nu \in M_K^+(X)$ et $a \in R$ tels que ν soit un point vaguement adhérent de $(\varepsilon'_{x_\alpha,p,\omega})_{\alpha \in A}$, a soit un point adhérent de $(a_{x_\alpha,p,\omega})_{\alpha \in A}$ lorsque $x_\alpha \to x$ et que

$$\int fd\left(\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \nu + a\xi\right) \underline{\lim}_{\alpha \in A} \int fd\left(\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \varepsilon'_{x_\alpha,p,\omega} + a_{x_\alpha,p,\omega}\xi\right).$$

Comme $(N + (1/p)\varepsilon) * \nu + a\xi = N * \varepsilon_x$ dans ω, on a $(N + (1/p)\varepsilon) * \nu + a\xi \geqq (N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega}\xi$ dans X. Cela montre que la fonction $\int fd((N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega}\xi)$ de x est semi-continue inférieurement. D'après $(N + (1/p)\varepsilon, N) \in (PTMS)$, on voit, de la même façon, que la fonction $\int fd(N * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega}\xi)$ de x est aussi semi-continue inférieurement.

---

(4) Pour toute $f \in C_K(X)$, $\int f d\mu'_{p,\omega} = \int\int f d\varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$.

Montrons (2). D'après (1), $\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$ est défini dans $M_K^+(X)$, et $\int a_{x,p,\omega} d\mu(x)$ est aussi défini. Comme

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\right) + \left(\int a_{x,p,\omega} d\mu(x)\right)\xi = N * \mu \text{ dans } \omega\,,$$

on a, d'après (B.5),

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\right) + \left(\int a_{x,p,\omega} d\mu(x)\right)\xi \geqq \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \mu'_{p,\omega} + a_{\mu,p,\omega}\xi\,.$$

Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante d'ouverts $\neq \phi$ vérifiant $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega_\beta$ $(\alpha \lneqq \beta)$ et $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = \omega$. Alors, pour tout $x \in X$, $((N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} + a_{x,p,\omega_\alpha}\xi)_{\alpha\in A}$ converge d'une manière croissante vers $(N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega} + a_{x,p,\omega}\xi$ lorsque $\omega_\alpha \uparrow \omega$. Comme $\operatorname{supp}\left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right) \subset \bar{\omega}_\alpha \subset \omega$ et $\int (N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)$ $+ \left(\int a_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right) \leqq N * \mu$ dans ω, on a, d'après la remarque 8, (2),

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \mu'_{p,\omega} + a_{\mu,p,\omega}\xi \geqq \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right) + \left(\int a_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right)\xi\,.$$

En faisant $\omega_\alpha \uparrow \omega$ et combinant l'inégalité inverse, on obtient

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \mu'_{p,\omega} + a_{\mu,p,\omega}\xi = \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right) + \left(\int a_{x,p,\omega} d\mu(x)\right)\xi\,.$$

D'après la remarque 8, (2), on voit (2).

Comme $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}((\mu, 0); \omega_j)$ forme un seul élément $(j = 1, 2)$, on a $\mu'_{p,\omega_1} = \mu'_{p,\omega_2}|_{\omega_1} + (\mu'_{p,\omega_2}|_{C\omega_1})'_{p,\omega_1}$[5] et $a_{\mu,p,\omega_1} = a_{\mu,p,\omega_2} + b$, où $((\mu'_{p,\omega_2}|_{C\omega_1})'_{p,\omega_1}, b) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}((\mu'_{p,\omega_2}|_{C\omega_1}, 0); \omega_1)$ (voir le corollaire 13). Donc (3) en résulte immédiatement.

De la même façon, on aura la remarque suivante:

Remarque 17. Soit $N \in (PSB)$ et ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Alors on a:

(1) Pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, la fonction $\int f d(N * \varepsilon'_{x,\omega} + a_{x,\omega}\xi)$ de x est définie et semi-continue inférieurement dans X, où $(\varepsilon'_{x,\omega}, a_{x,\omega}) \in \underline{SB}_N((\varepsilon_x, 0; \omega)$.

(2) Pour $\mu \in M_K^+(X)$ quelconque, $N * \mu'_\omega + a_{\mu,\omega}\xi = \int (N * \varepsilon'_{x,\omega} + a_{x,\omega}\xi) d\mu(x)$,

---

[5] Pour $\mu \in M(X)$ et un ensemble μ-mesurable A dans X, $\mu|_A$ désigne la mesure définie par $\mu|_A = \mu$ sur A et $\mu|_A = 0$ sur CA.

où $(\mu'_\omega, a_{\mu,\omega}) \in \underline{SB}_N(\mu, 0); \omega)$.

Corollaire 18. *Soient N et ω les mêmes que dans la proposition* 16. *Pour $p > 0$ et $\mu \in M_K^+(X)$, on pose $V_{p,\omega}\mu = (1/p)\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$. Alors, pour $p > 0$, $q > 0$ et $\mu \in M_K^+(X)$ quelconques, on a*:

$$V_{p,\omega}\mu - V_{q,\omega}\mu = (q-p)\int V_{q,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(x)\,. \tag{2.5}$$

$$\int (a_{x,p,\omega} - a_{x,q,\omega}) d\mu(x) = (q-p)\int a_{x,q,\omega} dV_{p,\omega}\mu(x)\,. \tag{2.6}$$

Preuve. On prend un nombre r tel que $r \geqq \max(p, q)$. Comme

$$(rN + \varepsilon) * V_{p,\omega}\mu = N * \mu - a_{\mu,p,\omega}\xi + (r-p)N * V_{p,\omega}\mu \text{ dans } \omega\,,$$

(B.5) et (2) de la proposition 16 donnent

$$\begin{aligned}(rN + \varepsilon) * V_{p,\omega}\mu &+ a_{\mu,p,\omega}\xi \\ &\geqq (rN+\varepsilon) * \left(V_{r,\omega}\mu + (r-p)\int V_{r,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(y)\right) \\ &\quad + \left(a_{\mu,r,\omega} + (r-p)\int a_{x,r,\omega} dV_{p,\omega}\mu(x)\right)\xi\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts vérifiant $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega_\beta$ $(\alpha \lneqq \beta)$ et $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = \omega$. Comme $(N + (1/p)\varepsilon, N + (1/r)\varepsilon) \in (PTMS)$, $((rN+\varepsilon) * V_{p,\omega_\alpha}\mu + a_{\mu,p,\omega_\alpha}\xi)_{\alpha\in A}$ converge d'une manière croissante vers $(rN+\varepsilon) * V_{p,\omega}\mu + a_{\mu,p,\omega}\xi$. Comme $(rN+\varepsilon) * V_{p,\omega}\mu + a_{\mu,p,\omega}\xi \leqq N * \mu + (r-p)N * V_{p,\omega}\mu$ dans X, on obtient que, pour tout $\alpha \in A$,

$$\begin{aligned}(rN + \varepsilon) * V_{p,\omega_\alpha}\mu &+ a_{\mu,p,\omega_\alpha}\xi \\ &\leqq (rN+\varepsilon) * \left(V_{r,\omega}\mu + (r-p)\int V_{r,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(x)\right) \\ &\quad + \left(a_{\mu,r,\omega} + (r-p)\int a_{x,r,\omega} dV_{p,\omega}\mu(x)\right)\xi\,.\end{aligned}$$

En faisant $\omega_\alpha \uparrow \omega$ et combinant (2.7), on obtient que

$$\begin{aligned}(rN + \varepsilon) * V_{p,\omega}\mu &+ a_{\mu,p,\omega}\xi \\ &= (rN+\varepsilon) * \left(V_{r,\omega}\mu + (r-p)\int V_{r,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(x)\right) \\ &\quad + \left(a_{\mu,r,\omega} + (r-p)\int a_{x,r,\omega} dV_{p,\omega}\mu(x)\right)\xi\,.\end{aligned} \tag{2.8}$$

D'après la remarque 8, (2), on a:

$$V_{p,\omega}\mu = V_{r,\omega}\mu + (r-p)\int V_{r,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(x)\,.$$

$$a_{\mu,p,\omega} = a_{\mu,r,\omega} + (r-p)\int a_{x,r,\omega} dV_{p,\omega}\mu(x)\,.$$

Pour un entier $n\geqq 2$, on définit, par récurrence, $V_{r,\omega}{}^n\mu=\int V_{r,\omega}{}^{n-1}\varepsilon_x dV_{r,\omega}\mu(x)$, où $V_{r,\omega}{}^1\varepsilon_x = V_{r,\omega}\varepsilon_x$. Alors on a, en remarquant $r\int dV_{r,\omega}\varepsilon_x = 1$,

$$V_{p,\omega}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}(r-p)^{n-1}V_{r,\omega}{}^n\mu\,. \tag{2.9}$$

De la même manière, on a aussi

$$V_{q,\omega}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}(r-p)^{n-1}V_{r,\omega}{}^n\mu\,. \tag{2.10}$$

Ceux donnent immédiatement (2.5). En utilisant (2) de la proposition 16, (2.5), l'égalité analogue à (2.6) pour p, r et celle pour q, r, on voit facilement (2.6).

§ 3. Le résolvante de N et le semi-groupe vaguement continu de N

Pour un noyau de convolution réel N sur X, $\mu\in M_K^+(X)$ et un ouvert $\omega\neq\phi$ dans X, on définit la N-réduite de $N*\mu$ sur ω. Posons

$$R_N(\mu;\omega) = \left\{N*\nu + a\xi;\ \begin{array}{l}\nu\in M_K^+(X),\ \mathrm{supp}(\nu)\subset\omega,\ \int d\nu = \int d\mu \\ a\in R,\ N*\nu + a\xi \leqq N*\mu\end{array}\right\}. \tag{3.1}$$

On note

$$\eta_{N,\mu,\omega} = \sup\{N*\nu + a\xi;\ N*\nu + a\xi\in R_N(\mu;\omega)\} \tag{3.2}$$

dès que la droite existe. On dit que $\eta_{N,\mu,\omega}$ la N-réduite de $N*\mu$ sur ω. Evidemment $\eta_{N,\mu,\omega}$ croît avec ω. On note simplement $\eta_{N,\omega}=\eta_{N,\varepsilon,\omega}$. Pour une exhaustion $(K_n)_{n=1}^\infty$ de X, $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,\mu,CK_n}$ existe (c'est-à-dire, pour $f\in C_K^+(X)$, $\lim_{n\to\infty}\int f d\eta_{N,\mu,CK_n}$ existe) et ne dépend pas du choix de $(K_n)_{n=1}^\infty$.

Remarque 19. Soit $N\in(PMS)$. Alors on a:

(1) Pour $c\in R$, $\mu\in M_K^+(X)$ et un ouvert $\omega\neq\phi$ dans X quelconques, $\eta_{N,\mu,\omega}$ existe et $\eta_{N+c\xi,\mu,\omega}=\eta_{N,\mu,\omega}+c\xi$.

(2) Si $\bar\omega$ est compact, alors $\eta_{N,\mu,\omega}=N*\mu'_\omega + a_{\mu,\omega}\xi$, où $(\mu'_\omega, a_{\mu,\omega})\in \underline{SB}_N((\mu,0);\omega)$.

(3) Pour une famille filtrante $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts relativement compacts

vérifiant $\bar{\omega}_\alpha \supset \omega_\beta$ ($\alpha \lneqq \beta$) et $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = \omega$, on a $\eta_{N,\mu,\omega} = \lim_{\alpha\in A}(N * \mu'_{\omega_\alpha} + a_{\mu,\omega_\alpha}\xi)$.

(4) Pour $f \in C_K^+(X)$, la fonction $\int f d\eta_{N,\varepsilon_x,\omega}$ *de* x est semi-continue inférieurement dans X, et pour $\mu \in M_K^+(X)$, $\eta_{N,\mu,\omega} = \int \eta_{N,\varepsilon_x,\omega} d\mu(x)$.

(5) Pour une exhaustion $(K_n)_{n=1}^\infty$ de X, $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,\mu,CK_n} = -\infty$ (c'est-à-dire, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{n\to\infty}\int f d\eta_{N,\mu,CK_n} = -\infty$) ou bien $\in M(X)$.

(6) Pour $0 \neq \mu \in M_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,\mu,CK_n} = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\eta_{N,CK_n} = -\infty$. Si $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,CK_n} \in M(X)$, alors $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,\mu,CK_n} = (\lim_{n\to\infty}\eta_{N,CK_n}) * \mu$.

En effet, comme $N \in (PMS) \Longleftrightarrow N \in (PSB)$, on a évidemment (1), (2) et (3) (voir la remarque 8, (1)).

Montrons (5). Supposons qu'il existe $0 \neq f_0 \in C_K^+(X)$ telle que $\lim_{n\to\infty}\int f_0 d\eta_{N,\mu,CK_n} \neq -\infty$. On peut supposer que $\int f_0 d\xi = 1$. Soit $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque. Posons $a = 1\Big/\int f d\xi$. Comme $\check{N} \in (PMS)$, la remarque 3 montre qu'il existe une constante $A \geqq 0$ telle que $|\check{N} * (f_0 - af)| \leqq A$ sur X. Alors, pour $n \geqq 1$ et $N * \nu + b\xi \in R_N(\mu; CK_n)$ quelconques, $\left|\int (f_0 - af) d(N * \nu + b\xi)\right| \leqq A\int d\mu$, d'où $\left|\int (f_0 - af) d\eta_{N,\mu,CK_n}\right| \leqq A\int d\mu$. Donc $\lim_{n\to\infty}\int f d\eta_{N,\mu,CK_n} \neq -\infty$. En remarquant que $(\eta_{N,\mu,CK_n})_{n=1}^\infty$ est décroissante, on voit que $\lim_{n\to\infty}\eta_{N,\mu,CK_n} \in M(X)$.

Montrons (6). Pour $n \geqq 1$ et $x \in X$ quelconques, on a, d'après $N \in (PMS)$ et la remarque 8, (1), $\eta_{N,\varepsilon_x,CK_p} \geqq \eta_{N,CK_n} * \varepsilon_x \geqq \eta_{N,\varepsilon_x,CK_q}$ dès que $CK_p \supset CK_n + \{x\} \supset CK_q$. Donc, en utilisant (3) et (5), on a (6).

Une famille $(N_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution (c'est-à-dire, des mesures de Radon $\geqq 0$) sur X s'appelle une résolvante si, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q \quad \text{(Equation résolvante)}. \tag{3.3}$$

On dit que $(N_p)_{p>0}$ est markovienne (resp. sous-markovienne) si, pour $p > 0$ quelconque, $p\int dN_p = 1$ $\left(\text{resp. } p\int dN_p \leqq 1\right)$. Si $\lim_{p\downarrow 0} N_p \in M^+(X)$, alors $(N_p)_{p>0}$ est dite transiente. Sinon, elle est dite récurrente.

THÉORÈME 20. *Soit N un noyau de convolution réel $\in (PMS)$ et $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ une suite d'ouverts relativement compacts telle que $\phi \neq \omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = X$. On suppose encore que $N \in (PPM)$. Pour $p > 0$, on pose $N_p = \lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon$. Alors N_p ne dépend pas du choix de $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ et $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante sous-markovienne. Pour que $(N_p)_{p>0}$ soit récurrente* *(nécessairement markovienne), il faut et il suffit que* $\eta_{N,\delta} = -\infty$, *où, pour une exhaustion* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* X, $\eta_{N,\delta} = \lim_{n\to\infty} \eta_{N,CK_n}$. *Dans ce cas, pour tout* $p > 0$,

$$N = (pN + \varepsilon) * N_p \,. \tag{3.4}$$

Pour montrer le théorème 20, on préparera les trois lemmes suivants:

LEMME 21. *Soit* $N \in (PMS)$ *et* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille filtrante dans* $M_K^+(X)$. *Si* $\lim_{\alpha\in A} \int d\mu_\alpha = 0$ *et* $(N * \mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *converge vaguement, alors il existe* $a \in R$ *tel que* $\lim_{\alpha\in A} N * \mu_\alpha = a\xi$. *En particular, si* $N \in (PPM)$, *alors* $a \leqq 0$.

Preuve. Soit ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X et $(\mu'_{\alpha,\omega}, a_{\mu_\alpha,\omega}) \in \underline{SB}_N((\mu_\alpha, 0); \omega)$. Alors $\lim_{\alpha\in A} \mu'_{\alpha,\omega} = 0$. Comme $\mathrm{supp}(\mu'_{\alpha,\omega}) \subset \bar{\omega}$, $\lim_{\alpha\in A} N * \mu'_{\alpha,\omega} = 0$. Donc $a_\omega = \lim_{\alpha\in A} a_{\mu_\alpha,\omega}$ existe et $\lim_{\alpha\in A} N * \mu_\omega = a_\omega\xi$ dans ω. Cela montre aussi que a_ω ne dépend pas de ω, d'où $\lim_{\alpha\in A} N * \mu_\alpha = a\xi$, où $a = a_\omega$. Si $N \in (PPM)$, alors $a_{\mu_\alpha,\omega} \leqq 0$, et donc $a \leqq 0$.

LEMME 22. *Soit* $N \in (PPM)$ *et* $\mu \in M^0(X)$. *Supposons que,* $\mu^- \in M_K^+(X)$, $N * \mu$ *a un sens. Si* $N * \mu \geqq 0$, *alors il existe* $0 \neq f_0 \in C_K^+(X)$ *telle que* $\int f_0 dN * \mu = 0$.

Preuve. Soit $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact $\supset \mathrm{supp}(\mu^-)$. Comme $\check{N} \in (PPM)$ (voir la remarque 2), la proposition 11, (1) montre qu'il existe $\lambda \in M_K^+(X)$ et $a \in R$ tels que $\mathrm{supp}(\lambda) \subset \bar{\omega}$, $\int d\lambda = 1$, $\check{N} * \lambda + a\xi \leqq \xi$ dans X et $\check{N} * \lambda + a\xi = \xi$ dans ω. On choisit $f \in C_K^+(X)$ telle que $\int f d\xi = 1$ et $(\check{N} + a\xi) * (\lambda * f) = 1$ sur $\mathrm{supp}(\mu^-)$. Alors $f_0 = \lambda * f$ est une fonction demandée, car

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int f_0 d(N + a\xi) * \mu = \int (\check{N} + a\xi) * f_0 d\mu \\ &\leqq \int (\check{N} + a\xi) * f_0 d\mu^+ - \int d\mu^- \leqq \int d\mu = 0\,, \end{aligned}$$

d'où le lemme 22.

LEMME 23. *Supposons que* $N \in (PSM)$ *et* $N \in (PPM)$. *Alors, pour* $\mu \in M_K^+(X)$ *et un ouvert* $\omega \neq \phi$ *dans* X *quelconques, il existe un couple* $(\eta'_{N,\mu,\omega}, a_{\mu,\omega}) \in P_1(N) \times R$ *et un seul tel que* $\eta_{N,\mu,\omega} = \eta'_{N,\mu,\omega} + a_{\mu,\omega}\xi$, *où* $P_1(N)$ *désigne la fermeture de* $\left\{N * \nu;\, \nu \in M_K^+(X),\ \int d\nu = 1\right\}$ *par la topologie vague. De plus,* $a_{\mu,\omega}$ *est non-positif et croissant avec* ω.

Preuve. D'après (3) de la remarque 19, $\eta_{N,\mu,\omega} = \lim_{\alpha\in A}(N * \mu'_{\omega_\alpha} + a_{\mu,\omega_\alpha}\xi)$, où $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille filtrante d'ouverts relativement compacts $\neq \phi$ vérifiant $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega_\beta$ $(\alpha \lneqq \beta)$, $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = \omega$ et où $(\mu'_{\omega_\alpha}, a_{\mu,\omega_\alpha}) \in \underline{SB}_N((\mu, 0); \omega_\alpha)$. D'après $N \in (PPM)$, $a_{\mu,\omega_\alpha} \leqq 0$ et $(a_{\mu,\omega_\alpha})_{\alpha\in A}$ est croissante (voir la remarque 8, (1)). Posons $a_{\mu,\omega} = \lim_{\alpha\in A} a_{\mu,\omega_\alpha}$. Alors $\eta'_{N,\mu,\omega} = \lim_{\alpha\in A} N * \mu'_{\omega_\alpha}$ existe et appartient à $P_1(N)$. On a $a_{\mu,\omega} \leqq 0$ et $\eta_{N,\mu,\omega} = \eta'_{N,\mu,\omega} + a_{\mu,\omega}\xi$. Pour $N*\nu + a\xi \in R_N(\mu; \omega)$ quelconque, on a $a \leqq a_{\mu,\omega}$, d'après la remarque 8, (1). Donc l'unicité de $(\eta'_{N,\mu,\omega}, a_{\mu,\omega})$ en résulte immédiatement.

Preuve du théorème 20. Pour montrer que $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante, il n'est pas nécessaire de supposer que $N \in (PPM)$. D'après (3) de la proposition 16, $\lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon$ existe et ne dépend pas du choix de (ω_n). Soit $x \in X$ quelconque. Si, pour deux entiers $n \geqq m \geqq 1$, $\omega_n \supset \omega_m + \{x\}$, alors on a

$$(pN + \varepsilon) * V_{p,\omega_n}\varepsilon_x + a_{x,p,\omega_n}\xi \geqq (pN + \varepsilon) * (V_{p,\omega_m}\varepsilon) * \varepsilon_x + a_{0,p,\omega_m}\xi$$

et

$$(pN + \varepsilon) * V_{p,\omega_n}\varepsilon_x + a_{x,p,\omega_n}\xi = (pN + \varepsilon) * (V_{p,\omega_m}\varepsilon) * \varepsilon_x + a_{0,p,\omega_m}\xi \quad \text{dans } \omega_m + \{x\}.$$

D'après $(N + (1/p)\varepsilon, N) \in (PTMS)$, on a $N * \varepsilon'_{p,\omega_n}\varepsilon_x + a_{x,p,\omega_n}\xi \geqq N * (V_{p,\omega_m}\varepsilon) * \varepsilon_x + a_{0,p,\omega_m}\xi$, et donc $V_{p,\omega_n}\varepsilon_x \leqq (V_{p,\omega_m}\varepsilon) * \varepsilon_x$ dans $\omega_m + \{x\}$. En faisant $m \to \infty$, on arrive à $\lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon_x \leqq N_p * \varepsilon_x$. Si, pour $n \geqq m \geqq 1$, $\omega_n + \{x\} \supset \omega_m$, on a, de la même manière, $(V_{p,\omega_n}\varepsilon) * \varepsilon_x \leqq V_{p,\omega_m}\varepsilon_x$ dans ω_m, et donc $N_p * \varepsilon_x \leqq \lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon_x$, d'où $\lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon_x = N_p * \varepsilon_x$. Par conséquent, pour $\mu \in M_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} V_{p,\omega_n}\mu = N_p * \mu$ (voir (2) de la proposition 16).

Montrons que $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. Il suffit de montrer que, pour $q > p > 0$ quelconques, (3.3) a lieu. D'après (3) de la proposition 16 et (2.5), on a, pour tout $n \geqq 1$, $V_{p,\omega_n}\varepsilon \geqq N_q + (q-p)N_q * V_{p,\omega_n}\varepsilon$ dans ω_n, et donc $N_p \geqq N_q + (q-p)N_q * N_p$. Montrons l'inégalité inverse. Soient $n > m \geqq 1$ quelconques. Comme $(N + (1/p)\varepsilon, N) \in (PTMS)$, on a

$$N * V_{p,\omega_n}\varepsilon + \frac{1}{p}a_{0,p,\omega_n}\xi \geqq N * V_{p,\omega_m}\varepsilon + \frac{1}{p}a_{0,p,\omega_m}\xi \text{ dans } X.$$

Posons $b_{m,n} = a_{0,q,\omega_n} + (q-p)\int a_{x,q,\omega_n} dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x)$. Alors (2) de la proposition 16 montre que

$$\left(qV_{q,\omega_n}\varepsilon + q(q-p)\int V_{q,\omega_n}\varepsilon_x dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x),\ b_{m,n}\right)$$
$$\in \underline{SB}_{N+\varepsilon/q,N}((\varepsilon + (q-p)V_{p,\omega_m}\varepsilon, 0); \omega_n).$$

Comme

$$(qN+\varepsilon)*(V_{p,\omega_n}\varepsilon)+a_{0,p,\omega_n}\xi = N+(q-p)N*V_{p,\omega_n}\varepsilon \text{ dans } \omega_n$$

et $N+(1/q)\varepsilon\in(PMS)$ et $(N+(1/q)\varepsilon, N)\in(PTMS)$ impliquent

$$N*V_{p,\omega_n}\varepsilon \geqq N*V_{p,\omega_m}\varepsilon+\frac{1}{p}(a_{0,p,\omega_m}-a_{0,p,\omega_n})\xi\,,$$

on a, d'après $N+(1/q)\varepsilon\in(PMS)$ et la proposition 16,

$$\begin{aligned}&(qN+\varepsilon)*(V_{p,\omega_n}\varepsilon)+\Big(\frac{q}{p}a_{0,p,\omega_n}-\frac{q-p}{p}a_{0,p,\omega_m}\Big)\xi\\ &\quad\geqq \Big(qN+\varepsilon)*(V_{q,\omega_n}\varepsilon+(q-p)\int V_{q,\omega_n}\varepsilon_x dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x)\Big)+b_{m,n}\xi\end{aligned}$$

et, d'après $(N+(1/q)\varepsilon, N)\in(PTMS)$,

$$\begin{aligned}&qN*V_{p,\omega_n}\varepsilon+\Big(\frac{q}{p}a_{0,p,\omega_n}-\frac{q-p}{p}a_{0,p,\omega_m}\Big)\xi\\ &\quad\geqq qN*\Big(V_{q,\omega_n}\varepsilon+(q-p)\int V_{q,\omega_n}\varepsilon_x dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x)\Big)+b_{m,n}\xi\,.\end{aligned}$$

On a donc, dans ω_m,

$$\begin{aligned}&V_{p,\omega_n}\varepsilon-\Big(V_{q,\omega_n}\varepsilon+(q-p)\int V_{q,\omega_n}\varepsilon_x dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x)\Big)\\ &\leqq (qN+\varepsilon)*(V_{p,\omega_n}\varepsilon)+\Big(\frac{q}{p}a_{0,p,\omega_n}-\frac{q-p}{p}a_{0,p,\omega_m}\Big)\xi\\ &\qquad-(qN+\varepsilon)*\Big(V_{q,\omega_n}\varepsilon+(q-p)\int V_{q,\omega_n}\varepsilon_x dV_{p,\omega_m}\varepsilon(x)\Big)-b_{m,n}\xi\\ &=(q-p)(N*V_{p,\omega_n}\varepsilon-N*V_{p,\omega_m}\varepsilon)+\frac{q-p}{p}(a_{0,p,\omega_n}-a_{0,p,\omega_m})\xi\\ &=\frac{1}{p}(q-p)(pN+\varepsilon)*(V_{p,\omega_n}\varepsilon-V_{p,\omega_m}\varepsilon)-\frac{q-p}{p}(V_{p,\omega_n}\varepsilon-V_{p,\omega_m}\varepsilon)\\ &\qquad+\frac{q-p}{p}(a_{0,p,\omega_n}-a_{0,p,\omega_m})\xi=-\frac{q-p}{p}(V_{p,\omega_n}\varepsilon-V_{p,\omega_m}\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

En faisant $n\uparrow\infty$, on a

$$N_p-(N_q+(q-p)N_q*V_{p,\omega_m}\varepsilon)\leqq\frac{q-p}{p}(V_{p,\omega_m}\varepsilon-N_p) \text{ dans } \omega_m\,.$$

Comme $\int dN_q\leqq(1/q)$ et $\int dV_{p,\omega_m}\varepsilon=1$, on a $\lim_{m\to\infty}N_q*V_{p,\omega_m}\varepsilon=N_q*N_p$, d'où $N_p\leqq N_q+(q-p)N_q*N_p$. Ainsi $N_p-N_q=(q-p)N_p*N_q$, et donc $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. Evidemment elle est sous-markovienne.

Supposons que $\eta_{N,\delta} = -\infty$. On montrera que $(N_p)_{p>0}$ est récurrente et que, pour tout $p > 0$, (3.4) a lieu. D'après $N \in (PPM)$, on a, pour tout $p > 0$, $N + (1/p)\varepsilon \in (PPM)$. Cela montre que $a_{0,p,\omega_n} \leqq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et $(a_{0,p,\omega_n})_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Donc $\lim_{n\to\infty} a_{0,p,\omega_n}$ existe. Posons $a_{0,p} = \lim_{n\to\infty} a_{0,p,\omega_n} \leqq 0$. Alors $(N * V_{p,\omega_n}\varepsilon)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement et l'on a

$$N = \lim_{n\to\infty} pN * V_{p,\omega_n}\varepsilon + N_p + a_{0,p}\xi\,.$$

Montrons que $(N_p)_{p>0}$ est markovienne. Comme $\check{N} \in (PPM)$ (voir la remarque 2), on a, pour toute $0 \neq f \in C_K^+(X)$, $\check{N} * f \leqq m_f < \infty$ sur X, où $m_f = \sup_{x\in \operatorname{supp}(f)} \check{N} * f(x)$ (voir le corollaire 14). Donc, en posant $\omega' = \{x;\, \check{N} * f(x) > 0\}$, on a $\int_{\omega'} \check{N} * f dN_p < \infty$. Comme $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{C\omega'} \check{N} * f dV_{p,\omega_n}\varepsilon \leqq \int_{C\omega'} \check{N} * f dN_p$, on a $\int |\check{N} * f| dN_p < \infty$, et $N * N_p$ a un sens $(p > 0)$. Soit $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. On note $\eta_{N,CK_m} = \eta'_{N,CK_m} + a_{\varepsilon,CK_m}\xi$ comme dans le lemme 23, où $\eta'_{N,CK_m} \in P_1(N)$ et $a_{\varepsilon,CK_m} \in R$. Soit $p > 0$ quelconque fixé. Comme $N = \eta_{N,CK_m}$ dans CK_m, on a, pour tout $m \geqq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} (N * V_{p,\omega_n}\varepsilon - N * N_p) = \lim_{n\to\infty} (\eta_{N,CK_m} * V_{p,\omega_n}\varepsilon - \eta_{N,CK_m} * N_p)\,.$$

Soit ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Alors $SB_N((N_p, 0); \omega) \neq \phi$[6], et l'on choisit $(\nu, a) \in SB_N((N_p, 0); \omega)$. Alors $\eta'_{N,CK_m} * N_p \geqq \eta'_{N,CK_m} * \nu + a\xi$ $(m = 1, 2, \cdots)$. Soit $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque. Comme, pour tout $n \geqq 1$, $N - a_{0,p,\omega_n}\xi \geqq pN * V_{p,\omega_n}\varepsilon$, on a

$$\eta'_{N,CK_m} - a_{0,p,\omega_n}\xi \geqq p\eta'_{N,CK_m} * V_{p,\omega_n}\varepsilon \quad (m = 1, 2, \cdots)\,,$$

et donc, pour tout $m \geqq 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int f d\eta_{N,CK_m} * (V_{p,\omega_n}\varepsilon - N_p) &= \lim_{n\to\infty} \int f d\eta'_{N,CK_m} * (V_{p,\omega_n}\varepsilon - N_p) \\
&\quad + a_{\varepsilon,CK_m} \int f d\xi \Big(\frac{1}{p} - \int dN_p\Big) \leqq \frac{1}{p}\Big(\int f d\eta'_{N,CK_m} - a_{0,p} \int f d\xi\Big) \\
&\quad - \int f d\eta'_{N,CK_m} * \nu - a \int f d\xi + a_{\varepsilon,CK_m} \int f d\xi \Big(\frac{1}{p} - \int dN_p\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{p} - \int dN_p\Big) \int f d\eta_{N,CK_m} + \int f d\eta'_{N,CK_m} * \Big(\Big(\int d\nu\Big)\varepsilon - \nu\Big) \\
&\quad - (a_{0,p} + a) \int f d\xi\,,
\end{aligned}$$

[6] Pour $\mu \in M^+(X)$ et $a \in R$, on peut définir analogiquement $SB_N((\mu, a); \omega)$ dès que $N * \mu$ a un sens et $\int d\mu < \infty$.

car $\int dN_p = \int d\nu$. D'après les remarques 2 et 3, il existe une constante $C>0$ telle que $\left|\check{N}*f*\left(\left(\int d\nu\right)\varepsilon-\check{\nu}\right)\right|\leqq C$ sur X, et donc $\left|\int fd\eta'_{N,CK_m}*\left(\left(\int d\nu\right)\varepsilon-\nu\right)\right|\leqq C$. Comme $\lim_{m\to\infty}\int fd\eta_{N,CK_m}=-\infty$ et $\int dN_p\leqq 1/p$, on a $\int dN_p=1/p$. Ainsi $(N_p)_{p>0}$ est markovienne.

Montrons que (3.4) a lieu. Comme

$$V_{p,\omega_n}\varepsilon - N_p|_{\omega_n}\in M_K^+(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\int d(V_{p,\omega_n}\varepsilon - N_p|_{\omega_n})=0\,,$$

le lemme 21 montre qu'il existe $b_p\in R$ vérifiant $b_p\leqq 0$ et $\lim_{n\to\infty}N*V_{p,\omega_n}\varepsilon - N*N_p=b_p\xi$. Posons $a_p=a_{0,p}+pb_p$. Alors $a_p\leqq 0$ et

$$N=(pN+\varepsilon)*N_p+a_p\xi\,.$$

Supposons que $a_p<0$. Comme N_p est de masse totale finie, il existe $f\in C_K^+(X)$ telle que $\int fd\xi=1$ et $N_p*f<-a_p$ sur X. Alors on a $N*f<N*(pN_p)*f$ sur X. Mais cela est en contradiction avec le lemme 22, d'où $a_p=0$. Ainsi on obtient (3.4). Montrons que $(N_p)_{p>0}$ est récurrente. Supposons contrairement que $\lim_{p\downarrow 0}N_p$ existe dans $M^+(X)$. Posons $N_0=\lim_{p\downarrow 0}N_p$. Comme $\lim_{p\to 0}pN_p=0$, on a, de la même manière que ci-dessus,

$$\lim_{p\to 0}pN*N_p=\lim_{p\to 0}p\eta_{N,CK_m}*N_p\leqq\eta_{N,CK_m}\quad(m=1,2,\cdots)\,.$$

Mais cela est en contraction avec $\lim_{p\to 0}pN*N_p=N-N_0$ et $\eta_{N,\delta}=-\infty$. Par conséquent, $(N_p)_{p>0}$ est récurrente.

Supposons que $(N_p)_{p>0}$ est récurrente. On montrera que $\eta_{N,\delta}=-\infty$. Evidemment $(N_p)_{p>0}$ est markovienne. Dans la preuve ci-dessus, on remarque que, pour obtenir (3.4), on utiliser seulement la markovienne de $(N_p)_{p>0}$. Par conséquent, (3.4) existe. Supposons que $\eta_{N,\delta}\neq-\infty$. Alors, d'après la remarque 19, $\eta_{N,\delta}\in M(X)$. Pour $m\geqq 1$ et $n\geqq 1$ quelconques, on choisit $(\varepsilon'_{\omega_n\cap CK_m}, a_{0,\omega_n\cap CK_m})\in \underline{SB}_N((\varepsilon,0);\ \omega_n\cap CK_m)$ dès que $\omega_n\cap CK_m\neq\phi$. Daprès (3) de la remarque 19, $(N*\varepsilon'_{\omega_n\cap CK_m}+a_{0,\omega_n\cap CK_m}\xi)_{n=1}^{\infty}$ converge d'une manière croissante vers η_{N,CK_m} avec $n\uparrow\infty$, et donc, pour $p>0$ et $f\in C_K^+(X)$ quelconques, $N\in(PMS)$ montre

$$p\eta_{N,CK_m}*N_p*f\leqq\eta_{N,CK_m}*f\leqq p\eta_{N,CK_m}*N_p*f+\sup_{x\in CK_m+\mathrm{supp}(f)}N_p*f(x)\,.$$

Comme $(\eta_{N,CK_m})_{m=1}^{\infty}$ converge d'une manière décroissante vers $\eta_{N,\delta}$ lorsque $m\uparrow\infty$ et $\lim_{x\to\delta}N_p*f(x)=0$, on a $\eta_{N,\delta}=p\eta_{N,\delta}*N_p$, d'où

$$(N - \eta_{N,\delta}) = p(N - \eta_{N,\delta}) * N_p + N_p\,.$$

Donc $N \neq \eta_{N,\delta}$. Comme, pour tout l'entier $m \geqq 1$, $\sum_{n=1}^{m} p^{n-1}(N_p)^n = (N - \eta_{N,\delta}) - (N - \eta_{N,\delta}) * (pN_p)^{m+1}$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(N_p)^n$ converge vaguement, où $(N_p)^1 = N_p$ et $(N_p)^n = (N_p)^{n-1} * N_p$ $(n \geqq 2)$. Evidemment $\lim_{p \downarrow 0} N_p = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(N_p)^n$, d'où une contradiction. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 24. Soit $N \in (PMS)$. S'il existe une résolvante sous-markovienne $(N_p)_{p>0}$ telle que, pour $\mu \in M_K^0(X)$ et $p > 0$ quelconques, $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$, alors elle est unique.

En effet, soient $(N_p)_{p>0}$ et $(M_p)_{p>0}$ deux résolvantes vérifiant les conditions demandées. Soit $f \in C_K^0(X)$ quelconque. Alors $N * f$ est bornée, et donc, pour tout $p > 0$, $(N * f) * N_p * M_p$ a un sens. D'après $N * f = (pN * f + f) * N_p = (pN * f + f) * M_p$, on a aussi $(N * f) * N_p = (N * f) * M_p$, et donc $N_p * f = M_p * f$. Comme N_p et M_p sont de masse totale finie, on voit $N_p = M_p$.

Dans ce cas, $(N_p)_{p>0}$ s'appelle la résolvante de N.

Une famille $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ des noyaux de convolution $\geqq 0$ sur X s'appelle un semi-groupe vaguement continu si $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ pour tous $t \geqq 0$, $s \geqq 0$ et $t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Il est dit markovien (resp. sous-markovien) si, pour tout $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t = 1$ $\left(\text{resp. } \int d\alpha_t \leqq 1\right)$. Il est dit transient (resp. récurrent) si, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $\int_0^\infty \int f d\alpha_t dt < \infty$ $\left(\text{resp. il existe } f \in C_K^+(X) \text{ telle que } \int_0^\infty \int f d\alpha_t dt = \infty\right)$.

THÉORÈME 25. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Si $N \in (PMS)$, N est non-périodique*[7], *$N \in (PPM)$ et $\eta_{N,\delta} = -\infty$, alors il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ vaguement continu, markovien et récurrent et un seul tel que, pour $t \geqq 0$ quelconque, la convolution $N * \alpha_t$ a un sens, $N \geqq N * \alpha_t$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(N - N * \alpha_t) = \varepsilon\,. \tag{3.5}$$

Preuve. D'après le théorème 20, il existe la résolvante $(N_p)_{p>0}$ de N. Comme N est non-périodique, (3.4) montre que, pour tout $p > 0$, N_p est aussi non-périodique. Il est bien connu qu'il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ vérifiant $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ pour tout $p > 0$

[7] Cela signifie que, pour tout $0 \neq x \in X$, $N \neq N * \varepsilon_x$.

(voir, par exemple, [8], p. 9). Comme $(N_p)_{p>0}$ est markovienne et récurrente, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est aussi markovien et récurrent. Soit $p>0$ quelconque. Comme $N*N_p$ a un sens, on a, pour $f\in C_K^+(X)$ quelconque, $\int_0^\infty \exp(-pt)\int|\check{N}*f|d\alpha_t dt<\infty$, et donc, pour tout $t\geqq 0$, $N*\left(\int_t^\infty \alpha_s\exp(-ps)ds\right)$ a un sens. Comme $N_p*\alpha_t=\exp(pt)\int_t^\infty \alpha_s\exp(-ps)ds$, on a

$$\int|\check{N}*\check{N}_p*f|d\alpha_t\leqq \exp(pt)\int_t^\infty \exp(-ps)\int|\check{N}*f|d\alpha_s ds<\infty\,,$$

et donc $(N*N_p)*\alpha_t$ a un sens. En même temps, on voit que $t\to(N*N_p)*\alpha_t$ est vaguement continue. Donc, en utilisant (3.4), on voit que $N*\alpha_t$ a un sens et $t\to N*\alpha_t$ est vaguement continue. Pour $f\in C_K^+(X)$ quelconque, on définit la fonction $\varphi_f(p)=\int_0^\infty\int\exp(-pt)fd(N-N*\alpha_t)dt$ dans $(0,\infty)$. Alors, pour un entier $m\geqq 1$ quelconque,

$$(-1)^m\frac{d^m}{dp^m}\varphi_f(p)=\frac{m!}{p^{m+1}}\left(\int fdN-\int fdN*(pN_p)^{m+1}\right)\geqq 0 \text{ dans } (0,\infty)\,.$$

D'après le théorème de Bernstein (voir [12], p. 161) et la continuité de $t\to\int fdN*\alpha_t$, on a $\int fdN\geqq\int fdN*\alpha_t$, d'où $N\geqq N*\alpha_t$. Comme (3.4) donne, pour $p>0$ et $t\geqq 0$ quelconques,

$$\frac{1}{t}(N-N*\alpha_t)=\frac{p}{t}N*\left(\int_0^t\alpha_s\exp(-ps)ds\right)$$
$$+\frac{1}{t}\int_0^t\alpha_s\exp(-ps)ds-\frac{1-\exp(-pt)}{t}N*\alpha_t$$

et $\lim_{t\to 0}N*\alpha_t=N$, on obtient (3.5).

Montrons l'unicité de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Soit $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ un autre semi-groupe vaguement continu vérifiant les conditions demandées et posons $M_p=\int_0^\infty\beta_t\exp(-pt)dt$ $(p>0)$. Soient $p>0$ et V un voisinage compact de l'origine quelconques fixés. Comme M_p est injectif[8] et vérifie le principe du balayage sur tout ouvert[9] (voir, par exemple, [6], p. 651, 660), on peut choisir $\lambda_{CV}\in M^+(X)$ telle que $M_p\geqq M_p*\lambda_{CV}$, $M_p\neq M_p*\lambda_{CV}$ et $M_p=M_p*\lambda_{CV}$

[8] Cela signifie que, pour $\mu\in M(X)$ quelconque, on a $\mu=0$ dès que $M_p*\mu$ a un sens et $M_p*\mu=0$.

[9] Cela signifie que, pour $\mu\in M_K^+(X)$ et un ouvert ω dans X quelconques, il existe $\mu'\in M^+(X)$ telle que $\operatorname{supp}(\mu')\subset\bar{\omega}$, $M_p*\mu\geqq M_p*\mu'$ dans X et $M_p*\mu=M_p*\mu'$ dans ω.

dans CV. Comme $\int dM_p = 1/p$, $\int d\lambda_{CV} < 1$. Pour $f \in C_K^0(X)$, on pose $f_V = (M_p - M_p * \lambda_{CV}) * f$. Alors $f_V \in C_K^0(X)$ et

$$\frac{1}{t}|N * f_V - N * \beta_t * f_V| \leqq \frac{1}{t}|(N * f) * (\varepsilon - \lambda_{CV}) * \left(\int_0^t \beta_s \exp(-ps)ds\right)| + \frac{1 - \exp(-pt)}{t}|N * \beta_t * f_V|.$$

Comme $N * f$ et $N * f_V$ sont bornées (voir la remarque 3), la fonction $(1/t)(N * f_V(x) - N * \beta_t * f_V(x))$ de (t, x) est bornée sur $(0, \infty) \times X$. Comme $(1/t)(N * f_V - N * \beta_t * f_V)$ converge uniformément vers f_V sur tout compact lorsque $t \to 0$ et $\int dM_p = 1/p$, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(N * f_V - N * \beta_t * f_V) * M_p = M_p * f_V \text{ sur } X.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(N * f_V - N * \beta_t * f_V) * M_p &= \lim_{t \to 0} (N * f_V) * \left(\frac{M_p - M_p * \beta_t}{t}\right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(N * f_V) * \left(\int_0^t \beta_s \exp(-ps)ds\right) \\
&\quad - \lim_{t \to 0} \frac{1 - \exp(-pt)}{t}(N * f_V) * M_p * \beta_t \\
&= N * f_V - p(N * f_V) * M_p,
\end{aligned}$$

car $N * f_V$ est bornée. Donc $N * f_V = (pN * f_V + f_V) * M_p$. En posant $a_V = \int dM_p * (\varepsilon - \lambda_{CV})$, on obtient que $(1/a_V)f_V \to f$ dans $C_K(X)$ lorsque $V \downarrow \{0\}$, et donc

$$N * f = (pN * f + f) * M_p.$$

Comme $(N * f) * M_p * N_p$ a un sens, on obtient $(N * f) * M_p = (N * f) * N_p$. Par conséquent, $M_p * f = N_p * f$. Comme f est quelconque et $\int dM_p = \int dN_p = 1/p$, $M_p = N_p$. L'injectivité de la transformation de Laplace montre donc que, pour tout $t \geqq 0$, $\alpha_t = \beta_t$, ce qui montre l'unicité de $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$. La démonstration est ainsi complète.

De la même manière que ci-dessus, on aura la remarque suivante:

Remarque 26. Soit $N \in (PMS)$. S'il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$

vaguement continu et sous-markovien tel que $N \geqq N * \alpha_t$ $(t \geqq 0)$ et (3.5) ait lieu, alors $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est déterminé d'une façon unique.

Dans ce cas, on dit que $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu de N.

Considérons encore la condition $\eta_{N,\delta} = -\infty$.

Remarque 27. Soit $N \in (PMS)$. Si l'on a $N \in (PPM)$ et, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{x \to \delta} N * f(x) = -\infty$, alors $\eta_{N,\delta} = -\infty$.

En effet, soit $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. En regardant le corollaire 14 et (3) de la remarque 19, on voit que, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque,

$$\eta_{N, CK_n} * f \leqq \sup\{N * f(x);\ x \in \overline{CK_n} + \mathrm{supp}(f)\} \text{ sur } X,$$

et donc $\lim_{n \to \infty} \eta_{N, CK_n} * f(x) = -\infty$ sur X, d'où $\eta_{N,\delta} = -\infty$.

L'inverse de la remarque 27 n'a pas lieu. Par exemple, soit $X = R$ et

$$N = \begin{cases} -\, xdx & \text{sur } [0, \infty) \\ 0 & \text{dans } (-\infty, 0). \end{cases}$$

Alors $N \in (PMS)$, $\in (PPM)$ (voir la remarque 7), $\eta_{N,\delta} = -\infty$ et, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $\lim_{x \to -\infty} N * f(x) = 0$.

On dit que N vérifie le principe du semi-balayage sur tout ouvert (noté $N \in (PSB_g)$) si, pour $\mu \in M_K^+(X)$ et $a \in R$ et un ouvert $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $\mu'_\omega \in M_K^+(X)$ et $a_{\mu,\omega} \in R$ tels que (B.1), (B.2), (B.3) et (B.4) aient lieu. Analogiquement on définit $SB_N((\mu, a); \omega)$ et $\underline{SB}_N((\mu, a); \omega)$.

Proposition 28. *Soit $N \in (PMS)$. Si l'on a $N \in (PPM)$ et $\eta_{N,\delta} = -\infty$, alors on a:*

(1) *$N \in (PSB_g)$ et, pour $\mu \in M_K^+(X)$, $a \in R$ et un ouvert $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, $\underline{SB}_N((\mu, a); \omega) \neq \phi$.*

(2) *Si $C\omega$ est compact, alors, pour $(\mu'_\omega, a_{\mu,\omega}) \in SB_N((\mu, a); \omega)$ quelconque, $a_{\mu,\omega} = a$.*

Preuve. Soit $(\omega'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts dans X telle que $\omega \cap \omega'_n \neq \phi$, $\overline{\omega'_n} \subset \omega'_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega'_n = X$. Posons $\omega_n = \omega \cap \omega'_n$. Pour deux entiers $n \geqq 1$ et $m \geqq 1$, on choisit $(\mu'_{n,m}, a_{n,m}) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/m, N}((\mu, a); \omega_n)$. D'après la proposition 16, (3), on a $\mu'_{n,m} \geqq \mu'_{n+1,m}$ dans ω'_n. D'après $(N + (1/m)\varepsilon$, $N + (1/(m+1))\varepsilon) \in (PRMS)$ et $N + (1/(m+1))\varepsilon \in (PPM)$, on a $a_{n,m} \leqq a$ et $(a_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ est croissante. On voit aussi que $(a_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Posons $a_n = \lim_{m \to \infty} a_{n,m}$; alors $a_n \leqq a$ et $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. On pose encore $a'_{\mu,\omega} = \lim_{n \to \infty} a_n \leqq a$. On voit que, pour tout point vaguement adhérent

ν_n de $(\mu'_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ lorsque $m \to \infty$, on a $(\nu_n, a_n) \in \underline{SB}_N((\mu, a); \omega_n)$. Par conséquent, il existe une suite $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty} \subset M_K^+(X)$ telle que $(\mu'_n, a_n) \in \underline{SB}_N((\mu, a); \omega_n)$ et $\mu'_n \geqq \mu'_{n+1}$ dans ω'_n. On pose $\mu'_\omega = \lim_{n\to\infty} \mu'_n$. Alors $\int d\mu'_\omega \leqq \int d\mu$. Soit $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. Alors, pour tout $m \geqq 1$, on obtient, de la même manière que dans le théorème 20, que $N * \mu'_\omega$ a un sens et que, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega' \neq \phi$ dans X,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int fd(N * \mu'_n - N * \mu'_\omega) &= \lim_{n\to\infty} \int fd(\eta_{N,CK_m} * \mu'_n - \eta_{N,CK_m} * \mu'_\omega) \\ &\leqq \left(\int d\mu - \int d\mu'_\omega\right) \int fd\eta_{N,CK_m} + \int fd\eta'_{N,CK_m} * \left(\left(\int d\mu'_\omega\right)\varepsilon - \nu\right) \\ &\quad - (a_{\mu,\omega} + a) \int fd\xi\,,\end{aligned}$$

où $(\nu, a) \in SB_N((\mu'_\omega, 0); \omega')$ (voir la preuve de $\eta_{N,\delta} = -\infty \Rightarrow$ la markovienne de $(N_p)_{p>0}$ dans le théorème 20). Donc $\eta_{N,\delta} = -\infty$ donne $\int d\mu'_\omega = \int d\mu$. Donc $\mu'_n - \mu'_\omega|_{\omega'_n} \in M_K^+(X)$ et $\lim_{n\to\infty} \int d(\mu'_n - \mu'_\omega|_{\omega'_n}) = 0$. D'après lemme 21, il existe $0 \geqq b \in R$ tel que $\lim_{n\to\infty} N * \mu'_n - N * \mu'_\omega = b\xi$. En posant $a_{\mu,\omega} = a'_{\mu,\omega} + b$, on voit facilement $(\mu'_\omega, a_{\mu,\omega}) \in \underline{SB}_N((\mu, a); \omega)$, ce qui montre (1).

Montrons (2). Supposons que $C\omega$ est compact. On prend $(\mu'_\omega, a_\omega) \in SB_N((\mu, a); \omega)$. Pour $n \geqq 1$ quelconque, on peut choisir $(\mu'_{\omega,n}, a_{\omega,n}) \in \underline{SB}_N((\mu'_\omega, a_\omega); \omega'_n)$ tel que $\mu'_{\omega,n} \geqq \mu'_\omega$ dans ω'_n. On peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \mu'_{\omega,n}$ existe dans $M^+(X)$. Posons $\mu'' = \lim_{n\to\infty} \mu'_{\omega,n}$; alors $\mu'' \geqq \mu'_\omega$. Comme $\int d\mu'' \leqq \int d\mu'_\omega$, on a $\mu'' = \mu'_\omega$. De la même manière que ci-dessus, $\lim_{n\to\infty} N*\mu'_{\omega,n} - N*\mu'_\omega = b\xi$, où $0 \geqq b \in R$. On a donc $a_\omega \geqq \lim_{n\to\infty} a_{\omega,n}$. En utilisant encore $N \in (PPM)$, on a $a_{\omega,n} \leqq a$, d'où $a_\omega \leqq a$. Posons $\lambda = N * \mu - N * \mu'_\omega + (a - a_\omega)\xi$; alors $\lambda \in M_K^+(X)$. Si $a_\omega < a$, il existe $f \in C_K^+(X)$ telle que $\int fd\xi = 1$ et $\lambda * f < a - a_\omega$ sur X. Donc $N * \mu'_\omega * f > N * \mu * f$ sur X. Mais cela est en contradiction avec le lemme 22, ce qui montre (2).

Pour une exhaustion $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de X, on a $\eta_{N,CK_n} = N * \varepsilon'_{CK_n}$ dès que N vérifie les conditions dans la proposition 28, où $(\varepsilon'_{CK_n}, 0) \in \underline{SB}_N((\varepsilon, 0); CK_n)$.

Remarque 29. Soit $N \in (PSM)$ et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien. Posons $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(p > 0)$. Alors, pour que, pour $p > 0$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$, il faut et il suffit que, pour tout $t \geqq 0$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, $(N * \mu) * (\varepsilon - \alpha_t) = \int_0^t \alpha_s * \mu ds$.

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. Comme $N * \mu$ est bornée (c'est-à-dire, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $N * \mu * f$ est bornée) (voir la remarque 3), on a, d'après $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$,

$$(N * \mu) * (\varepsilon - \alpha_t) = (pN * \mu + \mu) * \int_0^t \alpha_s \exp(-ps) ds \\ - (1 - \exp(-pt))(pN * \mu + \mu) * N_p * \alpha_t .$$

En faisant $p \downarrow 0$, on a l'égalité demandée. Montrons que la condition est suffisante. Pour tout $p > 0$, on a

$$\int_0^\infty (N * \mu) * (\varepsilon - \alpha_t) \exp(-pt) dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t \alpha_s * \mu ds \right) \exp(-pt) dt \\ = \frac{1}{p} \int_0^\infty \alpha_t * \mu \exp(-pt) dt = \frac{1}{p} N_p * \mu ,$$

car $\left(\int_0^t \alpha_s * \mu ds \right)_{t>0}$ est vaguement bornée. On obtient donc l'égalité demandée.

§ 4. Les noyaux de convolution réel de type logarithmique

En rappelant le semi-groupe gaussien sur R^2, on donne la définition suivante:

DÉFINITION 30. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. On dit qu'il est semi-transient si, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, $\left(\int_0^a \alpha_t * \mu dt \right)_{a>0}$ est vaguement bornée.

Evidemment $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est semi-transient si et seulement si, pour $\mu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = 1$ quelconque, $\left(\int_0^a (\alpha_t - \alpha_t * \mu) dt \right)_{a>0}$ est vaguement bornée. Si $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est sous-markovien et transient, alors il est semi-transient. On voit facilement qu'il existe de semi-groupes vaguement continus et markoviens qui ne sont pas semi-transients.

PROPOSITION 31. *Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, sous-markovien et semi-transient et $\mu \in M_K^0(X)$. Si $\lim_{a \to \infty} \int_0^a \alpha_t * \mu dt$ exists dans $M(X)$, alors $\lim_{p \to 0} \int_0^\infty \alpha_t * \mu \exp(-pt) dt$ existe aussi dans $M(X)$ et l'on a*

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \alpha_t * \mu dt = \lim_{p \to 0} \int_0^\infty \alpha_t * \mu \exp(-pt) dt . \tag{4.1}$$

D'autre part, supposons que $\lim_{p \to 0} \int_0^\infty \alpha_t * \mu \exp(-pt) dt$ existe dans $M(X)$.

Alors, pour que $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \alpha_t * \mu dt$ existe dans $M(X)$ et (4.1) ait lieu, il faut et il suffit que $\lim_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t \alpha_s * \mu s ds = 0$ dans $M(X)$.

Pour $f \in C_K(X)$ et $\mu \in M_K^0(X)$, on pose $\alpha(t) = \int_0^t \int f d\alpha_s * \mu ds$. En appliquant le lemme suivant à la fonction α, on a immédiatement la proposition 31.

Il fait question si $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \alpha_t * \mu dt$ existe dans $M(X)$ et (4.1) a lieu dans le cas où $\lim_{p\to 0}\int_0^\infty \alpha_t * \mu \exp(-pt)dt$ existe dans $M(X)$.

LEMME 32 (voir [12], p. 180, 188). *Soit $\alpha(t)$ une fonction sur $R^+ = \{t \in R;\ t \geqq 0\}$ de variation bornée sur tout compact $\subset R^+$ à valeurs réelles. Supposons que, pour $s > 0$ quelconque, $\int_0^\infty \exp(-st)|d\alpha|(t) < \infty$. Si $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ existe et est finie, alors $\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \exp(-st)\, d\alpha(t)$ existe et l'on a $\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \exp(-st) d\alpha(t) = \lim_{t\to\infty}\alpha(t)$.*

D'autre part, supposons que $\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \exp(-st)d\alpha(t)$ existe et est finie. Alors, pour que $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ existe et l'on ait $\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \exp(-st)d\alpha(t)$, il faut et il suffit que $\int_0^t u d\alpha(u) = o(t)$ lorsque $t \to \infty$.

PROPOSITION 33. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. S'il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ vaguement continu, sous-markovien et semi-transient tel que, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, on ait, avec une constante $c_\mu \in R$,*

$$N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt + c_\mu \xi \tag{4.2}$$

(c'est-à-dire, pour toute $f \in C_K(X)$, $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \int f d\alpha_t * \mu dt$ existe et $\int f dN * \mu = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \int f d\alpha_t * \mu dt + c_\mu \int f d\xi$), alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est déterminé d'une manière unique et $N \in (PMS)$.

Preuve. Montrons que $N \in (PMS)$. Pour $0 < p \in R$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$. Supposons que, pour $f,\ g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$ quelconques, $N * f \leqq N * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Posons $c = c_{(f-g)\xi}$; alors la proposition 31 montre que

$$N * ((f-g)\xi) = \lim_{p\to 0} N_p * ((f-g)\xi) + c\xi\,.$$

Pour un nombre $b > 0$ quelconque, on choisit un voisinage compact V de l'origine tel que $N * (f - g) < a + b$ sur $\mathrm{supp}(f) + V$. On prend $\varphi_V \in C_K^+(X)$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi_V) \subset V$ et $\int \varphi_V d\xi = 1$. Alors $(N_p * (f - g) * \varphi_V)_{p>0}$ converge uniformément vers $N * (f - g) * \varphi_V - c$ sur tout compact lorsque $p \to 0$, et donc il existe $p_0 > 0$ tel que, pour $0 < p < p_0$ quelconque, $N_p * (f - g) * \varphi_V < a + b - c$ sur $\mathrm{supp}(f) + V$. Si $a + b - c < 0$, alors $N_p * (f * \varphi_V) < N_p * (g * \varphi_V)$ sur $\mathrm{supp}(f * \varphi_V)$, et donc le principe complet du maximum de N_p[10] donne $N_p * (f * \varphi_V) \leqq N_p * (g * \varphi_V)$ sur X et $N_p * (f * \varphi_V) \neq N_p * (g * \varphi_V)$. Comme $\int dN_p < \infty$ et $\int f * \varphi_V d\xi = \int g * \varphi_V d\xi$, c'est impossible, d'où $a + b - c \geqq 0$. En utilisant encore le principe complet du maximum de N_p, on a $N_p * (f * \varphi_V) \leqq N_p * (g * \varphi_V) + a + b - c$ sur X. En faisant $p \downarrow 0$, $V \downarrow \{0\}$ et $b \downarrow 0$, on arrive à $N * f \leqq N * g + a$ sur X. Ainsi $N \in (PMS)$.

Montrons finalement l'unicité de $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$. D'après (4.2), on a, pour tout $x \in X$, $c_{(\varepsilon - \varepsilon_x)} = - c_{(\varepsilon - \varepsilon_{-x})}$. Donc, pour une mesure de Radon positive μ dans X symétrique par rapport à l'origine et de la masse totale de l'unité quelconque, on a $N - N * \mu = \int_0^\infty (\alpha_t - \alpha_t * \mu) dt$. On a alors

$$(pN * (\varepsilon - \mu) + (\varepsilon - \mu)) * N_p = N * (\varepsilon - \mu)\,. \tag{4.3}$$

De la même manière que dans la remarque 24 et dans le théorème 25, on voit l'unicité de $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$, d'après (4.3). La démonstration est ainsi complète.

Par exemple, soit $N = (\log(1/|x|) + x_1)dx$ sur R^2 et $(g_t dx)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe gaussien sur R^2. Alors, pour $\mu \in M_K^0(R^2)$ quelconque, on a $N * \mu = \left(\int_0^\infty g_t * \mu dt\right) - \left(\int x_1 d\mu(x)\right)dx$. Pour $x = (x_1, x_2) \in R^2$, on note $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

On voit facilement la remarque suivante:

Remarque 34. Soient N, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et c_μ les mêmes que dans la proposition 33. Pour $x \in X$, on pose $a_x = c_{(\varepsilon_x - \varepsilon)}$. Alors on a:

(1) La fonction a_x de x est additive et continue sur X.

(2) On définit le noyau de convolution réel $\tilde{N}$ sur X par $d\tilde{N} = dN + a_x d\xi(x)$. Alors, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque,

$$\tilde{N} * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt\,. \tag{4.4}$$

[10] Cela signifie que, pour $f, g \in C_K^+(K)$ et $0 \leqq a \in R$ quelconques, $N_p * f \leqq N_p * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$ implique la même inégalité sur X. Il est bien connu que N_p vérifie le principe complet du maximum (voir, par exemple, [3]).

En effet, soient $x, y \in X$ quelconques. On a alors

$$N * (\varepsilon_y - \varepsilon_{x+y}) = N * (\varepsilon - \varepsilon_x) * \varepsilon_y = \int_0^\infty \alpha_t * (\varepsilon_y - \varepsilon_{x+y})dt - a_x\xi ,$$

et donc on voit facilement $a_{x+y} = a_x + a_y$. Comme $\lim_{p\to 0} N_p * (\varepsilon_x - \varepsilon)$ $= \lim_{p\to 0} \int_0^\infty \alpha_t * (\varepsilon_x - \varepsilon)\exp(-pt)dt = \int_0^\infty \alpha_t * (\varepsilon_x - \varepsilon)dt$ (voir la proposition 31), la fonction a_x de x est universellement mesurable. Donc le noyau de convolution réel $\tilde{N}$ est défini. Comme $a_0 = 0$, on a $\tilde{N} * (\varepsilon_x - \varepsilon) = N * (\varepsilon_x - \varepsilon)$ $+ a_x\xi$, et donc la fonction a_x de x est continue sur X. Pour $f \in C_K(X)$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, on a,

$$\begin{aligned}\iint f(x+y)a_y d\xi(y)d\mu(x) &= \iint f(x+y)(a_{x+y} - a_x)d\xi(y)d\mu(x)\\ &= -\left(\int a_x d\mu(x)\right)\int fd\xi .\end{aligned}$$

Comme, pour $\nu \in M_K^+(X)$ à $\int d\nu = 1$, $c_{(\nu-\varepsilon)} = \int a_x d\nu(x)$, on a $c_\mu = \int a_x d\mu(x)$. Cela donne (4.4), d'où la remarque 34.

D'après (2) de la présente remarque, on a, pour toute $\mu \in M_K(X)$.

$$dN * \mu = d\tilde{N} * \mu - \left(\int d\mu\right)a_x d\xi(x) + \left(\int a_x d\mu(x)\right)d\xi .$$

Remarque 35. Soient N, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, a_x et $\tilde{N}$ les mêmes que ci-dessus. Alors $\tilde{N} \in (PPM)$. En posant $dH = a_x d\xi(x)$, on a $N \in (PPM) \Longleftrightarrow (\tilde{N}, -H)$ $\in (PRSB)$.

En effet, si, pour $f, g \in C_K^+(X)$ avec $\int fd\xi = \int gd\xi$ *et* $a \in R$, $\tilde{N} * f \leqq \tilde{N} * g$ $+ a$ sur supp(f), alors, de la même manière que dans la proposition 33, pour $0 < b \in R$ quelconque, il existe $\varphi \in C_K^+(X)$ et $p > 0$ tels que $\int \varphi d\xi = 1$ et $N_p * f * \varphi \leqq N_p * g * \varphi + a + b$ sur X, où $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$. Comme $\int dN_p \leqq 1/p$ et $\int f * \varphi d\xi = \int g * \varphi d\xi$, on a $a + b \geqq 0$. En faisant $b \downarrow 0$, on arrive à $a \geqq 0$. Cela donne $\tilde{N} \in (PPM)$.

Supposons que $N \in (PPM)$. Soit ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Il existe $\lambda \in M_K^+(X)$ et $a \in R$ tels que $\int d\lambda = 1$, $N * \lambda + a\xi \leqq \xi$ dans X et $N * \lambda + a\xi = \xi$ dans ω (voir la proposition 11). Comme $\tilde{N} = N$ $+ H$, $\tilde{N} * \lambda + (a-1)\xi \leqq -H * \lambda$ dans X et $\tilde{N} * \lambda + (a-1)\xi = -H * \lambda$ dans ω. Soit $\mu \in M_K^+(X)$ quelconque. Alors $H * \mu - \left(\int d\mu\right)H * \lambda$ est proportionnelle à ξ, et donc on voit facilement $(\tilde{N}, -H) \in (PRSB)$. De la même manière, on voit $(\tilde{N}, -H) \in (PRSB) \Rightarrow (N, \xi) \in (PRSB)$.

D'après $\tilde{N} \in (PPM)$, on voit aussi $(N, H) \in (PRSB)$. De la même manière que dans la proposition 33, on aura la remarque suivant:

Remarque 36. Soit $N \in (PMS)$ et γ une fonction additive et continue sur X. Alors $N + \gamma\xi \in (PMS)$.

PROPOSITION 37. *Soient N et $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un noyau de convolution réel et un semi-groupe vaguement continu, sous-markovien et semi-transient, respectivement. Supposons que, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, $N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt$. Alors $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est transient si et seulement si $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Dans ce cas, il existe une constante $c \in R$ telle que*

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt + c\xi \quad et \quad \eta_{N,\delta} = c\xi . \tag{4.5}$$

Preuve. Montrons d'abord que si $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est transient, alors $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$ et (4.5) a lieu. Soit $(K_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion de X et posons $\omega_n =$ l'intérieur de K_n. On écrit $\eta_{N,CK_n} = \eta'_{N,CK_n} + a_{0,CK_n}\xi$ comme dans le lemme 23, où $\eta'_{N,CK_n} \in P_1(N)$ et $a_{0,CK_n} \in R$. Pour $m > n$, on choisit $(\varepsilon'_{n,m}, a_{n,m}) \in \underline{SB}_N((\varepsilon, 0); CK_n \cap \omega_m)$. Alors $N * \varepsilon'_{n,m} + a_{n,m}\xi \uparrow \eta_{N,CK_n}$ avec $m \uparrow \infty$ et $\lim_{n\to\infty} N * \varepsilon'_{n,m} = \eta'_{N,CK_n}$. D'après (3) de la remarque 19 et $N \in (PPM)$ (voir la remarque 35), on a $a_{n,m} \leqq 0$ et $a_{n,m} \uparrow a_{0,CK_n}$ avec $m \uparrow \infty$. Posons $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$. Pour tout $n > 1$, $\lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \alpha_t * \varepsilon'_{n,m} dt$ existe et

$$N = N_0 + \eta'_{N,CK_n} - \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \alpha_t * \varepsilon'_{n,m} dt .$$

Donc $(\eta'_{N,CK_n})_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée et $\eta'_{N,CK_n} - \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \alpha_t * \varepsilon'_{n,m} dt$ ne dépend pas de n. Posons $\eta = \eta'_{N,CK_n} - \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \alpha_t * \varepsilon'_{n,m} dt$. Comme, pour tout $x \in X$, $N - N * \varepsilon_x = \int_0^\infty \alpha_t * (\varepsilon - \varepsilon_x) dt$, $\eta'_{N,CK_n} * (\varepsilon - \varepsilon_x) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^\infty \alpha_t * (\varepsilon - \varepsilon_x) dt \right) * \varepsilon'_{n,m}$, et donc η est invariante par translations. Par conséquent, il existe $c \in R$ tel que $\eta = c\xi$, d'où $N = N_0 + c\xi$. Montrons la deuxième égalité dans (4.5). Supposons que $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est markovien. Comme N_0 vérifie le principe du balayage sur tout ouvert (voir, par exemple, [6], p. 660), on choisit $\varepsilon''_{CK_n} \in M^+(X)$ telle que $\operatorname{supp}(\varepsilon''_{CK_n}) \subset \overline{CK_n}$, $N_0 * \varepsilon''_{CK_n} = N_0$ dans CK_n et $N_0 * \varepsilon''_{CK_n} \leqq N_0$ dans X. Comme $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est markovien, on a $\int d\varepsilon''_{CK_n} = 1$.

Par conséquent, $(\varepsilon''_{CK_n}, 0) \in SB_N((\varepsilon, 0); CK_n)$. Comme $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon''_{CK_n} = 0$ (voir, par exemple, [6], p. 659), on a $\eta_{N,\delta} = c\xi$. Supposons ensuite que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ n'est pas markovien. Alors $\int dN_0 < \infty$. Donc, pour un point vaguement adhérent ε'_n de $(\varepsilon'_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ lorsque $m \to \infty$, on a

$$\eta_{N,CK_n} = N_0 * \varepsilon'_n + (a_{0,CK_n} + c)\xi \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Comme $\int d\varepsilon'_n \leqq 1$ et $\eta_{N,CK_n} = N$ dans CK_n, on a $a_{0,CK_n} = 0$, car on a $0 \leqq \int dN_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_n) < \infty$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_n = 0$, on a $\eta_{N,\delta} = c\xi$.

Montrons finalement que si $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$, alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient. Si $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ n'est pas markovien, alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est évidemment transient. Donc on suppose que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est markovien. D'après (5) de la remarque 19, $\eta_{N,\delta} \in M(X)$. On a, pour tout $n \geqq 1$.

$$N - \eta_{N,CK_n} = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty (\alpha_t - \alpha_t * \varepsilon'_{n,m})dt - a_{0,CK_n}\xi .$$

Comme $(N - N * \varepsilon'_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ est uniformément bornée (c'est-à-dire, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, $((N - N * \varepsilon'_{n,m}) * f)_{m=1}^{\infty}$ est uniformément bornée sur X), on a, pour tout $t \geqq 0$,

$$\begin{aligned}(N - \eta_{N,CK_n}) * \alpha_t &= \lim_{m\to\infty}(N - N * \varepsilon'_{n,m}) * \alpha_t - a_{0,CK_n}\xi \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_t^\infty (\alpha_s - \alpha_s * \varepsilon'_{n,m})ds - a_{0,CK_n}\xi .\end{aligned}$$

Donc on a

$$(N - \eta_{N,CK_n}) * (\varepsilon - \alpha_t) = \lim_{m\to\infty} \int_0^t (\alpha_s - \alpha_s * \varepsilon'_{n,m})ds .$$

Comme $N - \eta_{N,CK_n} \uparrow N - \eta_{N,\delta}$ avec $n \uparrow \infty$ et, pour toute $f \in C_K(X)$, $\lim\limits_{x\to\delta}\left(\int_0^t \check{\alpha}_s ds\right) * f(x) = 0$, on a

$$(N - \eta_{N,\delta}) * (\varepsilon - \alpha_t) = \int_0^t \alpha_s ds .$$

Comme $N - \eta_{N,\delta} \in M^+(X)$ et $N \neq \eta_{N,\delta}$, $\int_0^\infty \alpha_t dt$ existe dans $M^+(X)$. Ainsi $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient, ce qui montre notre proposition.

En regadant la présente proposition, on arrive naturellement à la définition suivante:

DÉFINITION 38. Soit N un noyau de convolution réel sur X. On dit que N est de type logarithmique s'il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent tel que, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque, $N*\mu=\int_0^\infty \alpha_t*\mu dt$.

LEMME 39. *Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, markovien et récurrent. Si, pour $\mu\in M_K^0(X)$, $\left(\int_0^a \alpha_t*\mu\right)_{a>0}$ est vaguement bornée, alors $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$ dans $M(X)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$. Evidemment $(\alpha_t*\check{\alpha}_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et markovien. Comme, pour $t_1>t_2>0$ quelconques, $\alpha_{t_1}*\check{\alpha}_{t_1}$ et $\alpha_{t_2}*\check{\alpha}_{t_2}-\alpha_{t_1}*\check{\alpha}_{t_1}=\alpha_{t_2}*\check{\alpha}_{t_2}*(\varepsilon-\alpha_{t_1-t_2}*\check{\alpha}_{t_1-t_2})$ sont de type positif, $\lim_{t\to\infty}\alpha_t*\check{\alpha}_t$ existe dans $M^+(X)$. Posons $\sigma=\lim_{t\to\infty}\alpha_t*\check{\alpha}_t$; alors σ est de type positif. Evidemment, on a, pour tout $t\geqq 0$, $\sigma-\sigma*\alpha_t*\check{\alpha}_t=\lim_{s\to\infty}(\alpha_s*\check{\alpha}_s-\alpha_{t+s}*\check{\alpha}_{t+s})=0$. Donc $\sigma=(\sigma)^2$ et $\int d\sigma\leqq 1$. Pour tout le point ν vaguement adhérent de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ lorsque $t\to\infty$, on a $\sigma\geqq\nu*\check{\nu}$, et donc $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$ si $\sigma=0$. Supposons $\sigma\neq 0$. Alors $\sigma=(\sigma)^2$ et $\int d\sigma\leqq 1$ donnent $\int d\sigma=1$. On voit facilement que σ est une mesure de Haar normalisée sur un certain sous-groupe compact F de X. On désigne par β_t la projection canonique de $\alpha_t*\sigma$ sur X/F; alors $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu, markovien et récurrent sur X/F et vérifie la même condition que pour $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Donc on peut supposer $F=\{0\}$ et $\sigma=\varepsilon$. Alors, pour tout $t\geqq 0$, $\alpha_t*\check{\alpha}_t=\varepsilon$, et donc il existe $x_t\in X$ tel que $\alpha_t=\varepsilon_{x_t}$. Evidemment $t\to x_t$ est continue. Supposons que $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$ n'existe pas. Alors il existe une famille filtrante $(t_j)_{j\in J}\subset R^+$ telle que $\lim_{j\in J}t_j=\infty$ et $\lim_{j\in J}x_{t_j}$ existe dans X. Soit n_j l'entier maximal $\leqq t_j$; alors $(x_{t_j}-n_jx_1)_{j\in J}$ est relativement compact, et donc $(n_jx_1)_{j\in J}$ est relativement compact. Soit v un voisinage compact de l'origine vérifiant $v\ni x_1$ et X_v le sous-groupe ouvert et fermé engendré par v. Comme $X_v\approx R^n\times Z^m\times F$, où n et m sont deux entiers $\geqq 0$ et où F est un groupe abélien compact (voir [11], p. 110), on voit que $(nx_1)_{n=0}^\infty$ est relativement compact, et donc $\overline{(x_t)_{t\geqq 0}}$ est compact. Comme X est non-compact, il existe $y_0\in X$ tel que $y_0\notin\overline{(x_t)_{t\geqq 0}}\cup\overline{(-x_t)_{t\geqq 0}}$. Comme $\left(\int_0^a\alpha_t*(\varepsilon-\varepsilon_{y_0})dt\right)_{a>0}$ est vaguement bornée, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient, d'où une contradiction. Ainsi $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$.

Le lemme suivant jouera un rôle essentiel de déterminer groupes abéliens localement compacts sur lesquels il existe de noyaux de convolution réels de type logarithmique.

LEMME 40. *Soit* $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ *un semi-groupe vaguement continu, markovien semi-transient et récurrent. Alors on a:*

(1) *Le sous-groupe fermé engendré par* $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)$ *est égal à* X.

(2) *Pour une fonction additive et continue* $\gamma(x)\not\equiv 0$ *sur* X *à valeurs réelles quelconque, on a* $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)\not\subset\{x\in X;\ \gamma(x)\geqq 0\}$.

Preuve. On désigne par X' le sous-groupe fermé engendré par $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)$. Supposons que $X'\neq X$; on choisit $x_0\in CX'$. On a alors $(X'+\{x_0\})\cap X'=\phi$, et donc il existe un voisinage ouvert V de l'origine tel que, pour $x\in X'$ quelconque, $(X'+\{x_0\})\cap(V+\{x\})=\phi$. Soit $f\in C_K^+(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(f)\subset V$ et $f(0)>0$ quelconque. Pour tout $t\geqq 0$, on a $\int fd\alpha_t*\varepsilon_{x_0}=0$. Comme $\left(\int_0^a\int fd\alpha_t*(\varepsilon_x-\varepsilon_{x_0})dt\right)_{a>0}$ est bornée, on a $\int_0^\infty\int fd\alpha_t*\varepsilon_x dt<\infty$, d'où $\int_0^\infty\int f*\varepsilon_{-x}d\alpha_t dt<\infty$. Cela donne $\int_0^\infty\alpha_t dt\in M^+(X)$, d'où une contradiction, ce qui montre (1).

Montrons (2). Supposons contrairement qu'il existe une fonction additive et continue $\gamma(x)\not\equiv 0$ sur X à valeurs réelles telle que $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)\subset\{x\in X;\ \gamma(x)\geqq 0\}$. D'après (1), on a $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)\not\subset\{x\in X;\ \gamma(x)=0\}$. Posons $N_p=\int_0^\infty\alpha_t\exp(-pt)dt$ $(p>0)$. Alors, pour un entier $m\geqq 1$ quelconque, $pN_p(\{x\in X;\ 0\leqq\gamma(x)<m)<1$, car $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)$ est un semi-groupe. On note $N_{p,m}=N_p|_{\{x\in X;0\leqq\gamma(x)<m\}}$. Alors, pour tous les entiers $k\geqq 1$, et $n\geqq 1$, on a $\mathrm{supp}((N_p-N_{p,m})^k*(N_p)^n)\subset\{x\in X;\ \gamma(x)\geqq m\}$. Soit $f\in C_K^+(X)$ quelconque; on choisit un entier $m\geqq 1$ tel que $\mathrm{supp}(f)\subset\{x\in X;\ \gamma(x)<m\}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\int fd\sum_{k=1}^n(pN_p)^k=\frac{1}{p}\int fd\sum_{n=1}^\infty(pN_{p,m})^n<\infty\,.$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^\infty(pN_p)^n$ converge vaguement. Comme $\lim_{a\to\infty}\int_0^a\alpha_t dt=1/p\sum_{n=1}^\infty(pN_p)^n$, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient, d'où une contradiction, ce qui montre (2).

PROBLÈME 41. Est-ce que la fermeture de $\bigcup_{t\geqq 0}\mathrm{supp}(\alpha_t)$ est égale à X?

Remarque 42. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent sur X; alors il existe un voisinage compact V_0 de l'origine tel que, pour un voisinage compact V de l'origine vérifiant $V \supset V_0$ quelconque, $(\alpha_{t,V})_{t \geqq 0}$ soit aussi un semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent sur X_V, où X_V désigne le sous-groupe fermé engendré par V et $\alpha_{t,V}$ désigne la restriction de α_t sur X_V.

En effet, pour un voisinage compact V de l'origine, $(\alpha_{t,V})_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu, sous-markovien et semi-transient sur X_V, car, pour $\mu \in M_K^0(X_V)$, $\int_0^\infty \alpha_t * \mu dt = \int_0^\infty \alpha_{t,V} * \mu dt$ dans X_V. Pour $f \in C_K^+(X)$, on a $\int f d\alpha_t = \int f d\alpha_{t,V}$ dès que $\mathrm{supp}(f) \subset X_V$, et donc il existe un voisinage compact V_0 de l'origine tel que $(\alpha_{t,V_0})_{t \geqq 0}$ soit récurrent. Donc il est markovien. On voit facilement que V_0 est un voisinage compact de l'origine demandé.

LEMME 43. *Soit N un noyau de convolution réel et supposons que, pour $f \in C_K^0(X)$ quelconque, $N * f \in C_b(X)$, l'application*

$$C_K(X) \times X \ni (f, x) \longrightarrow N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f \in C_b(X)$$

est continue et qu'il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent tel que, en posant $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(p > 0)$, on ait, pour $p > 0$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$. Si $x \in X$ est un élément compact, alors $\lim_{t \to \infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_t = 0$.

Pour montrer le lemme 43, on utilise le résultat de G. Choquet et J. Deny suivant:

LEMME 44 (voir le théorème 1 dans [4] et [5]). *Soit $\sigma \in M^+(X)$ vérifiant $\int d\sigma = 1$. Si $\mu \in M(X)$ vérifie $\mu * \sigma = \mu$ et μ est bornée (c'est-à-dire, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, $\mu * f$ est bornée sur X), alors, pour $x \in \mathrm{supp}(\sigma)$ quelconque, $\mu = \mu * \varepsilon_x$.*

Preuve du lemme 43. D'après $\int d\alpha_t = 1$, il suffit de montrer que, pour $f, g \in C_K^+(X)$ quelconques, $\lim_{t \to \infty} \int f * g d(N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_t = 0$. Donc on montrera seulement que, pour $f \in C_K^+(X)$, $\lim_{t \to \infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * (f\xi) * \alpha_t = 0$ dans $M(X)$. Comme $N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f$ est bornée sur X, $((N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * (f\xi) * \alpha_t)_{t \geqq 0}$ est vaguement bornée. Soit η un point vaguement adhérent de $((N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * (f\xi) * \alpha_t)_{t \geqq 0}$ lorsque $t \to \infty$; on choisit une famille filtrante $(t_i)_{i \in I}$ des nombres > 0 telle que $\lim_{i \in I} t_i = \infty$ et $\eta = \lim_{i \in I} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * (f\xi) * \alpha_{t_i}$.

Alors η est bornée. Comme $((N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_{t_i})_{i\in I}$ est uniformément bornée, on a, pour $p>0$ quelconque,

$$\begin{aligned} p\eta * N_p &= \lim_{i\in I} p(N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_{t_i}*N_p \\ &= \lim_{i\in I}((N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_{t_i} - N_p*(\varepsilon_x-\varepsilon)*(f\xi)*\alpha_{t_i}) \\ &= \eta\,, \end{aligned}$$

car $\int dN_p = 1/p$ et $\lim_{t\to\infty}\alpha_t = 0$. Le lemme 44 montre alors que, pour tout $y\in\operatorname{supp}(N_p)$, $\eta=\eta*\varepsilon_y$, et donc, pour tout $y\in\operatorname{supp}(\check{N}_p)$, $\eta=\eta*\varepsilon_y$. D'après le lemme 40, il existe $b_x\in R$ tel que $\eta=b_x\xi$. Pour un entier $n\geqq 1$ et $g\in C_K^+(X)$ quelconques,

$$\begin{aligned} &\lim_{i\in I}\int gd(N*(\varepsilon_{nx}-\varepsilon_{(n-1)x}))*(f\xi)*\alpha_{t_i} \\ &\quad= \lim_{i\in I}\int g*\check{\varepsilon}_{(n-1)x}d(N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_{t_i} \\ &\quad= b_x\int g*\check{\varepsilon}_{(n-1)x}d\xi = b_x\int gd\xi\,, \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{i\in I}(N*(\varepsilon_{nx}-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_{t_i} = nb_x\xi\,.$$

Comme x est élément compact, $((N*(\varepsilon_{nx}-\varepsilon)*(f\xi)*\alpha_{t_i})_{i\in I,n\geqq 1}$ est vaguement bornée, on a $b_x=0$, d'où $\eta=0$. On obtient ainsi $\lim_{t\to\infty}(N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*(f\xi)*\alpha_t=0$ dans $M(X)$, ce qui montre le lemme 43.

D'après le présent lemme 43, on aura le corollaire suivant, qui sera utile dans la preuve de notre théorème principal.

COROLLAIRE 45. *Soient N, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(N_p)_{p>0}$ les mêmes que dans le lemme 43. On suppose les mêmes conditions pour N, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(N_p)_{p>0}$ que dans le lemme 43. Alors, pour une suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p_n)_{n=1}^{\infty}$) des nombres >0 vérifiant $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty}p_n=0$) quelconque, il existe une sous-suite $(t_{n'})_{n'=1}^{\infty}$ (resp, $(p_{n'})_{n'=1}^{\infty}$) de $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p_{n'})_{n'=1}^{\infty}$) telle que, pour $x\in X$ quelconque, $\lim_{n'\to\infty}(N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*\alpha_{t_{n'}}$ (resp. $\lim_{n'\to\infty}p_{n'}(N*(\varepsilon_x-\varepsilon))*N_{p_{n'}}$) existe dans $M(X)$.*

Preuve. Comme X est dénombrable à l'infini, la remarque 42 rapporte qu'il suffit de montrer notre corollaire dans le cas où X est engendré par un certain voisinage compact V de l'origine, car pour $\mu\in M_K^0(X_V)$ quelconque, $(N_V*\mu)*\alpha_{t,V}=(N*\mu)*\alpha_t$ dans X_V, où N_V est la restriction de N sur X_V. On peut donc supposer que $X = R^n \times Z^m \times F$, où n, m sont deux entiers $\geqq 0$ et F est un groupe abélien compact (voir [11], p. 110). Soit ξ_F la mesure de Haar normalisée sur F. Alors le lemme 43 donne

$$(4.6) \qquad \lim_{t\to\infty}(N*(\varepsilon - \xi_F))*\alpha_t = \lim_{t\to\infty}\int (N*(\varepsilon - \varepsilon_y))*\alpha_t d\xi_F(y) = 0\,,$$

et donc

$$\lim_{p\to 0} p(N*(\varepsilon - \xi_F))*N_p = 0\,.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une sous-suite $(t_{n'})_{n'=1}^{\infty}$ (resp. $(p_{n'})_{n'=1}^{\infty}$) de $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p_n)_{n=1}^{\infty}$) telle que, pour $x \in R^n \times Z^m \times \{O_F\}$ quelconque, $((N*(\varepsilon_x - \varepsilon))*\xi_F)*(\xi_F*\alpha_{t_{n'}})$ (resp. $p_{n'}(N*(\varepsilon_x - \varepsilon)*\xi_F)*(\xi_F*N_{p_{n'}})$) converge vaguement lorsque $n' \to \infty$, où O_F désigne l'origine de F. Par conséquent, on peut supposer que $X = R^n \times Z^m$. Comme $C_K(X)$ est à base dénombrable, la remarque 4 montre que, pour $x \in X$ quelconque, il existe une sous-suite $(t_{n''})_{n''=1}^{\infty}$(resp. $(p_{n''})_{n''=1}^{\infty}$) de $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p_n)_{n=1}^{\infty}$) telle que $\lim_{n''\to\infty}(N*(\varepsilon_x - \varepsilon))*\alpha_{t_{n''}}$ (resp. $\lim_{n''\to\infty} p_{n''}(N*(\varepsilon_x - \varepsilon))*N_{p_{n''}}$) existe dans $M(X)$. Donc, en prenant un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X, on peut choisier une sous-suite $(t_{n'})_{n'=1}^{\infty}$ (resp. $(p_{n'})_{n'=1}^{\infty}$) de $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p_n)_{n=1}^{\infty}$) telle que, pour $x \in D$ quelconque, $\lim_{n'\to\infty}(N*(\varepsilon_x - \varepsilon))*\alpha_{t_{n'}}$ (resp. $\lim_{n'\to\infty} p_{n'}(N*(\varepsilon_x - \varepsilon))*N_{p_{n'}}$) existe dans $M(X)$. Comme, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, l'application $x \to N*(\varepsilon_x - \varepsilon)*f \in C_b(X)$ est continue et $\int d\alpha_{t_{n'}} = 1$ $\left(\text{resp. } p_{n'}\int dN_{p_{n'}} = 1\right)$, on voit que, pour $f \in C_K(X)$ et $x \in X$ quelconques, $\lim_{n'\to\infty}\int N*(\varepsilon_x - \varepsilon)*fd\check{\alpha}_{t_{n'}}$ $\left(\text{resp. } \lim_{n'\to\infty} p_{n'}\int N*(\varepsilon_x - \varepsilon)*fd\check{N}_{p_{n'}}\right)$ existe, d'où le corollaire 45.

La proposition suivante jouera un rôle important pour déterminer les noyaux de convolution réels de type logarithmique.

PROPOSITION 46. *Soit $N \in (PMS)$ et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continue, markovien, semi-transient et récurrent. Posons $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(p > 0)$. On suppose que, pour $p > 0$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, $N*\mu = (pN*\mu + \mu)*N_p$. Soient $x_0 \in X$ et $f_0 \in C_K(X)$ vérifiant $\int f_0 d\xi = 1$ quelconques fixés. Alors, pour une valeur adhérente a_{x_0} de $\left(\int f_0 d(N*(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon))*\alpha_t\right)_{t>0}$ $\left(\text{resp. } \left(p\int f_0 d(N*(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon))*N_p\right)_{p>0}\right)$ lorsque $t\to\infty$ (resp. $p \to 0$), il existe une fonction additive et continue $\gamma(x)$ sur X telle que*

$\gamma(x_0) = a_{x_0}$, $N + \gamma\xi \in (PMS)$ *et* $N + \gamma\xi \in (PPM)$.

Preuve. On discutera seulement notre résultat pour $\left(\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_t\right)_{t>0}$, car l'autre est analogue. D'après la remarque 4 et le corollaire 45, il existe $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ des nombres>0 telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} = a_{x_0}$$

et, pour $x \in X$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_{t_n}$ existe dans $M(X)$. On désigne par η_x cette limite. Alors $\eta_x \in M(X)$ et η_x est bornée (voir la remarque 3). D'après la remarque 29, on a

$$N * (\varepsilon_x - \varepsilon) - \eta_x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} \alpha_s * (\varepsilon_x - \varepsilon) ds\,.$$

Comme $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = 0$ (voir le lemme 39) et $((N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ est uniformément bornée, on a, pour $p > 0$ quelconque,

$$\begin{aligned} p\eta_x * N_p &= \lim_{n\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * \alpha_{t_n}) * (pN_p) \\ &= \lim_{n\to\infty} (N - N_p) * (\varepsilon_x - \varepsilon) * \alpha_{t_n} = \eta_x\,. \end{aligned}$$

Comme $(N_p)_{p>0}$ est markovien, les lemmes 40 et 44 montrent que $\eta_x = b_x\xi$, où $b_x \in R$. Evidemment $b_{x_0} = a_{x_0}$. Posons $\gamma(x) = b_x$ sur X. Comme, pour $x, y \in X$ et $f \in C_K(X)$ quelconques.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int f d(N * (\varepsilon_{x+y} - \varepsilon_y)) * \alpha_{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int f * \check{\varepsilon}_y d(N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} \\ &= \gamma(x) \int f * \check{\varepsilon}_y d\xi = \gamma(x) \int f d\xi\,, \end{aligned}$$

on voit que γ est additive. Comme l'application $X \ni x \to N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f \in C_b(X)$ est continue (voir la remarque 4), γ est continue. Posons $\tilde{N} = N + \gamma\xi$. Alors, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque,

$$\begin{aligned} \tilde{N} * \mu &= \int \tilde{N} * \varepsilon_x d\mu(x) = \int \tilde{N} * (\varepsilon_x - \varepsilon) d\mu(x) \\ &= \int N * (\varepsilon_x - \varepsilon) d\mu(x) + \lim_{n\to\infty} \int N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * \alpha_{t_n} d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_0^{t_n} \alpha_s * (\varepsilon_x - \varepsilon) ds d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} \alpha_s * \mu ds \end{aligned}$$

et la remarque 36 donne $\tilde{N} \in (PMS)$. Montrons que $\tilde{N} \in (PPM)$. Supposons que, pour $f,\ g \in C_K^+(X)$ avec $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$, $\tilde{N} * f \leqq \tilde{N} * g + a$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Alors $\tilde{N} * f \leqq \tilde{N} * g + a$ sur X. Comme $N * (f - g) = \tilde{N} * (f - g) + \int \gamma(f - g) d\xi$, on a, pour $t \geqq 0$ quelconque,

$$(\tilde{N} * ((f - g)\xi)) * (\varepsilon - \alpha_t) = (N * ((f - g)\xi)) * (\varepsilon - \alpha_t) = \int_0^t \alpha_s * ((f - g)\xi) ds$$

(voir la remarque 29). On a donc

$$a\xi \geqq \lim_{n\to\infty} (\tilde{N} * ((f - g)\xi)) * \alpha_{t_n} = 0\,,$$

d'où $a \geqq 0$. Ainsi $\tilde{N} \in (PPM)$.

Pour l'existence de la fonction γ additive et continue, on peut remplacer les conditions pour N dans le lemme 43 au lieu de $N \in (PMS)$.

D'après la proposition 46, on aura le corollaire suivant:

COROLLAIRE 47. *Soient N, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(N_p)_{p>0}$ les mêmes que dans la proposition* 46. *Si, pour $x \in X$ quelconque, $\lim_{t\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_t$ existe dans $M(X)$, alors N est de la forme $N = \tilde{N} + \gamma\xi$, où $\tilde{N}$ est un noyau de convolution réel de type logarithmique et γ est une fonction additive et continue sur X.*

Nous ne connaisson pas maintenant si l'hypothèse dans corollaire 47 a toujours lieu.

Remarque 48. Soit N un noyau de convolution réel et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, markovien et semi-transient. Posons $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt) dt$ $(p > 0)$ et supposons que, pour $p > 0$ et $\mu \in M_K^0(X)$ quelconques, $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$. Alors, pour que $N \in (PMS)$, il faut et il suffit que, pour $f \in C_K^0(X)$ quelconque, $N * f \in C_b(X)$ et l'application

$$X \times C_K(X) \ni (x, f) \longrightarrow N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f \in C_b(X)$$

soit continue.

En effet, la condition est nécessaire (voir la remarque 4). Supposons que, pour $f \in C_K^0(X)$ quelconque, $N * f \in C_b(X)$ et la présente application est continue. Alors, d'après le corollaire 45, il existe une suite $(p_n)_{n=1}^\infty$ de nombres > 0 telle que $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ et, pour $x \in X$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} p_n (N * (\varepsilon - \varepsilon_x)) * N_{p_n}$ existe dans $M(X)$. D'après la proposition 46 (voir la fin de sa preuve), il existe une fonction additive et continue $\gamma(x)$ sur X telle que $\gamma(x)\xi = \lim_{n\to\infty} p_n(N * (\varepsilon - \varepsilon_x)) * N_{p_n}$. D'après le principe complet du maximum de N_{p_n} et $\lim_{n\to\infty} N_{p_n} * \mu = (N - \gamma\xi) * \mu$ ($\mu \in M_K^0(X)$), on a $N - \gamma\xi \in (PMS)$ (voir la proposition 33 et sa preuve), et la remarque 36 donne $N \in (PMS)$.

PROPOSITION 49. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Si N est de type logarithmique, alors pour une constante $c > 0$ quelconque, $N + c\varepsilon$ est de type logarithmique.*

Preuve. Soit $(\alpha_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent vérifiant $N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt$ pour toute $\mu \in M_K^0(X)$. Posons $r = 1/c$, $N_r = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-rt)dt$,

$$\alpha_{r,t} = \exp(-rt)\Big(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (rt)^n (rN_r)^n / n!\Big) \quad (t > 0)$$

et $\alpha_{r,0} = \varepsilon$; alors $(\alpha_{r,t})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et markovien (voir [6], p. 663). Pour $p > 0$ quelconque, on note $(N + (1/r)\varepsilon)_p = \int_0^\infty \alpha_{r,t} \exp(-pt)dt$; alors $((N + (1/r)\varepsilon)_p)_{p>0}$ est une résolvante et

$$\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right)_p = \frac{1}{p+r}\varepsilon + \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 N_{pr/p+r}\,. \tag{4.7}$$

Donc $((N + (1/r)\varepsilon)_p)_{p>0}$ est récurrent, et $(\alpha_{r,t})_{t\geq 0}$ est aussi récurrent. On voit facilement que $((N + (1/r)\varepsilon)_p)_{p>0}$ vérifie

$$\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right) * \mu = \left(p\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right) * \mu + \mu\right) * \left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right)_p$$

pour tout $p > 0$ et toute $\mu \in M_K^0(X)$. Comme $N + (1/r)\varepsilon \in (PMS)$ (voir la remarque 5 et la proposition 33), $(\alpha_{r,t})_{t\geq 0}$ est semi-transient. Soit $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque. Comme $\lim_{t\to\infty} (N * \mu) * \alpha_t = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} (N * \mu) * (rN_r)^n = 0$, car $(N_r)^n = 1/n! \int_0^\infty t^n \exp(-rt)\alpha_t dt$, et donc $\lim_{t\to\infty} (N * \mu) * \alpha_{r,t} = 0$, d'où $\lim_{t\to\infty} (N * \mu + (1/r)\mu) * \alpha_{r,t} = 0$. Par conséquent, on a

$$\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right) * \mu = \int_0^\infty \alpha_{r,t} * \mu dt\,,$$

ce qui montre notre proposition.

On discutera l'inverse de la proposition 49 dans le paragraphe 5.

§ 5. Les théorèmes principals

Pour montrer notre premier théorème principal (Théorème A), on utilisera encore les deux lemmes suivants.

LEMME 50. *Soit* $N \in (PMS)$, $\in (PPM)$ *et supposons que* $\eta_{N,\delta} = -\infty$. *Soit* $\gamma(x) \not\equiv 0$ *une fonction additive et continue sur* X *à valeurs réelles. Posons* $\omega_\gamma^+ = \{x \in X; \gamma(x) > 0\}$ *et soit* $p > 0$ *quelconque. On choisit* $(\nu_{p,1}, a_1) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+)$. *Alors il existe* $\nu_{p,2} \in M^+(X)$ *telle que*:

(1) $\mathrm{supp}(\nu_{p,2}) \subset \{x \in X; \gamma(x) \leqq 0\}$ *et* $\int d\nu_{p,2} = 1$.

(2) *Pour tout l'entier* $n \geqq 1$, $\nu_{p,2}|_{\{x \in X; \gamma(x) < -n\}} \neq 0$.

(3) *On ait, avec une constante* $c \geqq 1$,

$$(pN + \varepsilon) * (\varepsilon - \nu_{p,1}) * (\varepsilon - \nu_{p,2}) = c\varepsilon . \tag{5.1}$$

Preuve. D'abord on remarque que $\eta_{N+\varepsilon/p,\delta} = -\infty$, car pour un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ à $\bar{\omega} \not\ni 0$ dans X, on a $N * \varepsilon'_\omega + a_\omega \xi \geqq (N + (1/p)\varepsilon) * \varepsilon'_{p,\omega} + a_{p,\omega}\xi$, où $(\varepsilon'_\omega, a_\omega) \in \underline{SB}_N((\varepsilon, 0); \omega)$ et $(\varepsilon'_{p,\omega}, a_{p,\omega}) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega)$ (voir le corollaire 12, (B.5')). Alors la proposition 28 donne $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+) \neq \phi$. Soit $(\nu_{p,1}, a_1) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+)$. Alors $\nu_{p,1}(\{x \in X; \gamma(x) = 0\}) = 0$. En effet, posons $\nu = \nu_{p,1}|_{\{x \in X; \gamma(x) = 0\}}$; on a aussi $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\nu, 0); \omega_\gamma^+) \neq \phi$. Soit $(\nu', b) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\nu, 0); \omega_\gamma^+)$. Comme $(\nu_{p,1} - \nu + \nu', a_1 + b) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+)$ et $N * \nu' + (1/p)\nu' + b\xi \leqq N * \nu$ (voir le corollaire 12, (B.5')), on a $\nu = 0$. Posons $\omega_{\gamma,n} = \{x \in X; \gamma(x) < (1/n)\} - \{0\}$. On choisit encore $(\nu_{p,2,n}, a'_n) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_{\gamma,n})$. Alors $(N + (1/p)\varepsilon) * \nu_{p,2,n} + a'_n\xi \leqq N$ dans X. Soit $(\nu''_{p,2}, a'') \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^-)$, où $\omega_\gamma^- = \{x \in X; \gamma(x) < 0\}$. Alors $N * \nu''_{p,2} + a''\xi \leqq N * \nu_{p,2,n} + a'_n\xi$, $a'' \leqq a'_n \leqq 0$ et $(a'_n)_{n=1}^\infty$ est décroissante. Donc, en utilisant le corollaire 14 et les inégalités ci-dessus, on voit que, pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\left(\int |\check{N} * f| d\nu_{p,2,n}\right)_{n=1}^\infty$ est bornée. Posons $\lambda_n = \nu_{p,2,n}|_{\{x \in X; \gamma(x) > 0\}}$. Comme $\nu_{p,2,n} \leqq p(N - N * \nu''_{p,2} - a''\xi)$, on a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Comme $(\nu_{p,2,n} - \lambda_n)_{n=1}^\infty$ est croissante (voir la proposition 16, (3)) et, pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\left(\int |\check{N} * f| d(\nu_{p,2,n} - \lambda_n)\right)_{n=1}^\infty$ est bornée, on a $N * \nu_{p,2} = \lim_{n\to\infty} N * (\nu_{p,2,n} - \lambda_n)$, où $\nu_{p,2} = \lim_{n\to\infty} (\nu_{p,2,n} - \lambda_n)$. Evidemment $\int d\nu_{p,2} \leqq 1$. Soit $(K_m)_{m=1}^\infty$ une exhaustion de X; alors on a, pour tout $m \geqq 1$, $\lim_{n\to\infty} N * \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \eta_{N,CK_m} * \lambda_n$. Soit $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact dans X. On choisit $(\nu'', b') \in \underline{SB}_N((\nu_{p,2}, 0); \omega)$. Soit $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque. Alors, en posant $a = \lim_{n\to\infty} a'_n$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int fd\eta_{N,CK_m}*\lambda_n &= \lim_{n\to\infty}\int fd\eta_{N,CK_m}*(\nu_{p,2,n}-\nu_{p,2})\\ &\leqq \int fd(\eta_{N,CK_m}-a\xi-\eta_{N,CK_m}*\nu''-b'\xi)\\ &= \Big(1-\int d\nu_{p,2}\Big)\Big(\int fd\eta_{N,CK_m}\Big)\\ &\quad+\int fd\eta_{N,CK_m}*\Big(\Big(\Big(\int d\nu''\Big)\varepsilon-\nu''\Big)-(a+b')\int fd\xi\,.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} N*\lambda_n$ existe dans $M(X)$ et $\lim_{m\to\infty}\int fd\eta_{N,CK_m}=-\infty$, on a $\int d\nu_{p,2}=1$, et donc $\lim_{n\to\infty}\int d\lambda_n=0$. D'après le lemme 21, on a, avec une constante $a'\leqq a$,

$$\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,2,n}+a'_n\xi\downarrow\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,2}+a'\xi\quad(n\uparrow\infty)\,.$$

Donc on a $N\geqq(N+(1/p)\varepsilon)*\nu_{p,2}+a'\xi$ et

$$\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon-\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,2}-a'\xi\Big)(\{x\in X;\gamma(x)\leqq 0\}-\{0\})=0\,.$$

D'après $N\in(PMS)$ et $N\geqq N*\nu_{p,1}+a_1\xi$, on voit que, pour $f\in C_K^+(X)$ quelconque, la fonction $N*f-N*\nu_{p,1}*f$ est bornée sur X. Donc on a aussi

$$\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,1}*\nu_{p,2,n}+a'_n\xi\downarrow\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,1}*\nu_{p,2}+a'\xi\quad(n\uparrow\infty)\,.$$

Comme $\mathrm{supp}(\nu_{p,1})\subset\{x\in X;\gamma(x)\geqq 0\}$ *et* $\nu_{p,1}(\{x\in X;\gamma(x)=0\})=0$, on a

$$\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon-\Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*\nu_{p,2}-a'\xi\Big)*\nu_{p,1}(\{x\in X;\gamma(x)\leqq 0\})=0\,.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}&(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})*(\varepsilon-\nu_{p,2})(\{x\in X;\gamma(x)\leqq 0\}-\{0\})\\ &\quad=((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,2})-pa'\xi)*(\varepsilon-\nu_{p,1})(\{x\in X;\gamma(x)\leqq 0\}-\{0\})\\ &\quad=0\end{aligned}$$

et, d'après $(N+(1/p)\varepsilon)*\nu_{p,2}+a'\xi\leqq N$,

$$(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})*(\varepsilon-\nu_{p,2})(\{0\})\geqq 1\,.$$

Comme $\mathrm{supp}(\nu_{p,2})\subset\{x\in X;\gamma(x)\leqq 0\}$, on a

$$((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi)*\nu_{p,2}(\omega_r^+)=0\,.$$

Par conséquent, en posant $c=(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})*(\varepsilon-\nu_{p,2})(\{0\})$, on obtient (5.1).

Montrons finalement $\nu_{p,2}$ vérifie la condition (2). D'après le théorème 20, il existe la résolvante $(N_q)_{q>0}$ de N. Alors, d'après (3.4), pour $n\geqq 1$ quelconque, $(\nu_{p,2,n}, a_n')\in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((pN_p, 0);\, \omega_{r,n})$, et donc $\nu_{p,2}\geqq pN_p$ dans ω_r^-. Posons

$$\alpha_{p,t}=\exp(-pt)(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pt)^n(pN_p)^n/n!)\quad (t>0)$$

et $\alpha_{p,0}=\varepsilon$; alors $(\alpha_{p,t})_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et markovien (voir, [6], p. 663), car $(N_p)_{p>0}$ est récurrent, et donc $p\int dN_p=1$ (voir le théorème 20). Posons $(N+(1/p)\varepsilon)_q=\int_0^\infty \alpha_{p,t}\exp(-qt)dt$ $(q>0)$. D'après (3.4) et (4.7), on a, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque,

$$\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)*\mu=\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)_q*\mu+q\left(\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)*\mu\right)*\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)_q.$$

Comme $N*\mu$ est bornée (c'est-à-dire, pour toute $f\in C_K(X)$, $N*\mu*f$ est bornée) (voir la remarque 3), $(\alpha_{p,t})_{t\geqq 0}$ est semi-transient, et donc le lemme 40 montre $\bigcup_{t\geqq 0}\operatorname{supp}(\alpha_{p,t})\not\subset\{x\in X;\, \gamma(x)\geqq 0\}$. Comme, pour tous $0<q<r$, $N_q=\sum_{n=1}^\infty (r-q)^{n-1}(N_r)^n$, on a $\operatorname{supp}(N_q)=\operatorname{supp}(N_p)$, et donc, pour tout l'entier $n\geqq 1$, $\operatorname{supp}(N_p)\not\subset\{x\in X;\, \gamma(x)\geqq -n\}$, car sinon, il existe un entier $n_0\geqq 1$ tel que, pour $q>0$ quelconque, $\operatorname{supp}((N+(1/p)\varepsilon)_q)\subset\{x\in X;\, \gamma(x)\geqq -n_0\}$, mais cela est en contradiction avec $\operatorname{supp}((N+(1/p)\varepsilon)_q)\not\subset\{x\in X;\, \gamma(x)\geqq 0\}$. Cela montre que $\nu_{p,2}$ vérifie la condition (2). Le lemme 50 est ainsi démontré.

LEMME 51. *Soient N, $\gamma(x)$, $(\nu_{p,1}, a_1)$, $\nu_{p,2}$ et c les mêmes que ci-dessus. Alors $\sum_{n=1}^\infty(\nu_{p,2})^n$ converge vaguement et*

$$(5.2)\qquad (pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi=c\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n\right).$$

Preuve. D'après la condition (2) du lemme 50, on voit, que $\sum_{n=1}^\infty(\nu_{p,2})^n$ converge vaguement, car, pour tout l'entier $n\geqq 1$, $\nu_{p,2,n}=\nu_{p,2}|_{\{x\in X;\gamma(x)\geqq -n\}}$ est à la masse total <1 et $\sum_{m=1}^\infty(\nu_{p,2,n})^m=\sum_{m=1}^\infty(\nu_{p,2})^m$ dans $\{x\in X;\, \gamma(x)> -n\}$ (voir la preuve du lemme 40). Comme $(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi\in M^+(X)$, (5.1) montre que $(((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi)*(\nu_{p,2})^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante et

$$(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi-\lim_{n\to\infty}((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi)*(\nu_{p,2})^n$$
$$=c\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n\right).$$

Comme $(pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi$ est bornée, $\mathrm{supp}((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi)\subset\{x\in X;\ \gamma(x)\leqq 0\}$, (1) et (2) du lemme 50 montrent

$$\lim_{n\to\infty}((pN+\varepsilon)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-pa_1\xi)*(\nu_{p,2})^n=0\,,$$

d'où (5.2), ce qui montre le lemme 51.

Montrons notre premier théorème principal (THÉORÈME A) en séparent (a) et (b).

THÉORÈME 52. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Supposons que $X\not\cong R\times F$ et $X\not\cong Z\times F$, où F est un certain groupe abélien compact. Alors, pour que N soit de type logarithmique, il faut et il suffit que l'on ait:*

(1) $N\in(PMS)$.

(2) *N est non-périodique.*

(3) *Pour $f\in C_K^0(X)$ quelconque, on a* $\inf_{x\in X}N*f(x)\leqq 0$.

(4) $\eta_{N,\delta}=-\infty$.

Preuve. Si N est de type logarithmique, alors la proposition 33 donne (1), les remarques 7, 34 et 35 donnent (3) et la proposition 37 donne (4). D'après l'unicité de la résolvante (voir la preuve de théorème 20) et (3.4), on a (2).

Supposons que N vérifie (1), (2) et (4). D'après le théorème 25, il existe le semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ de N. Pour tout $p>0$, on pose $N_p=\int_0^\infty \alpha_t\exp(-pt)dt$. Alors on a $N=(pN+\varepsilon)*N_p$ (voir le théorème 20) et donc, pour $t\geqq 0$ et $\mu\in M_K^0(X)$ quelconques, $(N*\mu)*(\varepsilon-\alpha_t)=\int_0^t\alpha_s*\mu ds$ (voir la remarque 29). Cela montre que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est semi-transient. Par conséquent, il suffit de montrer que, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque,

$$\lim_{t\to\infty}(N*\mu)*\alpha_t=0\,. \tag{5.3}$$

Supposons contrairement que (5.3) n'a pas lieu. Alors il existe $x_0\in X$, $f_0\in C_K^+(X)$ et $(t_n)_{n=1}^\infty$ des nombres >0 tels que $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$, $\int f_0d\xi=1$ et

$\lim_{n\to\infty}\int f_0 d(N*(\varepsilon_{x_0}-\varepsilon))*\alpha_{t_n}\neq 0$. D'après la proposition 46, il existe une fonction additive et continue $\gamma(x)\not\equiv 0$ sur X telle que $\tilde{N}=N+\gamma\xi\in(PMS)$, $\in(PPM)$. Soit $p>0$ quelconque et soient $\nu_{p,1}$, $\nu_{p,2}$ les mesures de Radon positives obtenues dans le lemme 50 pour nos N et γ. D'après le lemme 51, on a

$$\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)*(\varepsilon-\nu_{p,1})-a_1\xi=\frac{c}{p}\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n\right),$$

où $(\nu_{p,1}, a_1)\in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+)$. Montrons que $a_1=0$. Supposons que $a_1\neq 0$. Alors $a_1<0$. Soit k un entier $\geqq 1$ et posons $\nu_{p,2,k}=\nu_{p,2}|_{\{x\in X;\gamma(x)>-k\}}$. Alors (2) du lemme 50 donne $\int d\nu_{p,2,k}<1$. Donc $\int d\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2,k})^n<\infty$. Comme $X\not\approx R\times F$ et $X\not\approx Z\times F$, $X_\gamma^\perp=\{x\in X;\gamma(x)=0\}$ est non-compact. Alors il existe $f\in C_K^+(X)$ telle que $\int fd\xi=1$, $\operatorname{supp}(f)\subset\{x\in X; 0\geqq\gamma(x)>-k\}$ et $c/p(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2,k})^n)*f<-a_1$ sur X. Comme $\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2,k})^n$ dans $\{x\in X;\gamma(x)>-k\}$ (voir la preuve de (2) du lemme 40), on a

$$\frac{c}{p}\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n\right)*f<-a_1 \text{ sur } \operatorname{supp}(f).$$

D'après le principe complet du maximum de $\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n$ (voir, par exemple, [3]) on a

$$\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)*(\varepsilon-\nu_{p,1})*f=\frac{c}{p}\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_{p,2})^n\right)*f+a_1<0 \text{ sur } X,$$

ce qui contredit le lemme 22, d'où $a_1=0$. Comme

$$\tilde{N}*\nu_{p,1}=N*\nu_{p,1}+\gamma\xi-\left(\int\gamma(y)d\nu_{p,1}(y)\right)\xi,$$

on a $\left(\nu_{p,1}, \int\gamma(y)d\nu_{p,1}(y)\right)\in\underline{SB}_{\tilde{N}+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); \omega_\gamma^+)$. Comme $\nu_{p,1}\geqq pN_p$ dans $\{x\in X;\gamma(x)>0\}$, le lemme 40 montre que $\nu_{p,1}|_{\{x\in X;\gamma(x)>0\}}\neq 0$, et donc $\int\gamma(y)d\nu_{p,1}(y)>0$. Cela contredit $\tilde{N}+(1/p)\varepsilon\in(PPM)$. On obtient ainsi que, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque, (5.3) a lieu, ce qui montre que la condition est suffisante. La démonstration est complète.

Dans le cas où $X\approx R\times F$ ou bien $X\approx Z\times F$, le résultat est un peu différent.

Dans le cas où $X=R\times F$ ou bien $X=Z\times F$, on note $N=o(|x|)$ à l'infini si, pour $f\in C_K(X)$ quelconque, $N*f((x,y))=o(|x|)$ lorsque $|x|\to\infty$, où $(x, y) \in R \times F$ ou bien $(x, y) \in Z \times F$. Dans le cas où $X \approx R \times F$ ou bien $X \approx Z \times F$, on définit aussi analogiquement $N = o(|x|)$ à l'infini.

THÉORÈME 52'. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Supposons que $X \approx R \times F$ ou bien $X \approx Z \times F$, où F est le même que ci-dessus. Sous la condition $N = o(|x|)$ à l'infini, N est de type logarithmique si et seulement si N vérifie* (1), (2), (3) *et* (4). *Dans ce cas, on ne peut pas éviter la condition $N = o(|x|)$ à l'infini.*

Preuve. Si N est de type logarithmique, alors N vérifie toujours (1), (2), (3) et (4). Supposons que $N = o(|x|)$ à l'infini et N vérifie (1), (2), (3) et (4). On peut supposer que $X = R \times F$ ou bien $X = Z \times F$. Soit $(N_p)_{p>0}$ la même que dans le théorème 52 et supposons qu'il existe $\mu \in M_K^0(X)$ telle que $(N * \mu) * \alpha_t \not\to 0 (t \to \infty)$. Alors, de la même façon que dans le théorème 52, on peut choisir une fonction additive et continue $\gamma(x) \not\equiv 0$ sur X telle que $N + \gamma\xi \in (PMS)$, $\in (PPM)$. Evidemment $\gamma((x, y)) = ax$, où $(x, y) \in R \times F$ ou bien $\in Z \times F$, $a \in R$ et $a \neq 0$. Pour $f \in C_K^+(X)$ vérifiant $\int f d\xi = 1$ quelconque, le corollaire 14 montre que, en posant $b = \sup_{(x,y) \in \mathrm{supp}(f)} (N * f((x, y)) + ax - a \int f((z, w)) z d\xi(z, w))$, on a

$$N * f((x, y)) + ax - a \int f((z, w)) z d\xi(z, w) \leqq b \text{ sur } X,$$

ce qui contredit $N = o(|x|)$ à l'infini. Donc, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, $\lim_{t\to\infty} (N * \mu) * \alpha_t = 0$. Par conséquent, le corollaire 47 montre que N est de type logarithmique.

Donnerons un exemple d'un noyau de convolution réel N sur R vérifiant (1), (2), (3) et (4) qui n'est pas de type logarithmique. Posons $\tilde{N} = -(1/2)|x|dx$ sur R et soit $(g_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe gaussien sur R; c'est-à-dire, pour $t > 0$, $g_t = (1/(2\pi t)^{1/2}) \exp(-|x|^2/4t)dx$. Alors $\tilde{N}$ est de type logarithmique et, pour $\mu \in M_K^0(R)$ quelconque, $\tilde{N} * \mu = \int_0^\infty g_t * \mu dt$. Soit $a \in R$ vérifiant $0 \leqq a \leqq 1/2$ quelconque et posons $N = \tilde{N} + axdx$. Alors N vérifie évidemment (1), (2). Comme la fonction ax est harmonique, on a, pour un voisinage compact V de l'origine, $\eta_{N,CV} = \eta_{\tilde{N},CV} + axdx$, et donc N vérifie (4). Soit $f \in C_K^0(X)$ quelconque. Alors, pour $x \geqq \sup\{y; y \in \mathrm{supp}(f)\}$, on a $N * f(x) = (1/2 - a) \int f(y) y dy$ et, pour $x \leqq \inf\{y; y \in \mathrm{supp}(f)\}$, on a $N * f(x) = -(1/2 + a) \int f(y) y dy$. Donc N vérifie (3). Evidemment N n'est pas de type logarithmique, d'après l'unicité de la résolvante.

En utilisant le semi-groupe vaguement continu

$$\left(\exp(-t)\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})^n}{2^n n!}\right)\right)_{t \geqq 0}$$

sur Z, on peut donner un exemple d'un noyau de convolution réel sur Z vérifiant (1), (2), (3) et (4) qui n'est pas de type logarithmique. Le théorème 52′ est ainsi démontré.

Remarque 53. Soit N un noyau de convolution réel sur R vérifiant les présentes quatre conditions (1), (2), (3) et (4) et soit $0 < p \in R$. Soient $(\nu_{p,1}, a_1) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); (0, \infty))$ et $(\nu_{p,2}, a_2) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); (-\infty, 0))$. Si $a_1 = a_2 = 0$, alors N est de type logarithmique.

En effet, supposons que N n'est pas de type logarithmique. Alors on voit qu'il existe une fonction additive et continue $\gamma(x) \not\equiv 0$ sur R telle que $\tilde{N} = N + \gamma\xi \in (PMS)$, $\in (PPM)$ (voir la preuve du théorème 52). Comme $\nu_{1,p}((0, \infty)) = \nu_{2,p}((-\infty, 0)) = 1$ (voir la preuve du lemme 50), on a $\int \gamma d\nu_{1,p} > 0$ ou bien $\int \gamma d\nu_{2,p} > 0$. On voit encore que $\left(\nu_{1,p}, \int \gamma d\nu_{1,p}\right) \in \underline{SB}_{N+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); (0, \infty))$ et $\left(\nu_{2,p}, \int \gamma d\nu_{2,p}\right) \in \underline{SB}_{\tilde{N}+\varepsilon/p}((\varepsilon, 0); (-\infty, 0))$, ce qui contredit $\tilde{N} + (1/p)\varepsilon \in (PPM)$, d'où la remarque 53.

D'après les théorèmes 25, 52 et 52′, on aura le corollaire suivant:

COROLLAIRE 54. *Soit N un noyau de convolution réel de type logarithmique. Alors un semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent vérifiant $N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt$ pour toute $\mu \in M_K^0(X)$ est déterminé d'une manière unique et il est le semi-groupe vaguement continu de N; c'est-à-dire, pour $t \geqq 0$ quelconque, $N \geqq N * \alpha_t$ et*

$$\lim_{t \to 0} \frac{N - N * \alpha_t}{t} = \varepsilon .$$

De plus, si, pour deux noyaux de convolution réels N_1 et N_2 de type logarithmique, leur semi-groupes vaguement continus sont égaux, alors $N_1 - N_2$ est proportionnel à ξ.

La première partie en résulte immédiatement. Pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, on a $N_1 * \mu = N_2 * \mu$, et donc, pour $x \in X$ quelconque, $(N_1 - N_2) = (N_1 - N_2) * \varepsilon_x$, d'où la deuxième partie.

COROLLAIRE 55. *Soit N un noyau de convolution réel sur X et $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, markovien et récurrent. Si $X \approx R \times F$*

ou bien $X \approx Z \times F$, où F est le groupe abélien compact, on suppose encore que $N = o(|x|)$ à l'infini. On pose $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(p > 0)$. Si, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, $\lim_{p \to 0} N_p * \mu = N * \mu$, alors $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est semi-transient et $N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt$ $(\mu \in M_K^0(X))$.

Preuve. En vertu du principe complet du maximum de N_p, on a $N \in (PMS)$, $\in (PPM)$ (voir la preuve de la proposition 33 et celle de la remarque 34), et donc, pour $\mu \in M_K^0(X)$ quelconque, $N * \mu$ est bornée. Comme, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, $(N_p * \mu * f)_{p>0}$ converge uniformément vers $(N * \mu) * f$ sur tout compact lorsque $p \to 0$, le principe complet du maximum de N_p et $N \in (PSM)$ montrent que $(N_p * \mu * f)_{1 \geqq p > 0}$ est uniformément bornée sur X. Pour $p > 0$ quelconque, on a donc $N * \mu = (pN * \mu + \mu) * N_p$, d'après (3.3). Comme $(N_p)_{p>0}$ est récurrente, le théorème 20 et la remarque 24 montrent que $\eta_{N,\delta} = -\infty$ et que $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante de N, et donc, d'après les théorèmes 52 et 52', $N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt$ pour toute $\mu \in M_K^0(X)$, d'où le corollaire 55.

Dans ce cas, on a $\lim_{t \to \infty} 1/t \int_0^t s\alpha_s * \mu ds = 0$ pour toute $\mu \in M_K^0(X)$ (voir la proposition 31).

Comme application, on discutera l'inverse de la proposition 49.

Corollaire 56. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Si $X \approx R \times F$ ou bien $X \approx Z \times F$, où F est un groupe abélien compact, on suppose encore que $N = o(|x|)$ à l'infini. Si, pour une constante $c > 0$ quelconque, $N + c\varepsilon$ est de type logarithmique et N est non-périodique, alors N est de type logarithmique.*

Preuve. Pour $r > 0$ quelconque, on désigne par $(\alpha_{r,t})_{t \geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent vérifiant

$$\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right) * \mu = \int_0^\infty \alpha_{r,t} * \mu dt$$

pour toute $\mu \in M_K^0(X)$. On pose

$$\left(N + \frac{1}{r}\varepsilon\right)_p = \int_0^\infty \alpha_{r,t} \exp(-pt) dt \quad (p > 0) .$$

Soient $r_1 > r_2 > 0$ quelconques. En posant $q = r_1 r_2/(r_1 - r_2)$, on a, pour tout $p > 0$,

$$\left(N+\frac{1}{r_2}\varepsilon\right)_p = \left(N+\frac{1}{r_2}\varepsilon+\frac{1}{q}\varepsilon\right)_p = \frac{1}{p+q}\varepsilon + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2\left(N+\frac{1}{r_1}\varepsilon\right)_{pq/(p+q)}.$$

Donc, pour $0 < p < r_2$ quelconque, on a

$$\left(N+\frac{1}{r_1}\varepsilon\right)_p = \left(\frac{q}{q-p}\right)^2\left(N+\frac{1}{r_2}\varepsilon\right)_{pq/(q-p)} - \frac{1}{q-p}\varepsilon. \tag{5.4}$$

Par conséquent, pour $p > 0$ quelconque, $\lim_{r\to\infty}(N+(1/r)\varepsilon)_p$ existe dans $M^+(X)$. Posons $N_p = \lim_{r\to\infty}(N+(1/r)\varepsilon)_p$. On a

$$\int dN_p = \lim_{r\to\infty}\int d\left(N+\frac{1}{r}\varepsilon\right)_p = \frac{1}{p}.$$

Donc, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque,

$$N*\mu = (pN*\mu+\mu)*N_p, \tag{5.5}$$

car le remarque 5 et la proposition 33 donnent $N\in(PMS)$, et donc $N*\mu$ est bornée. En même temps, on voit que $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante et, pour $p > 0$ et $r > 0$ quelconques,

$$\left(N+\frac{1}{r}\varepsilon\right)_p = \frac{1}{p+r}\varepsilon + \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 N_{pr/(p+r)}.$$

Donc $(N_p)_{p>0}$ est récurrent. Comme N est non-périodique, N_p est aussi non-périodique, d'après (5.5) et $\int dN_p = 1/p$, et donc il existe un semi-groupe $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ vaguement continu, markovien et récurrent, et un seul tel que, pour tout $p > 0$, $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ (voir [8], p. 9 et le théorème 25). Comme, pour $\mu\in M_K^0(X)$ quelconque,

$$\left(N+\frac{1}{r}\varepsilon\right)*\mu = \lim_{p\to 0}\left(N+\frac{1}{r}\varepsilon\right)_p*\mu$$

(voir la proposition 31), on a $N*\mu = \lim_{p\to 0}N_p*\mu$, et donc le corollaire 55 donne notre conclusion.

Montrons notre deuxième théorème principal (THÉORÈME B).

THÉORÈME 57. *S'il existe de convolution réel de type logarithmique sur X, alors, pour un voisinage compact V de l'origine quelconque, $X_V \approx R^2\times F_V$ ou $X_V\approx R\times Z\times F_V$ ou $X_V\approx Z^2\times F_V$ ou $X_V\approx R\times F_V$ ou $X_V\approx Z\times F_V$, où F_V est un certain groupe abélien compact dépendant de V.*

Pour montrer le théorème 57, on préparera encore le lemme suivant:

LEMME 58. *Soit* $X = R^n \times Z^m$ *et supposons que* $n + m \geqq 3$. *Soit* $\mu \in M^+(X)$ *vérifiant* $\int d\mu = 1$, $\operatorname{supp}(\mu) = X$ *et* $\mu = \check{\mu}$. *Alors* $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu)^n$ *converge vaguement.*

Preuve. Soit $\hat{X} = R^n \times T^m$ le groupe dual de X, où T^m désigne le tore à m dimensions. Alors $1 - \hat{\mu}(\hat{x}) \geqq 0$ sur $\hat{X}$ et $\hat{\mu}(\hat{x}) \neq 1$ dès que $\hat{x} \neq \hat{0}$, où $\hat{\mu}$ est la transformée de Fourier de μ et $\hat{0}$ est l'origine de $\hat{X}$. On a $\lim_{\hat{x}\to\hat{0}} (1 - \hat{\mu}(\hat{x}))/|\hat{x}|^2 \geqq 1$, où $|\hat{x}|$ désigne la distance entre $\hat{x}$ et $\hat{0}$ dans $\hat{X}$. Donc la fonction $1/(1 - \hat{\mu}(\hat{x}))$ de $\hat{x}$ est localement $\hat{\xi}$-sommable, où $\hat{\xi}$ est la mesure de Haar sur, $\hat{X}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu)^n$ converge vaguement (voir [2]).

Preuve du théorème 57. Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage compact V_0 de l'origine tel que, pour un voisinage compact V de l'origine vérifiant $V \supset V_0$ quelconque, notre conclusion existe. D'après la remarque 42, il suffit de montrer que si $X = R^n \times Z^m$ (n, m: entiers $\geqq 0$), alors $1 \leqq n + m \leqq 2$ (voir [11], p. 110). Comme X est non-compact, $n + m \geqq 1$. Supposons que $n + m \geqq 3$. Soit N un noyau de convolution réel de type logarithmique sur X. On désigne par $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu de N et par $(N_p)_{p>0}$ la résolvante de N. Soit $p > 0$ quelconque fixé. Pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ quelconques, $\left(\int (f-g) d \sum_{j=1}^{k} (pN_p)^j\right)_{k=1}^{\infty}$ est bornée, car $\sum_{j=1}^{k} (pN_p)^j = pN * (\varepsilon - (pN_p)^k)$, et donc on a, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{k\to\infty} \int f d \sum_{j=1}^{k} (pN_p)^j = \infty$, car la résolvante de N est récurrent. Posons

$$(N_p)^{1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^{\infty} \alpha_t t^{-1/2} \exp(-pt) dt.$$

Alors $((N_p)^{1/2})^2 = N_p$. Pour $j \geqq 1$ et $f \in C_K^+(X)$ quelconques, on a

$$(N_p)^j * f * \check{f}(0) \leqq ((N_p)^{1/2} * (\check{N}_p)^{1/2})^j * f * \check{f}(0)\,.$$

D'après le lemme 40, on a $\operatorname{supp}((N_p)^{1/2} * (\check{N}_p)^{1/2}) = X$. Comme $p \int d(N_p)^{1/2} * (\check{N}_p)^{1/2} = 1$, le lemme 58 montre que $\sum_{k=1}^{\infty} (p(N_p)^{1/2} * (\check{N}_p)^{1/2})^k$ converge vaguement. Donc $\sum_{k=1}^{\infty} (pN_p)^k * f * \check{f}(0) < \infty$, d'où une contradiction. On obtient ainsi $n + m \leqq 2$, ce qui montre notre théorème.

De la même façon, s'il existe un semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent sur X, on a la même conclusion que dans le présent théorème.

Remarque 59. Si $X \approx R^2 \times F$ ou $X \approx R \times Z \times F$ ou $X \approx Z^2 \times F$ ou

$X \approx R \times F$ ou $X \approx Z \times F$, où F est un groupe abélien compact, alors il existe de noyaux de convolution réels de type logarithmique sur X.

En effet, si $X = R^2$, alors le noyau logarithmique est un noyau de convolution demandé. Posons $N = -(1/2)|x|dx$ sur R (resp. $N = -1/2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\varepsilon_n$ sur Z); alors N est un noyau de convolution réel de type logarithmique sur R (resp. sur Z). Soit $X = R \times Z$ (resp. $X = Z \times Z$) et posons

$$N = -\frac{1}{4}|n|\,|x_1|\,dx_1 \quad \text{sur} \quad R \times \{n\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\left(\text{resp. } N = -\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |n|\,|m|\varepsilon_{(n,m)} \text{ sur } Z \times Z\right);$$

alors N est un noyau de convolution réel de type logarithmique sur X. Soit $X_0 = R^2$ ou $X_0 = R \times Z$ ou $X_0 = Z^2$ ou $X_0 = R$ ou $X_0 = Z$ et soit N_0 un noyau de convolution réel de type logarithmique sur X_0. On désigne par $(\alpha_{0,t})_{t \geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu de N_0. Soit ξ_F la mesure de Haar normalisée sur F et posons $X = X_0 \times F$,

$$\alpha_t = \alpha_{0,t} \otimes \left(\exp(-t)\left(\varepsilon^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(\xi_F)^n\right)\right)$$

et $\alpha_0 = \varepsilon$, où ε et $\varepsilon^{(1)}$ désignent les mesures de Dirac à l'origine sur X et sur F, respectivement. Alors $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu, markovien et récurrent sur $X_0 \times F$. Posons

$$N = N_0 \otimes \xi_F + N_1 \otimes (\varepsilon^{(1)} - \xi_F)\,,$$

où $N_1 = \int_0^\infty \alpha_{0,t} \exp(-t)dt$. Comme, pour $a > 0$ quelconque,

$$\int_0^a \alpha_t dt = \int_0^a \alpha_{0,t} \otimes (\varepsilon^{(1)} - \xi_F)\exp(-t)dt + \int_0^a \alpha_{0,t} \otimes \xi_F dt\,,$$

$(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est semi-transient et, pour $\mu \in M_K^0(X_0 \times F)$ quelconque,

$$N * \mu = \int_0^\infty \alpha_t * \mu dt\,,$$

d'où la remarque 59.

Finalement on donne le problème suivant:

PROBLÈME 60. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu, markovien, semi-transient et récurrent. Est-ce qu'il existe un noyau de convolution réel de type logarithmique dont le semi-groupe est égal à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Berg, Principes duaux en théorie du potentiel, Bull. Soc. Math. France, **106** (1978), 365–372.
[2] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **45** (1959), 208–215.
[3] G. Choquet et J. Deny, Aspacts linéaires de la théorie du potentiel, théorèmes de dualité, C. R. Acad. Sci. Paris, **243** (1956), 764–766.
[4] ——, Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$, C. R. Acad. Sci. Paris, **250** (1960), 799–801.
[5] J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$, Sém. de la théorie du potentiel, 4ème anne, 1959/60, n° 5.
[6] ——, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643–667.
[7] M. Itô, Sur le principe de domination relatif, le balayage et les noyaux conditionnellement sous-médians, J. Math. Pures Appl., **57** (1978), 423–451.
[8] ——, Sur les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians II, Nagoya Math. J., **75** (1979), 1–39.
[9] N. Ninomiya, On the balayage for logarithmic potentials, Nagoya Math. J., **29** (1967), 229–241.
[10] C. de la Vallée Poussin, Le potentiel logarithmique, Gauthier-Villars, Paris, 1949.
[11] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1965.
[12] D. Widder, The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Nagoya
Furo-chô, Chikusa-ku
Nagoya, 464, Japon