N. Van Quê et V. Van Tho
Nagoya Math. J.
Vol. 86 (1982), 211-228

DÉFINITION DES PSEUDOGROUPES INFINITÉSIMAUX DE LIE INTRANSITIFS

THÉORÈME FONDAMENTAL DE RÉALISATION EN DIMENSION DEUX

NGÔ VAN QUÊ ET VO VAN THO

Introduction

Soit G un groupe de Lie opérant de manière localement effective sur une variété différentiable M. Pour tout sous-groupe à un paramètre $\{g_t, t \in R\}$ de G, on a le champ de vecteurs associé X dit de Killing sur M:

$$X_x = \frac{\partial}{\partial t} g_t(x)\bigg|_{t=0} \in T_x(M), \text{ espace tangent en } x \text{ de } M$$

Le faisceau correspondant de tous les champs de vecteurs de Killing du groupe de transformations G sera noté par θ; il est démontré [I] qu'il existe un ouvert $\mathscr{U}$ partout dense dans M, dit de régularité tel que:

1) Pour tout entier k, l'ensemble $E^k = J^k(\theta)$ des k-jets des champs de vecteurs de Killing est un fibré vectoriel sur $\mathscr{U}$. E^k est donc un système différentiel régulier complètement intégrable sur $\mathscr{U}$ dans le fibré vectoriel tangent $T(M)$.

2) De plus, il existe un entier k_0 tel que θ soit exactement dans $\mathscr{U}$ le faisceau des germes des solutions du système $E^{k_0} = J^{k_0}(\theta)$.

Cependant en étudiant les groupes de transformations laissant invariant un système différentiel (Théorie de Lie), on est amené à généraliser la notion des groupes de Lie de transformation: considérer les groupes infinis au sens de E. Cartan, e.g. le pseudo-groupe de transformations holomorphes, laissant invariant le système différentiel de Cauchy-Riemann sur R^{2n}. Plus précisément, du point de vue infinitésimal i.e. considérer le faisceau des champs de vecteurs de Killing d'un groupe de Lie de transformations, on a la notion des Pseudo-Groupes Infinitésimaux de Lie (P. G. I. L.) dont la définition suivante est bien connue dans le cas *transitif*:

Received June 16, 1980.

DÉFINITION I. Un sous faisceau d'algèbres de Lie θ du faisceau $T(M)$ des germes de champs de vecteurs sur une variété différentiable M est un *P. G. I. L. transitif* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(P.1) Pour tout entier k, l'ensemble $E^k = J^k(\theta)$ de tous les k-jets des sections locales X de θ est un fibré vectoriel, sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $J^k(T(M))$ sur M.

(P.2) Il existe un k_0 tel que θ soit exactement le faisceau des solutions du système différentiel régulier $J^{k_0}(\theta)$.

(T) Condition de transitivité: $J^0(\theta) = T(M)$, le fibré vectoriel tangent de M.

Ce sont évidemment les conditions que vérifie le faisceau θ des champs de vecteurs de Killing d'un groupe de Lie qui opère de manière localement transitive sur M. L'étude des P. G. I. L. transitifs est maintenant bien établie. En particulier, à tout P. G. I. L. transitif, il correspond une algèbre de Lie filtrée transitive qui le caractérise; on a en effet le troisième théorème fondamental de Cartan qui réalise comme dans le cas des groupes de Lie toute algèbre de Lie filtrée transitive comme celle d'un P. G. I. L. transitif.

Cependant la théorie des Pseudo-groupes de Lie dans le cas intransitif est encore à faire. Notre travail est de donner ici une définition des P. G. I. L. intransitifs, une définition qui est naturelle, sans être pourtant connue, dans le sens que le faisceau des champs de vecteurs de Killing θ d'un groupe de Lie de transformations la vérifie certainement sur l'ouvert partout dense de régularité. Et à un P. G. I. L. intransitif, il correspond aussi une algèbre de Lie filtrée intransitive, dont nous donnerons aussi la définition précise. Evidemment, il y aura le problème de réalisation i.e. le troisième théorème fondamental de Lie-Cartan. Nous le démontrerons seulement dans le cas de dimension deux, i.e. des P. G. I. L. intransitifs sur R^2, pour cela, nous avons en effet classifié toutes les algèbres de Lie filtrées intransitives en dimension deux et nous avons fait la réalisation respective de chacune de ces algèbres comme celle d'un P. G. I. L. intransitif. Nous retrouvons d'ailleurs à même la liste qu'a donnée E. Cartan des Pseudo-groupes de Lie intransitifs sur R^2[*II*].

I. Définition des P. G. I. L. intransitifs

Soit donc θ un sous-faisceau de R-algèbres de Lie du faisceau $T(M)$, le faisceau des germes de champs de vecteurs sur une variété différentiable

M. Nous supposerons que θ vérifie seulement les deux conditions (P, 1) et (P, 2) de la définition I. En particulier, $J^0(\theta)$ est un sous-espace fibré vectoriel strict de $T(M)$, le fibré tangent de M. Si p est le rang de $J^0(\theta)$, celui-ci définit une distribution de p-plans sur M; comme θ est un sous faisceau de R–algèbres de Lie de $T(M)$, c'est évidemment une distribution intégrable dont les feuilles intégrales F seront dites les feuilles trajectoires de θ. Et pour toute feuille trajectoire F de θ, nous dénoterons simplement par $\theta|F$, le sous-faisceau de R-algèbres de Lie de $T(F)$ défini par la restriction de θ sur F au sens que les germes de $\theta|F$ sont la valuation des germes de θ sur F.

DÉFINITION II. Un sous-faisceau θ de R-algèbres de Lie de $T(M)$ est un *P. G. I. L. intransitif* sur la variété différentiable M s'il vérifie les conditions (P, 1) et (P, 2) de la définition I, avec $J^0(\theta) \neq T(M)$, et les conditions supplémentaires suivantes:

(P, 3) pour toute feuille trajectoire F de θ, la restriction $\theta|F$ est un P. G. I. L. transitif sur F

(P, 4) la réunion $\cup(J^k(\theta|F), F \in \mathscr{F}), \mathscr{F}$ étant l'espace des feuilles trajectoires de θ, est naturellement pour tout entier k un fibré vectoriel (différentiable) sur M.

Comme nous avons dit, on voit facilement que le faisceau θ des champs de vecteurs de Killing d'un groupe de Lie de transformations d'un variété M vérifie les conditions précédentes de P. G. I. L. intransitif dans un ouvert partout dense de régularité. En ce sens, la définition précédente est donc naturelle.

II. Définition de l'algèbre de Lie filtrée intransitive

A tout P. G. I. L. transitif, on associe comme c'est bien connu une algèbre de Lie filtrée transitive. Nous allons de même associer à un P. G. I. L. intransitif une algèbre de Lie filtrée intransitive. Précisons toutefois que la notion de l'algèbre de Lie filtrée transitive est un notion abstraite indépendante de sa représentation comme une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels d'un espace vectoriel numérique R^n. Notre définition de l'algèbre de Lie filtrée intransitive suppose au préalable, par la condition même d'intransitivité, que l'algèbre considérée est déjà une sous-algèbre de Lie filtrée de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels d'un espace vectoriel numérique R^n.

Rappelons d'abord que pour l'espace vectoriel numérique R^n, on note par

$$D(R^n) = R^n \otimes R[[R^n]]$$

l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur R^n. Si R^n est à coordonnées $(x^1, \cdots, x^n)$, tout $X \in D(R^n)$ est de la forme $X = f^i(x^1, \cdots, x^n)\,\partial/\partial x^i$ (avec convention habituelle de sommation) où $f^k(x^1, \cdots, x^n) \in R[[R^n]]$, i.e. une série formelle en $(x^1, \cdots, x^n)$. On sait que $D(R^n)$ est une algèbre de Lie avec le crochet habituel de Lie des champs de vecteurs formels. C'est une algèbre filtrée complète avec la filtration:

$$D(R^n) = D_{-1} \supset D_0 \supset D_1 \supset \cdots \supset D_k \supset \cdots$$

où D_k est l'ensemble des vecteurs formels $X = f^i(x^1, \cdots, x^n)\,\partial/\partial x^i$ avec les séries formelles f^i ont des termes homogènes non nuls de degré total en $(x^1, \cdots, x^n)$ au minimum égal à $k + 1$.

Nous noterons par $\mathrm{Gr}\,(D)$ l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtreé $D(R^n)$:

$$\mathrm{Gr}\,(D) = G^{-1} \oplus G^0 \oplus G^1 \oplus \cdots \oplus G^k \oplus \cdots$$

où un élément X de G^k est :$X = p^i(x^1, \cdots, x^n)\,\partial/\partial x^i$ $p^i(x^1, \cdots, x^n)$ étant un polynôme homogène de degré total $k + 1$ en $(x^1, \cdots, x^n)$.

Ceci étant, soit θ un P. G. I. L. intransitif sur une variété différentiable M. Comme le problème est local, nous pouvons supposer M être l'espace numérique R^n avec les coordonnées $(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{n-p})$ telles que les plaques: $y^i =$ constant, $1 \leq i \leq n - p$, soient les feuilles trajectoires du P. G. I. L. θ dans R^n.

Considérons alors l'ensemble

$$L = \{j_0^\infty X, X \in \theta\}$$

$j_0^\infty X$ étant, rappelons-le, le jet d'ordre infini à l'origine $0 \in R^n$ du champ de vecteurs X, i.e. son développement de Taylor

$$j_0^\infty X = f^i(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{n-p})\,\partial/\partial x^i$$

où le coefficient $f^i(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{n-p})$ est une série formelle en x^i et y^j.

Posons $R^n = V \oplus W$, V et W étant respectivement des sous-espaces vectoriels de R^n à coordonnées $(x^1, \cdots, x^p)$ et $(y^1, \cdots, y^{n-p})$. On a évidemment

$$L \subset D(V) \hat{\otimes} R[[W]] \subset D(R^n)$$

où $D(V)\hat{\otimes} R[[W]]$ est le sous-espace de $D(R^n)$ formé de tous les vecteurs formels de la forme

$$X = f^i(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{n-p})\, \partial/\partial x^i$$

$D(V)\hat{\otimes} R[[W]]$ est un sous-espace fermé de $D(R^n)$ muni de la topologie définie par la filtration précédemment indiquée. Nous noterons aussi par la même lettre L la fermeture de L dans $D(R^n)$ avec cette topologie. Ceci étant, on a sur L la filtration induite:

$$L = L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

avec $L_k = L \cap D_k$. D'où la graduée associée

$$\mathrm{Gr}\,(L) = \oplus H^k\,, \qquad -1 \leq k$$

qui est une sous-algèbre graduée de $\mathrm{Gr}\,(D)$, avec H^k

$$H^k \subset G^k = \{p^i(x^1, \cdots, y^1 \cdots)\, \partial/\partial x^i + q^j(x^1, \cdots, y^1 \cdots)\, \partial/\partial y^j\}$$

et les éléments de H^k sont des vecteurs tels que: $q^j \equiv 0$, $1 \leq j \leq n - p$.

Ceci étant, nous avons le morphisme canonique surjectif d'algèbres de Lie filtrées défini par l'évaluation:

$$v: D(V)\hat{\otimes} R[[W]] \longrightarrow D(V)$$
$$f^i(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{n-p})\, \partial/\partial x^i \longrightarrow f^i(x^1, \cdots, x^p, 0, \cdots, 0)\, \partial/\partial x^i\,.$$

A toute sous-algèbre filtrée L de $D(V)\hat{\otimes} R[[W]]$, nous dénoterons par $L_{(0)}$ l'image directe par ce morphisme de L dans $D(V)$. Dans le cas où L est l'algèbre de Lie associée à un P. G. I. L. intransitif θ dans $R^n = V \oplus W$, tel que les feuilles trajectoires sont les plaques: $y^i =$ constant, $1 \leq i \leq n - p$, l'algèbre de Lie associée au P. G. I. L. transitif $\theta \,|\, V \times \{0\}$ n'est autre que $L_{(0)}$. La graduée associée à $L_{(0)}$ sera notée correspondamment:

$$\mathrm{Gr}\,(L_{(0)}) = \oplus H^k_{(0)} \qquad -1 \leq k$$

sous-algèbre graduée de $\mathrm{Gr}\,(D(V))$.

D'autre part, désignons par $R((W))$ le corps de quotient de l'anneau $R[[W]]$, anneau des séries formelles en $(y^1, \cdots, y^{n-p})$. On a

$$D(V)\hat{\otimes} R[[W]] \subset D(V) \otimes R((W)) = D_W(V)$$

le second étant une algèbre de Lie filtrée transitive sur le corps $R((W))$, précisément les éléments de $D_W(V)$ sont des vecteurs formels

$$X = f^i(x^1, \cdots, x^p)\, \partial/\partial x^i$$

avec f^i une série formelle en $(x^i, \cdots, x^p)$ à coefficients dans le corps $R((W))$. A toute sous-algèbre de Lie filtrée L de $D(V) \hat{\otimes} R[[W]]$, on a L_W comme sous-espace vectoriel de $D_W(V)$ engendré par L sur le corps $R((W))$. L_W est naturellement une sous-algèbre de Lie filtrée de $D_W(V)$; nous noterons aussi correspondamment son algèbre de Lie graduée associée:

$$\mathrm{Gr}\,(L_W) = \oplus H_W^k\,, \qquad -1 \leq k\,.$$

Toutes ces notations étant données, nous allons donner la définition de l'algèbre de Lie filtrée intransitive dans R^n.

DÉFINITION III. Une sous-algèbre de Lie fermée de $D(R^n)$ est une *algèbre de Lie filtrée intransitive L sur R^n*, de rang p, si et seulement si, R^n admettant un décomposition en somme directe:

$$R^n = V \oplus W \in (x^1, \cdots, x^p) + (y^1, \cdots, y^{n-p})$$

on a

$$L \subset D(V) \hat{\otimes} R[[W]]$$

tel que:

1) $\mathrm{Gr}\,(L) = \oplus H^k$, $-1 \leq k$,
   a) $H^{-1} = V$
   b) pour tout entier j, $1 \leq j \leq n-p$

$$\partial/\partial y^j : H^k \longrightarrow H^{k-1}$$
$$p^i(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\,\partial/\partial x^i \longrightarrow p^i_{y^j}(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\,\partial/\partial x^i$$

$p^i_{y^j}$ étant la dérivée partielle de p^i en y^j.

2) pour les graduées des algèbres de Lie filtrées $L_{(0)} \subset D(V)$ et $L_W \subset D_W(V) = D(V) \hat{\otimes} R((W))$, définies par L,

$$\mathrm{Gr}\,(L_{(0)}) = \oplus H^k_{(0)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gr}\,(L_W) = \oplus H^k_W$$

on a l'égalité de dimensions pour tout entier k, $-1 \leq k$

$$\dim_R H^k_{(0)} = \dim_{R((W))} H^k_W\,.$$

C'est un simple exercice de prouver que si L est l'algèbre de Lie filtrée associée à un P. G. I. L. intransitive θ sur R^n, tel que les plaques $\{y^j = \text{constant}, 1 \leq j \leq n-p\}$ sont les feuilles trajectoires de θ, L est une algèbre de Lie filtrée intransitive sur R^n vérifiant notre définition III.

Evidemment, un des problèmes fondamentaux de la théorie est de prouver le théorème fondamental de réalisation de Cartan: étant donnée une algèbre de Lie filtrée intransitive sur R^n, il existe un P. G. I. L. intransitif θ sur R^n tel que L soit son algébra de Lie associée ([III] pour le cas transitif). Cependant, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous avons seulement l'intention de le prouver dans le cas des algèbres filtrées intransitives sur R^2, ces algèbres étant automatiquement de rang 1. Notre méthode se fera par la classification de ces algèbres, la généralisation paraissant être toutefois difficile.

Remarque. Pour une algèbre de Lie filtrée intransitive sur R^n, il nous sera utile d'introduire une double filtration sur cette algèbre. Précisément pour $F = D(V) \hat{\otimes} R[[W]]$, $R^n = V \oplus W \in (x^1, \cdots, x^p) + (y^1, \cdots, y^{n-p})$ on a dans F cette filtration naturelle induite par celle de $D(R^n)$

$$F = F_{-1} \supset F_0 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$$

et il y a dans F une nouvelle filtration plus fine:

$$F_k = F_{k,0} \supset F_{k-1,1} \supset \cdots \supset F_{-1,k+1} \supset F_{k+1}$$

où $F_{q,k-q}$ est formé des vecteurs formels

$$X = f^i(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\, \partial/\partial x^i$$

tels que si le terme homogène non nul de plus bas degré total de f^i est de degré total $k+1$ en x^i et y^j, ce terme est de degré total seulement en x^i plus petit ou égal à $q+1$.

Nous noterons par convention $F_{-p,k+p} = F_{-1,k+1}$, pour $p \geq 1$. Alors, munie de cette filtration, l'algèbre F est encore une algèbre filtrée complète avec la propriété:

$$[F_{q,k}, F_{r,h}] \subset F_{q+r,k+h}\,.$$

De cette filtration, nous avons l'algèbre bigraduée associée

$$\mathrm{Gr}^2(F) = \oplus\, G^{q,k}\,, \quad q \geq -1\,, \quad k \geq 0 \quad \text{avec} \quad [G^{q,k}, G^{r,h}] \subset G^{q+r,k+h}$$

et $G^{q,k} = 0$, pour $q \leq -2$, $G^{q,k}$ étant l'ensemble des éléments

$$X = p^i(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\, \partial/\partial x^i$$

où p^i est un polynôme homogène de degré $q+1$ en x^i et de degré k en y^j, donc de degré total $q+k+1$ en x^i et y^j.

Ceci étant, une algèbre de Lie filtrée intransitive L sur R^n est aussi une algèbre fermée contenue dans une telle algèbre F avec cette nouvelle filtration. De cette nouvelle filtration, nous avons aussi l'algèbre bigraduée associée à L:

$$\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus H^{q,k}, \quad q \geq -1, \quad k \geq 0 \quad \text{avec} \quad H^{q,k} \subset G^{q,k}.$$

Les conditions suivantes sont des conséquences des conditions imposées à L par la définition III:

1) $H^{-1,0} = G^{-1,0} = V = \{a^i \partial/\partial x, a^i \text{ des constants réels}\}$
2) pour tout j, $1 \leq j \leq n - p$,

$$\begin{aligned} \partial/\partial y^j : H^{q,k} &\longrightarrow H^{q,k-1} \\ p^i(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\, \partial/\partial x^i &\longrightarrow p^i_{y^j}(x^1, \cdots, y^1, \cdots)\, \partial/\partial x^i \end{aligned}$$

autrement dit, $\partial/\partial y^j$ est une dérivation de degrée $(0, -1)$ dans l'algèbre bigraduée $\mathrm{Gr}^2(L)$.

Remarquons que: $\oplus H^{q,0}$, $q \geq -1$, est une algèbre graduée. Nous avons naturellement l'inclusion d'algèbre graduée: $\oplus H^{q,0} \subset \oplus H^q_{(0)}$, l'algèbre graduée associée à $L_{(0)}$. Nous ne savons pas si cette inclusion peut être stricte.

III. Classification algébrique

Considérons donc le cas où $n = 2$, $R^2 = V \oplus W = R \oplus R \in (x, y)$ L'algèbre considérée $F = D(V) \hat{\otimes} R[[W]]$ n'est autre que l'algèbre des vecteurs formels:

$$X = f(x, y)\, \partial/\partial x$$

où $f(x, y)$ est une série formelle en x et y. L'algèbre bigraduée de F est:

$$\mathrm{Gr}^2(F) = \oplus G^{q,k}, \quad q \geq -1 \quad \text{et} \quad k \geq 0$$

avec $G^{q,k} = R \cdot x^{q+1} y^k\, \partial/\partial x$.

Le problème est de trouver en premier lieu les sous-algèbres bigraduées $\mathrm{Gr}^2(L)$ de $\mathrm{Gr}^2(F)$:

$$\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus H^{q,k}$$

avec $H^{q,k} \subset G^{q,k}$ vérifiant des conditions 1) et 2) de la dernière remarque, précisément

1) $H^{-1,0} = G^{-1,0} = R \cdot \partial/\partial x$
2) $\partial/\partial y : H^{q,k} \to H^{q,k-1}$ $(H^{q,k} = 0 \text{ si } k \leq -1)$

Considérons d'abord la sous-algèbre graduée:

$$H^{*,0} = \oplus H^{q,0} \subset \oplus G^{q,0} = \oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x\,, \qquad q \geq -1\,.$$

Le lemme suivant est immédiat:

LEMME 1. *L'algèbre graduée* $H^{*,0}$ *doit être l'une des quatre sous-algèbres*:

1) $H^{*,0} = \oplus G^{q,0} = \oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x,\ q \geq -1$
2) $H^{*,0} = G^{-1,0} = R\cdot\partial/\partial x$
3) $H^{*,0} = G^{-1,0} \oplus G^{0,0} = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x$
4) $H^{*,0} = G^{-1,0} \oplus G^{0,0} \oplus G^{1,0} = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x^2\,\partial/\partial x.$

PROPOSITION 1. *Soit* L *une algèbre de Lie filtrée intransitive sur* R^2, *de rang* 1. *La bigraduée* $\mathrm{Gr}^2(L)$ *doit être une de ces algèbres*:

1-i) $\oplus R\cdot x^{q+1}y^k\,\partial/\partial x,\ q \geq -1,\ k \geq 0$ 1-ii) $\oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x,\ q \geq -1$
2-i) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$ 2-ii) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x,\ 0 \leq k \leq n$
3-i) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^h x\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$ et $h \geq 0$
3-ii) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^h x\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$ et $0 \leq h \leq n$
3-iii) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x,\ 0 \leq k \leq n$
4-i) $\oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^k x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^k x^2\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$
4-ii) $\oplus R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x^2\,\partial/\partial x.$

Preuve. Le raisonnement se fait suivant les différentes possibilités de $H^{*,0}$

1) $H^{*,0} = \oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x,\ q \geq -1.$

i) Si $H^{-1,1} = R\cdot y\,\partial/\partial x \neq 0$, on a le cas 1-i) comme l'algèbre bigraduée

$$\mathrm{Gr}^2(F) \text{ est engendrée par } G^{*,0} \quad\text{et}\quad G^{0,1} = R\cdot y\,\partial/\partial x\,.$$

ii) Si $H^{-1,1} = 0$, par la propriété 2), on a $H^{-1,k} = 0$, pour tout $k \geq 1$. Et alors $0 = H^{-1,k} = [H^{-1,0}, H^{0,k}]$, donc $H^{0,k} = 0,\ k \geq 1$. D'où on a le cas 1-ii).

2) $H^{*,0} = R\cdot\partial/\partial x$. Par la propriété 2), on a $H^{q,k} = 0,\ q \geq 0$. D'où immédiatement les possibiltés 2-i) et 2-ii).

3) $H^{*,0} = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x$. Par le même argument on a $H^{q,k} = 0$, $q \geq 1$.
D'autre part, si $H^{-1,k} = 0$ pour $k \geq n+1$, et $H^{-1,n} \neq 0$, on doit avoir $H^{0,1} = 0$ (donc $H^{0,k} = 0,\ k \geq 1$), car sinon

$$H^{-1,n+1} = [H^{0,1}, H^{-1,n}] \neq 0\,.$$

Dans ce cas, on a la possibilté 3-iii). Sinon, on a 3-i) ou 3-ii).

4) $H^{*,0} = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x^2\,\partial/\partial x.$

On doit avoir d'abord $H^{q,k} = 0$ pour tout $q \geq 2$. D'autre part si $H^{-1,1} \neq 0$ on a $H^{0,1} = [H^{-1,1}, H^{1,0}] \neq 0$ et $H^{1,1} = [H^{0,1}, H^{1,0}] \neq 0$. De même alors par récurrence $H^{q,k} \neq 0$ pour tout $q \leq 1$.

D'où les possibiltés 4-i) et 4-ii) . / .

Nous allons voir dans la section suivante que cette proposition permet de classifier tous les P. G. I. L. intransitifs sur R^2.

Dans ce but, nous faisons aussi les remarques suivantes. Précisément avec les notations déjà introduites, rappelons que nous avons noté par $L_{(0)}$ l'image directe de l'algèbre filtrée intransitive $L \subset F = R[[x, y]]\,\partial/\partial x$ par le morphisme d'évaluation canonique

$$\begin{aligned} v\colon R[[x, y]]\,\partial/\partial x &\longrightarrow R[[x]]\,\partial/\partial x = D(R)\,, \\ f(x, y)\,\partial/\partial x &\longrightarrow f(x, 0)\,\partial/\partial x\,. \end{aligned}$$

Et nous avons noté: $\operatorname{Gr}(L_{(0)}) = \oplus H^q_{(0)} \subset \oplus G^{q,0} = \oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x$.

PROPOSITION 2. *Pour une algèbre filtrée intransitive L sur R^2, on a*

$$\oplus H^{q,0} = \oplus H^q_{(0)}\,, \qquad q \geq -1\,.$$

Preuve. Par définition, on a

$$H^{-1,0} = H^{-1}_{(0)} = R\cdot\partial/\partial x \quad \text{et} \quad H^{0,0} = H^0_{(0)}\,.$$

La proposition est alors évidente dans les deux cas suivants:

1) $\oplus H^{q,0} = \oplus R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial x$ (cas maximal).

2) $H^{0,0} = H^0_{(0)} = 0$, car alors, par prolongement, on a aussi

$$H^{q,0} = H^q_{(0)} = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 0\,.$$

Il reste les deux cas:

3) $\oplus H^{q,0} = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x$.

Dans ce cas, si $H^1_{(0)} \neq 0$, il existe dans L un vecteur formel

$$X = (a\cdot y + x^2)\,\partial/\partial x + y(c\cdot x + d\cdot y)\,\partial/\partial x + (\text{termes de degré } \geq 3)$$

et de même comme $H^{0,0} = H^0_{(0)} \neq 0$, il existe dans L un vecteur formel

$$Y = (r\cdot y + x)\,\partial/\partial x + (\text{termes de degré } \geq 2)\,.$$

D'où dans L, on a le vecteur formel

$$Z = [X, Y] = (a\cdot y - x^2)\,\partial/\partial x + y\cdot(c_1\cdot x + d_1\cdot y)\,\partial/\partial x + (\text{termes de degré } \geq 3)$$

et par suite aussi le vecteur formel

$$X - Z = 2 \cdot x^2 \, \partial/\partial x + y(c_2 x + d_2 y) \, \partial/\partial x + (\text{termes de degré } \geq 3) \, .$$

Ce qui implique: $2 \cdot x^2 \, \partial/\partial x \in H^{1,0} \neq 0$.

Contrairement à l'hypothèse. On doit donc avoir: $H^1_{(0)} = 0$ et par prolongement, $H^q_{(0)} = 0$ pour tout $q \geq 1$.

4) $\oplus H^{q,0} = R \cdot \partial/\partial x \oplus R \cdot x \, \partial/\partial x \oplus R \cdot x^2 \, \partial/\partial x$.

Alors si $H^2_{(0)} \neq 0$, on aurait dans L un vecteur formel:

$$X = (a \cdot y + b \cdot yx + c \cdot y^2 + x^3) \, \partial/\partial x + y(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot yx + \gamma \cdot x^2) \, \partial/\partial x$$
$$+ (\text{termes de degré } \geq 4)$$

avec les coefficients a, b, c non tous nuls, car sinon ce vecteur définira un élément dans $H^{2,0}$, qui ne sera pas nul, contrairement à l'hypothèse. Donc ce vecteur X définit un élément non nul de $H^{-1,1} \oplus H^{0,1} \oplus H^{-1,2}$; il est immédiat de voir que dans ce cas on a

$$\mathrm{Gr}^2 (L) = \{p(y) \, \partial/\partial x + q(y) x \, \partial/\partial x + r(y) x^2 \, \partial/\partial x \mid p, q, r \in R[y]\} \, .$$

En particulier, on devrait avoir dans L un vecteur formel

$$Y = x \, \partial/\partial x + (\text{termes de degré } \geq 3) \, .$$

D'où, dans L, il y a le vecteur

$$Z = [X, Y] = (a \cdot y + c \cdot y^2 - 2 \cdot x^3) \, \partial/\partial x + y(\alpha_1 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot yx + \gamma_1 \cdot y^2) \, \partial/\partial x$$
$$+ (\text{termes de degré } \geq 4)$$

et le vecteur formel

$$Z_1 = [Z, Y] = (a \cdot y + c \cdot y^2 + 4 \cdot x^3) \, \partial/\partial x + y(\alpha_2 \cdot x^2 + \beta_2 \cdot yx + \gamma_2 \cdot y^2) \, \partial/\partial x$$
$$+ (\text{termes de degré } \geq 4) \, .$$

Donc aussi le vecteur formel

$$Z_1 - Z = 6 \cdot x^3 \, \partial/\partial x + y(\alpha_3 \cdot x^2 + \beta_3 \cdot xy + \gamma_3 \cdot y^2) \, \partial/\partial x$$
$$+ (\text{termes de degré } \geq 4) \, .$$

Ce qui veut dire justement que

$$6 \cdot x^3 \, \partial/\partial x \in H^{2,0} \neq 0$$

contrairement à l'hypothèse. On doit avoir aussi $H^2_{(0)} = 0$ et de même par prolongement $H^q_{(0)} = 0$, $q \geq 2$. / .

IV. Les groupes de Lie de transformation intransitifs sur R^2

Pour équilibrer notre exposé, nous classifierons d'abord les groupes de Lie de transformation intransitifs sur R^2. Alors, dans un certain ouvert de régularité, le faisceau de champs de vecteurs de Killing de ces groupes est un P. G. I. L. de type fini, dont l'algèbre filtrée intransitive L est du cas 2-ii), 3-iii) ou 4-ii) de la proposition 1.

Cas 2-ii) $\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus R \cdot y^k \partial/\partial x,\ 0 \leq k \leq n.$

Soit $X = \partial/\partial x + f(x, y)\partial/\partial x, f$ étant une série formelle sans terme constant, un vecteur formel de L. Par un automorphisme formel de $D(R^2)$, ou plus exactement le jet d'ordre ∞ d'un difféomorphisme local de R^2 en 0:

$$R^2 \longrightarrow R^2 : (x, y) \longrightarrow (\phi(x, y), y) \quad \text{avec} \quad \phi \in R[[x, y]]\ ,$$

on peut se ramener au cas où $X = \partial/\partial x$ est dans L. On voit facilement alors que L est l'algèbre filtrée intransitive commutative, engendreé comme espace vectoriel par les vecteurs formels

$$X = \partial/\partial x \quad X = f_k(y)\partial/\partial x\ , \quad 1 \leq k \leq n$$

avec $f_k(y) = y^k +$ (termes de degré $\geq k + 1$).

La réalisation est dans ce cas-ci évidente: le P. G. I. L. intransitif correspondant θ est faisceau des champs de vecteurs

$$X = f(y)\partial/\partial x$$

avec $f(y)$ est une solution (locale au vosinage de 0 de R^2) d'une certaine équation différentielle ordinaire régulière homogène d'ordre $n + 1$ en y. Le groupe de Lie de transformations correspondant est le groupe abèlien R^{n+1} qui opère par translations sur R^2 de cette manière:

$$\begin{aligned} &R^2 \longrightarrow R^2 \\ &(x, y) \longrightarrow (x + \textstyle\sum t^k f_k(y), y)\ , \qquad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

$(t^0, t^1, \cdots, t^k) \in R^{n+1}$ et $\{f_k\}$ forme une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle considérée en y.

Cas 3-iii) $\mathrm{Gr}^2(L) = R \cdot x\,\partial/\partial x + R \cdot y^k \partial/\partial x,\ 0 \leq k \leq n.$

De même on peut toujours se ramener au cas où l'algèbre L contient le vecteur $X = \partial/\partial x$.

Dans L, on a le vecteur formel

$$Y = \sum a_k(y)x^k\, \partial/\partial x\ , \quad k \geq 0\ , \quad \text{avec } a_k(y), \text{ des séries}$$

formelles en y, $a_0(y)$ pouvant être choisi égal à: y^{n+1} + (termes de degré $\geq n+2$) et $a_1(y)$ tel que $a_1(0) = 1$.

Alors, l'algèbre filtrée L contient aussi:

$$Z = [X, Y] = \sum k a_k(y)x^{k-1}\, \partial/\partial x\ , \qquad k \geq 1\ .$$

On sait que: $\dim_R H^0_{(0)} = 1$. La condition 2) de la définition III de l'algèbre filtrée intransitive implique: dans l'algèbre L_y, l'algèbre filtrée engendrée par L sur le corps $R(y))$, corps quotient de l'anneau des séries formelles $R[[y]]$, on doit avoir

$$Z - a_1(y)\, \partial/\partial x = f(y)(Y - a_0(y)\, \partial/\partial x)\ , \quad \text{avec} \quad f(y) \in R((y))\ .$$

On voit immédiatement que

$$f(y) = 2 \cdot a_2(y)/a_1(y) \quad \text{et} \quad k a_k(y) = f(y) \cdot a_{k-1}(y)\ .$$

D'où,

$$Y = a_0(y)\, \partial/\partial x + (a_1(y)/f(y))(e^{f(y)x} - 1)\, \partial/\partial x\ .$$

Alors par des transformations formelles, jet d'ordre ∞ des difféomorphismes locaux de R^2 en 0, successives suivantes:

$$\begin{aligned} R^2 \longrightarrow R^2 : (x, y) &\longrightarrow (t = (1/f(y))(1 - e^{-f(y)x}), y) \\ (t, y) &\longrightarrow (u = t/a_1(y), y) \\ (u, y) &\longrightarrow (v = (a_1(y) - a_0(y)f(y))u, y) \\ (v, y) &\longrightarrow (s = v + a_0(y)/a_1(y), y) \end{aligned}$$

les vecteurs Z et Y sont transformés en

$$Z = g(y)\, \partial/\partial x \quad \text{et} \quad Y = g(y) \cdot x\, \partial/\partial x$$

avec

$$g(y) = a_1(y) - a_0(y)f(y)\ , \qquad g(0) = 1\ .$$

Ceci étant, par la forme même de $\mathrm{Gr}\,(L)$, on doit aussi avoir dans L le vecteur formel

$$T = y^n \cdot r(y)\, \partial/\partial x + s(y)x\, \partial/\partial x$$

avec $r(0) = 1$, $r(y)$ et $s(y)$ étant des séries formelles en y. Dans L, on a donc

$$[T, Y] = y^n g(y) r(y)\, \partial/\partial x$$

qui doit être égal à T:

$$y^n g(y) r(y) \equiv y^n r(y) + s(y)x\,.$$

D'où: $s(y) \equiv 0$ et $g(y) \equiv 1$.

Il en résulte que L contient les vecteurs

$$\partial/\partial x,\ x\,\partial/\partial x \quad \text{et} \quad y^n r(y)\,\partial/\partial x \quad \text{avec} \quad r(0) = 1\,.$$

Il y a aussi dans L le vecteur formel

$$V = [y^{n-1} r_1(y) + s_1(y)x]\,\partial/\partial x$$

le même argument montre que $s_1(y) \equiv 0$.

Ainsi de suite, on montre que L contient les vecteurs

$$\partial/\partial x,\ x\,\partial/\partial x\,,\quad f_k(y)\,\partial/\partial x\,,\quad 1 \le k \le n$$

et la série formelle $f_k(y)$ est telle que $f_k(y) = y^k +$ (termes de degré $\ge k+1$). Autrement dit, l'algèbre filtrée L est l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Le P. G. I. L. intransitif θ correspondant est évidemment au voisinage de 0 de R^2 l'algèbre des champs de vecteurs

$$X = f(y)\,\partial/\partial x + ax\cdot\partial/\partial x$$

avec a un nombre réel et $f(y)$, une solution d'une équation différentielle linéaire ordinaire régulière homogène d'ordre $n+1$ en y. Et le groupe de Lie est le groupe résoluble de dimension $n+2$ de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & \lambda_0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & \lambda_1 \\ \cdots & & \\ 0 & 0 \cdots 0 & e^t \end{pmatrix}$$

opérant ainsi sur R^2:

$$R^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (e^t x + \textstyle\sum \lambda_k f_k(y), y)\,, \qquad 0 \le k \le n$$

avec $\{f_k(y)\}$ une base de l'espace de solutions de l'équation différentielle considérée en y.

Cas 4-ii) $\mathrm{Gr}^2(L) = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x^2\,\partial/\partial x$.

Comme avant, par des arguments identiques, nous pouvons nous ramener dans ce cas à la situation où L contient les vecteurs formels

$$\partial/\partial x, \; x\,\partial/\partial x \quad \text{et} \quad x^2\,\partial/\partial x\,.$$

Autrement dit, L est l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Le P. G. I. L. intransitifs θ est exactement le faisceau des champs de vecteurs

$$X = a\cdot\partial/\partial x + b\cdot x\,\partial/\partial x + c\cdot x^2\,\partial/\partial x\,.$$

Et le groupe de Lie est alors le groupe $SL(2, R)$, espace des matrices

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

opérant sur R^2, indépendamment de y:

$$\begin{aligned} R^2 &\longrightarrow R^2\\ (x, y) &\longrightarrow ((\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1}, y)\,. \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons donc prouvé le théorème

THÉORÈME I. *Les groupes de Lie de transformations localement intransitifs sur R^2 sont*

1) *le groupe abélien R^{n+1}.*

2) *le groupe résoluble de dimension $n+2$ formé des matrices*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0 & \lambda_0\\ 0 & 1\cdots 0 & \lambda_1\\ \cdots & & \\ 0 & 0\cdots 0 & e^t\end{pmatrix}.$$

3) *le groupe $SL(2, R)$.*

V. Les P. G. I. L. intransitifs de type infini sur R^2

C'est le cas où l'algèbre bigraduée $\mathrm{Gr}^2(L)$ de l'algèbre filtrée intransitive L est de dimension infinie, i.e. du cas 1-i), 1-ii), 2-i), 3-i), 3-ii) ou 4-i) de la proposition 1.

Effectivement, modulo une transformation formelle de R^2, i.e. un jet d'order ∞ d'un difféomorphisme local de R^2 en 0, il correspond à ces algèbres bigraduées les algèbres filtrées intransitives suivantes:

Cas 1-i) $\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus R\cdot x^{q+1}y^k\,\partial/\partial x$, $q \geq -1$ et $k \geq 0$

On a: $L = R[[x, y]]\,\partial/\partial x$

Cas 1-ii) $\mathrm{Gr}^2(L) = R\cdot x^{q+1}\,\partial/\partial$, $q \geq -1$

On a: $L = R[[x]]\,\partial/\partial x$

Cas 2-i) $\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$

On a: $L = R[[y]]\,\partial/\partial x$

Cas 3-i) $\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^h x\,\partial/\partial x,\ k \geq 0,\ h \geq 0$

On a: $L = R[[y]]\,\partial/\partial x \oplus R[[y]]x\,\partial/\partial x$

Cas 3-ii) $\mathrm{Gr}^2(L) = \oplus R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$

On a: $L = R[[y]]\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x$

Cas 4-i) $\mathrm{Gr}^2(L) = R\cdot y^k\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^k x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot y^k x^2\,\partial/\partial x,\ k \geq 0$

On a: $L = R[[y]]\,\partial/\partial x \oplus R[[y]]x\,\partial/\partial x \oplus R[[y]]x^2\,\partial/\partial x$.

Pour prouver ces assertions, on utilise des arguments assez identiques à ceux déjà utilisés dans la section précédente. Pour les illustrer, nous donnons cependant la preuve complète du dernier cas (par exemple):

Preuve du cas 4-i). Par la proposition 2, on a

$$\mathrm{Gr}(L_{(0)}) = R\cdot\partial/\partial x \oplus R\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R\cdot x^2\,\partial/\partial x\ .$$

Donc aussi, par la deuxième condition de la définition III des algèbres filtrées intransitives:

$$\mathrm{Gr}(L_y) = R((y))\,\partial/\partial x \oplus R((y))\cdot x\,\partial/\partial x \oplus R((y))\cdot x^2\,\partial/\partial x$$

où nous avons noté comme avant par L_y, l'algèbre filtrée sur le corps $R((y))$ engendrée par l'algèbre L.

Ceci étant, par définition même de l'algèbre bigraduée $\mathrm{Gr}^2(L)$, dans L il y a des vecteurs formels:

$$\begin{aligned} X &= \partial/\partial x + \textstyle\sum a_n(y)x^n\,\partial/\partial x\ , && n \geq 3 \\ Y &= x\,\partial/\partial x + \textstyle\sum b_n(y)x^n\,\partial/\partial x\ , && n \geq 3 \\ Z &= x^2\,\partial/\partial x + \textstyle\sum c_n(y)x^n\,\partial/\partial x\ , && n \geq 3 \end{aligned}$$

où les coefficients $a_n(y)$, $b_n(y)$ et $c_n(y)$ sont des séries formelles en y. Nous pouvons résoudre l'équation suivante:

$$t'(x, y)\cdot(x + \textstyle\sum b_n(y)x^n) = t(x, y)$$

où $t(x, y) = x + \sum h_n(y)x^n$, $n \geq 2$, $h_n(y)$ étant série formelle en y et $t'(x, y) = 1 + \sum nh_n(y)x^{n-1}$, $n \geq 2$ (dérivée partielle de $t(x, y)$ en x). Alors la transformation formelle de R^2:

$$\begin{aligned} R^2 &\longrightarrow R^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (t(x, y), y) \end{aligned}$$

transformera L en une algèbre, avec la même bigraduée, contenant les vecteurs X et Z de même forme qu'avant, avec seulement le vecteur Y, après la transformation formelle considérée, devant être de la forme:

$$Y = x\,\partial/\partial x\,.$$

Considérons alors

$$[Y, X] = \partial/\partial x + \sum (n-1)a_n(y)x^n\,\partial/\partial x\,, \qquad n \geq 3$$
$$[Y, Z] = x^2\,\partial/\partial x + \sum (n-1)c_n(y)x^n\,\partial/\partial x\,, \qquad n \geq 3\,.$$

Pour que $\mathrm{Gr}\,(L_y)$ soit de la forme indiquée, il faut que dans L_y, on a

$$[Y, X] = X \quad \text{et} \quad [Y, Z] = Z\,.$$

D'où nécessairement: $a_n(y) \equiv 0$ et $c_n(y) \equiv 0$, $n \geq 3$.

Autrement dit, par une transformation formelle de R^2, nous pouvons supposer que l'algèbre filtrée L contient les vecteurs

$$X = \partial/\partial x\,, \quad Y = x\,\partial/\partial x \quad \text{et} \quad Z = x^2\,\partial/\partial x\,.$$

Il est alors immédiat de conclure que l'algèbre filtrée L doit être:

$$L = R[[y]]\,\partial/\partial x \oplus R[[y]]x\,\partial/\partial x \oplus R[[y]]x^2\,\partial/\partial x\,./\,.$$

La liste d'algèbre filtrée intransitive de type infini étant faite, leur réalisation comme l'algèbre associée à un P. G. I. L. intransitif sur R^2 est évidente. D'où le théorème

THÉORÈME II. *Les P. G. I. L. intransitif de type infini sur R^2 sont, à un difféomorphisme local près de R^2, d'une de ces formes:*

1-i) *le faisceau de tous les champs de vecteurs*

$$X = f(x, y)\,\partial/\partial x$$

où $f(x, y)$ est une fonction différentiable quelconque de (x, y).

1-ii) *le faisceau des champs de vecteurs*

$$X = f(x)\,\partial/\partial x$$

où $f(x)$ est une fonction différentiable quelconque de x.

2-i) *le faisceau des champs de vecteurs*

$$X = f(y)\,\partial/\partial x$$

où $f(y)$ est une fonction différentiable quelconque de y.

3-i) *le faisceau des champs de vecteurs*

$$X = f(y)\,\partial/\partial x + g(y)x\,\partial/\partial x$$

$f(y)$ et $g(y)$ étant des fonctions différentiables quelconques de y.

3-ii) *le faisceau des champs de vecteurs*

$$X = f(y)\,\partial/\partial x + a\cdot x\,\partial/\partial x\ ,$$

a étant un constant réel quelconque et $f(y)$ étant une fonction différentiable quelconque de y.

4-i) *le faisceau des champs de vecteurs*

$$X = f(y)\,\partial/\partial x + g(y)\cdot x\,\partial/\partial x + h(y)\cdot x^2\,\partial/\partial x$$

$f(y)$, $g(y)$ et $h(y)$ étant des fonctions différentiables quelconques de y.

RÉFÉRENCES

[1] Ngô Van Quê et Vo Van Tho, Classification des groupes locaux transformations holomorphes sur *C*, Rapport de Recherches du Département de Mathématiques et Statistique No. 79-8, Université de Montréal, à paraitre.

[2] Elie Cartan, Les sous-groupes des groupes continus de transformations, Oeuvres complètes, Partie II, **2** (1953), 719–856.

[3] A. A. M. Rodrigues et Ngô Van Quê, Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan, Annales de l'institut de Fourier, **XXV**, fasc. 1 (1975), 251–282.

Université de Montréal