N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 83 (1981), 5-14

SUR L'INÉGALITÉ FONDAMENTALE DE H. CARTAN POUR LES SYSTÈMES DE FONCTIONS ENTIÈRES

NOBUSHIGE TODA

§ 1. Introduction

Soit $f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, f_1, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan ([1]):

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leq j\leq n} \log |f_j(re^{i\theta})|\, d\theta - \max_{0\leq j\leq n} \log |f_j(0)| \, .$$

Soient X un ensemble de combinaisons $(\not\equiv 0)$ linéaires, homogènes à coefficients constants de $f_0, f_1, \cdots, f_n$ et linéairement distinctes $n+1$ à $n+1$ et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes qui existent entre les $f_0, f_1, \cdots, f_n$. On note que $0 \leqq \lambda \leqq n-1$.

Il y a longtemps que Cartan ([1]) a démontré l'inégalité fondamentale suivante quand $\lambda = 0$:

Théorème de Cartan. Pour q combinaisons $F_1, \cdots, F_q$ $(q \geqq n+2)$ quelconque dans X,

$$(q - n - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N_n(r, 0, F_i) + S(r)$$

où $N_n(r, 0, F_i)$ désigne la fonction $N_n(r, F_i)$ dans [1] et

$$S(r) = O(\log r) + O(\log T(r, f)) \qquad (r \notin E)\, ,$$

E étant un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Et puis il a espéré démontrer l'inégalité suivante quand $\lambda > 0$ (originairement pour les fonctions algébroïdes ([1])):

Received June 30, 1978.

Conjecture de Cartan. Pour q combinaisons $F_1, \cdots, F_q$ $(q \geqq n + \lambda + 2)$ quelconque dans X,

$$(q - n - \lambda - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r) .$$

On ne sait pas si cette conjecture serait vraie à présent.

Il y a quelques années, C. Sung ([3]) a donné une proposition plus précise que cette conjecture, mais malheureusement, on peut donner un contre exemple pour cette proposition facilement et elle n'est pas vraie.

Pour cette conjecture, on a donné quelques résultats. Par exemple,

I. $$(q - n - 1 - \lambda(n - \lambda))T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r) . \quad ([5])$$

II. S'il y a $\lambda + 1$ combinaisons étant proportionnelles dans X,

$$(q - n - \lambda - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N(r, 0, F_i) + S(r) . \quad ([5])$$

(Dans ce théorème, on peut échanger $N(r, 0, F_i)$ pour $N_{n-\lambda}(r, 0, F_i)$ facilement.)

Dans ce mémoire, on démontre que la conjecture de Cartan est vraie quand $q = n + \lambda + 2$ sans autre restriction. De plus, on donne quelques résultats concernant les combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna ([2]).

§ 2. Préliminaires

1. Soient f, X et λ comme dans l'introduction. D'abord on note qu'il est facile à démontrer que le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre $n + 1$ combinaisons quelconque dans X est aussi λ. Soient $F_1, \cdots, F_q$ $(q \geqq n + 1)$ q combinaisons quelconque dans X, alors il y a $n + 1 - \lambda$ combinaisons linéairement indépendantes sur C dans $\{F_i\}_{i=1}^{q}$ (soient $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$ telles combinaisons) telles que tous les éléments de X sont représentés par $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$ à coefficients constants:

$$F = \alpha_{F1} g_1 + \cdots + \alpha_{F n+1-\lambda} g_{n+1-\lambda} \tag{1}$$

$(F \in X, \alpha_{Fi} \in C)$.

Evidemment, $g = (g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda})$ est un système transcendant dans $|z| < \infty$. On dit que telles $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$ forment une base de X.

On donne quelques lemmes qui seront utilisés après.

LEMME 1. $|T(r,f) - T(r,g)| < O(1)$.

C'est trivial d'après les définitions de $T(r,f)$, $T(r,g)$ et g.

LEMME 2. *Soient* $H_1, \cdots, H_k$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$ *k combinaisons quelconque dans X. Alors,*

$$m(r, \|H_1, \cdots, H_k\|/H_1 \cdots H_k) = S(r) ,$$

où $\|H_1, \cdots, H_k\|$ *signifie le wronskian de* $H_1, \cdots, H_k$. (*Voir* [1])

2. On peut supposer que $g_i = F_i$ $(i = 1, \cdots, n+1-\lambda)$ sans restriction de généralité. Soit

$$X^0 = \{F_i\}_{i=n+2-\lambda}^{q}$$

et par la relation equivalente "$\sim$" introduite dans [6], on classifie X^0.

Soient

$$X^0/\sim \; = \{X_1^0, \cdots, X_p^0\} \qquad (1 \leqq p \leqq n+1-\lambda)$$

$$A_t = \{F_i \ (1 \leqq i \leqq n+1-\lambda); \text{ il y a au moins une } F \text{ dans } X_t^0 \text{ telle que } \alpha_{Fi} \neq 0\} \qquad (t = 1, \cdots, p) ,$$

où α_{Fi} est le coefficient de F_i quand on représente F par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ (voir (1));

$$A_0 = \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda} - \bigcup_{t=1}^{p} A_t ,$$

$$\nu_t = \text{le nombre d'éléments dans } A_t \ (t = 0, 1, \cdots, p) .$$

On sait que

i) $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \phi \qquad (t_1 \neq t_2)$,

ii) $\sum_{t=0}^{p} \nu_t = n+1-\lambda$.

LEMME 3. *Quand* $q \geqq n+\lambda+2$, $p = 1$ *et* $\nu_0 = 0$.

Démonstration. Il suffit de prouver ce lemme dans le cas $q = n+\lambda+2$ parce que p et ν_0 diminuent quand q augmente par définition de la relation "$\sim$". Supposons qu'il existent au moins deux classes n'étant pas vides entre $A_0, A_1, \cdots, A_p$. Soient $X_1^0 = \{F_{n+1-\lambda+j}\}_{j=1}^{\mu}$ et $A_1 = \{F_1, \cdots, F_{\nu_1}\}$ sans restriction de généralité. Alors,

$$\nu_1 \leqq n-\lambda \quad \text{et} \quad \mu \leqq \lambda .$$

En effet, maintenant, $\nu_0 \neq 0$ ou $\nu_2 \neq 0$ et par ii), on a $\nu_1 \leqq n - \lambda$. Et puis, si $\mu > \lambda$, le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre les $F_1, \cdots, F_{\nu_1}$, $F_{n+2-\lambda}, \cdots, F_{n+2}$ est au moins $\lambda + 1$ parce que, pour chaque élément dans X_1^0, quand on répresente par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, tous les coefficients de F_{ν_1+1}, $\cdots, F_{n+1-\lambda}$ sont égaux à nul. En considérant que $\nu_1 + \lambda + 1 \leqq n + 1$, c'est contraire à la définition de λ. Par conséquent, il faut que $\mu \leqq \lambda$.

D'autre part, pour chaque élément dans $X^0 - X_1^0$, tous les coefficients de $F_1, \cdots, F_{\nu_1}$ sont egaux à nul quand on représente par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ et le nombre des éléments dans $X^0 - X_1^0$ est $2\lambda + 1 - \mu$ qui est plus grand que ou égal à $\lambda + 1$ parce que $\mu \leqq \lambda$. Cela veut dire qu'il existent au moins $\lambda + 1$ relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre les $F_{\nu_1+1}, \cdots, F_{n+1-\lambda}, F_{n+1-\lambda+\mu+1}, \cdots, F_{n+2+\mu}$. En considérant que $n + 1 - \lambda - \nu_1 + \lambda + 1 = n + 2 - \nu_1 \leqq n + 1$, c'est aussi contraire à la définition de λ.

Cela veut dire qu'il faut $p = 1$ et $\nu_0 = 0$.

§ 3. Théorèmes

Soient f, X et λ comme dans l'introduction.

THÉORÈME 1. *Soient $F_1, \cdots, F_{n+\lambda+2}$ $n + \lambda + 2$ combinaisons quelconque dans X, alors on a*

$$T(r,f) < \sum_{i=1}^{n+\lambda+2} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r) .$$

Démonstration. On peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ forment une base de X. On représente F_j ($j = n + 2 - \lambda, \cdots, n + \lambda + 2$) par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$. Pour simplifier, on met $F_{n+1-\lambda+k} \equiv H_k$.

$$(2) \qquad H_k = \alpha_{k1}F_1 + \cdots + \alpha_{kn+1-\lambda}F_{n+1-\lambda} \qquad (k = 1, \cdots, 2\lambda + 1) .$$

I. D'après le lemme 3, il y a au moins une combinaisons dans $\{H_1, \cdots, H_{2\lambda+1}\}$ telle que le nombre de coefficients différents de zéro à (2) est au moins deux. On peut supposer que H_1 est telle combinaison.

Soients

$$\alpha_{1i(1)_1} \neq 0, \cdots, \alpha_{1i(1)_{m_1}} \neq 0 ,$$
$$\alpha_{1i} = 0 \ (i \neq i(1)_1, \cdots, i(1)_{m_1}) \qquad (2 \leqq m_1 \leqq n + 1 - \lambda) .$$

C'est-à-dire,

$$H_1 = \alpha_{1i(1)_1} F_{i(1)_1} + \cdots + \alpha_{1i(1)_{m_1}} F_{i(1)_{m_1}} . \tag{3}$$

Alors, de (3), on obtient

$$\alpha_{1i(1)_m} F_{i(1)_m} = H_1 \Delta_1^m / \Delta_1 \qquad (m = 1, \cdots, m_1) \tag{4}$$

où

$$\Delta_1 = \| F_{i(1)_1}, \cdots, F_{i(1)_{m_1}} \| / F_{i(1)_1} \cdots F_{i(1)_{m_1}}$$

et

$$\Delta_1^m = \frac{\| F_{i(1)_1}, \cdots, F_{i(1)_{m-1}}, H_1, F_{i(1)_{m+1}}, \cdots, F_{i(1)_{m_1}} \|}{F_{i(1)_1} \cdots F_{i(1)_{m-1}} H_1 F_{i(1)_{m+1}} \cdots F_{i(1)_{m_1}}} .$$

De (4), on a l'inégalité

$$\max_{\alpha_{1i} \neq 0} \log |F_i| \leqq \log |H_1| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_1} \right| + \sum_{m=1}^{m_1} \log^+ |\Delta_1^m| + O(1) . \tag{5}$$

Quand $m_1 = n + 1 - \lambda$, en intégrant à régard de θ de 0 jusqu'à 2π, on a l'inégalité suivante d'après les lemmes 1 et 2 comme d'habitude:

$$\begin{aligned} T(r, f) &< N(r, 0, H_1) + m(r, 1/\Delta_1) + \sum_{m=1}^{m_1} m(r, \Delta_1^m) + O(1) \\ &= N(r, 0, H_1) + \sum_{m=1}^{m_1} N(r, 0, F_{i(1)_m}) - N(r, 0, \| F_{i(1)_1}, \cdots, F_{i(t)_{m_1}} \|) + S(r) \\ &\leqq N_{n-\lambda}(r, 0, H_1) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r) . \end{aligned}$$

II. Quand $m_1 < n + 1 - \lambda$, d'après le lemme 3, il y a une combinaison H_k dans $\{H_2, \cdots, H_{2\lambda+1}\}$ et un i tels que

$$H_1 \approx H_k , \quad \alpha_{1i} = 0 , \quad \text{et} \quad \alpha_{ki} \neq 0 ,$$

où la relation "$\approx$" est définie dans [6]. On peut supposer que $H_k = H_2$.

Soient

$$\{i; \alpha_{1i} = 0, \ \alpha_{2i} \neq 0\} = \{i(2)_1, \cdots, i(2)_{m_2}\} ,$$
$$\Delta_2 = \| H_2, F_{i(2)_1}, \cdots, F_{i(2)_{m_2}} \| / H_2 F_{i(2)_1} \cdots F_{i(2)_{m_2}}$$

et

$$\Delta_2^m = \frac{\| H_2, F_{i(2)_1}, \cdots, F_{i(2)_{m-1}}, \tilde{F}_2, F_{i(2)_{m+1}}, \cdots, F_{i(2)_{m_2}} \|}{H_2 F_{i(2)_1} \cdots F_{i(2)_{m-1}} \tilde{F}_2 F_{i(2)_{m+1}} \cdots F_{i(2)_{m_2}}}$$

où

$$\tilde{F}_2 \equiv -\sum_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0\\ \alpha_{2i}\neq 0}} \alpha_{2i}F_i = -H_2 + \sum_{\substack{\alpha_{1i}=0\\ \alpha_{2i}\neq 0}} \alpha_{2i}F_i \,. \tag{6}$$

On note que

$$\{i;\, \alpha_{1i}\neq 0, \alpha_{2i}\neq 0\} \neq \phi \quad \text{et} \quad \tilde{F}_2 \not\equiv 0$$

parce que $H_1 \approx H_2$. Alors, on obtient

$$\alpha_{2i(2)_m}F_{i(2)_m} = \tilde{F}_2\Delta_2^m/\Delta_2 \qquad (m = 1, \cdots, m_2)\,. \tag{7}$$

De (7), on a l'inégalité

$$\max_{\substack{\alpha_{1i}=0\\ \alpha_{2i}\neq 0}} \log|F_i| \leqq \log|\tilde{F}_2| + \log^+\left|\frac{1}{\Delta_2}\right| + \sum_{m=1}^{m_2}\log^+|\Delta_2^m| + O(1) \tag{8}$$

et de (6)

$$\log|\tilde{F}_2| \leqq \max_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0\\ \alpha_{2i}\neq 0}} \log|F_i| + O(1) \leqq \max_{\alpha_{1i}\neq 0} \log|F_i| + O(1)\,. \tag{9}$$

Quand $m_1 + m_2 = n + 1 - \lambda$, de (5), (8) et (9), on a

$$\max_{1\leqq i\leqq n+1-\lambda} \log|F_i| \leqq \log|H_1| + \log^+\left|\frac{1}{\Delta_1}\right| + \log^+\left|\frac{1}{\Delta_2}\right| + \sum_{m=1}^{m_1}\log^+|\Delta_1^m|$$
$$+ \sum_{m=1}^{m_2}\log^+|\Delta_2^m| + O(1)\,,$$

de sorte qu'en intégrant à régard de θ de 0 jusqu'à 2π on obtient l'inégalité suivante d'après les lemmes 1 et 2:

$$\begin{aligned}
T(r,f) &< N(r,0,H_1) + m(r,1/\Delta_1) + m(r,1/\Delta_2)\\
&\quad + \sum_{m=1}^{m_1} m(r,\Delta_1^m) + \sum_{m=1}^{m_2} m(r,\Delta_2^m) + O(1)\\
&= N(r,0,H_1) + N(r,0,H_2) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N(r,0,F_i)\\
&\quad - N(r,0,\|F_{i(1)_1},\cdots,F_{i(1)_{m_1}}\|) - N(r,0,\|H_2,F_{i(2)_1},\cdots,F_{i(2)_{m_2}}\|) + S(r)
\end{aligned}$$

et en tenant compte de la multiplicité des zéros de $H_1, H_2, F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$

$$\leqq N_{n-\lambda}(r,0,H_1) + N_{n-\lambda}(r,0,H_2) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r,0,F_i) + S(r)\,.$$

III. Quand $m_1 + m_2 < n + 1 - \lambda$, d'après le lemme 3, il y a au moins une H_j dans $\{H_3, \cdots, H_{2\lambda+1}\}$ et un i tels que

$$H_1 \approx H_j \quad \text{ou} \quad H_2 \approx H_j$$

et

$$\alpha_{1i} = 0\,, \quad \alpha_{2i} = 0\,, \quad \alpha_{ji} \neq 0\,.$$

On peut supposer que $H_j = H_3$. Soient

$$\{i; \alpha_{i1} = \alpha_{2i} = 0, \alpha_{3i} \neq 0\} = \{i(3)_1, \cdots, i(3)_{m_3}\}\,,$$
$$\Delta_3 = \|H_3, F_{i(3)_1}, \cdots, F_{i(3)_{m_3}}\| / H_3 F_{i(3)_1} \cdots F_{i(3)_{m_3}}\,,$$
$$\Delta_3^m = \frac{\|H_3, F_{i(3)_1}, \cdots, F_{i(3)_{m-1}}, \tilde{F}_3, F_{i(3)_{m+1}}, \cdots, F_{i(3)_{m_3}}\|}{H_3 F_{i(3)_1} \cdots F_{i(3)_{m-1}} \tilde{F}_3 F_{i(3)_{m+1}} \cdots F_{i(3)_{m_3}}}$$

où

$$\tilde{F}_3 \equiv - \sum_{\substack{\alpha_{3i}\neq 0 \\ \alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0}} \alpha_{3i} F_i = -H_3 + \sum_{\substack{\alpha_{3i}\neq 0 \\ \alpha_{1i}=\alpha_{2i}=0}} \alpha_{3i} F_i\,.$$

Parce que $H_1 \approx H_2$ ou $H_2 \approx H_3$,

$$\{i; \alpha_{3i} \neq 0, |\alpha_{1i}| + |\alpha_{2i}| \neq 0\} \neq \phi \quad \text{et} \quad \tilde{F}_3 \not\equiv 0\,.$$

Alors, on a

$$\alpha_{3i(3)_m} F_{i(3)_m} = \tilde{F}_3 \Delta_3^m / \Delta_3 \qquad (m = 1, \cdots, m_3)$$

et de cela, on a

$$\max_{\substack{\alpha_{3i}\neq 0 \\ \alpha_{1i}=\alpha_{2i}=0}} \log|F_i| \leqq \log|\tilde{F}_3| + \log^+ \left|\frac{1}{\Delta_3}\right| + \sum_{m=1}^{m_3} \log^+ |\Delta_3^m| + O(1) \tag{10}$$

et

$$\log|\tilde{F}_3| \leqq \max_{\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0} \log|F_i| + O(1)\,. \tag{11}$$

Des inégalités (5), (8), (9), (10) et (11), on a

$$\max_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0 \\ \text{ou } \alpha_{3i}\neq 0}} \log|F_i| \leqq \log|H_1| + \sum_{k=1}^{3} \log^+ \left|\frac{1}{\Delta_k}\right| + \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{m_k} \log^+ |\Delta_k^m| + O(1)\,.$$

Quand $m_1 + m_2 + m_3 = n + 1 - \lambda$, en considérant que

$$\{i; \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{3i} \neq 0\} = \{1, 2, \cdots, n + 1 - \lambda\}\,,$$

on a l'inégalité suivante comme dans II:

$$T(r, f) < \sum_{k=1}^{3} N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r)\,.$$

IV. En general, en tenant compte du lemme 3, il existe un nombre s $(1 \leqq s \leqq 2\lambda + 1)$ tel que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n + 1 - \lambda\,,$$

où $m_1, m_2, \cdots, m_s$ sont définis comme dans I ~ III. Alors,

$$\{F_i;\ \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0 \text{ ou} \cdots \text{ou } \alpha_{si} \neq 0\} = \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda},$$

par conséquent, comme dans III, on a

$$\max_{1\leqq i\leqq n+1-\lambda} \log|F_i| \leqq \log|H_1| + \sum_{k=1}^{s} \log^+ \left|\frac{1}{\varDelta_k}\right| + \sum_{k=1}^{s}\sum_{m=1}^{m_k} \log^+ |\varDelta_k^m| + O(1)$$

et comme dans II,

$$T(r,f) < \sum_{k=1}^{s} N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r)\,. \tag{12}$$

Quand $s < 2\lambda + 1$, en ajoutant

$$\sum_{k=s+1}^{2\lambda+1} N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) \qquad (\geqq 0)$$

à la droite à (12), on a

$$T(r,f) < \sum_{i=1}^{n+\lambda+2} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r)$$

parce que $H_k = F_{n+1-\lambda+k}$ $(k = 1, \cdots, 2\lambda + 1)$.

N.B. 1. En général, on ne peut pas échanger le nombre "$n + \lambda + 2$" pour un autre nombre plus petit. (Voir l'exemple dans [6].)

Pour F dans X, on met

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r,f)}.$$

Quand $\delta(F) > 0$, on dit que F est exceptionnelle au sens de Nevanlinna.

Corollaire. *Pour $F_1, \cdots, F_{n+\lambda+2}$ $n + \lambda + 2$ combinaisons quelconque dans X,*

$$\sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) \leqq n + \lambda + 1$$

([6], *Corollaire* 2).

Ici, on considère le cas où l'égalité est réalisée dans ce corollaire.

Lemme 4. *S'il existent $F_1, \cdots, F_{n+1+\mu}$ dans X telles que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) + \delta(F_{n+1+j}) > n + 1 \qquad (j = 1, \cdots, \mu)\,,$$

alors, $\lambda \geqq \mu$. ([6], *Lemme* 8)

THÉORÈME 2. *Quand* $\lambda > 0$, *s'il existent* $\{F_i\}_{i=1}^{n+\lambda+2}$ *dans* X *telles que*

$$\sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) = n + \lambda + 1 , \tag{13}$$

alors, il existe un i_0 *tel que*

$$\delta(F_{i_0}) = 0 \quad et \quad \delta(F_i) = 1 \quad (i \neq i_0) .$$

Démonstration. On peut supposer sans restriction de généralité:

$$\delta(F_1) \geqq \delta(F_2) \geqq \cdots \geqq \delta(F_{n+\lambda+2}) .$$

Si

$$\delta(F_{n+\lambda+2}) > 0 ,$$

alors,

$$\delta(F_{n+\lambda+1}) < 1 ,$$

Par conséquent, de (13), on a les inégalités suivantes:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) + \delta(F_{n+1+j}) > n + 1 \qquad (j = 1, \cdots, \lambda + 1) .$$

Alors, du Lemme 4,

$$\lambda \geqq \lambda + 1 ,$$

qui est absurde. Cela veut dire qu'il faut

$$\delta(F_{n+\lambda+2}) = 0$$

et de (13),

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n + \lambda + 1) .$$

N.B. 2. Dans ce cas, l'ordre de f est positif entièr ou infini et f est à croissance régulière ([4], Théorème 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5–31.

[2] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[3] C. Sung, Contributions to holomorphic curves in complex manifolds, Thèse 1975.

[4] N. Toda, Sur la croissance de fonctions algébroïdes à valeurs déficientes, Kōdai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 324–337.

[5] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67–95.
[6] ——, Sur quelques combinaison linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, V, Nagoya Math. J., **66** (1977), 37–52.

Université de Nagoya