

## ANNULATION DE GROUPES DE CLASSES REELLES

BERNARD ORIAT

### Introduction

Il est bien connu que le groupe des classes relatives d'une extension abélienne du corps des rationnels est annulé par tout élément entier de l'idéal de Stickelberger. Soit  $\ell$  un nombre premier impair. Nous montrons dans les pages qui suivent qu'un certain groupe de  $\ell$ -classes réelles  $\mathcal{H}(\chi)$ , associé à un caractère  $\chi$  d'ordre  $g$  et considéré comme  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ -module est annulé par la valeur en 1 de la fonction  $L$   $\ell$ -adique:  $L_\ell(1, \chi)$ , ou bien par un multiple bien défini de cette valeur. Pour l'essentiel, la méthode employée consiste à transposer par "Spiegelungssatz" le théorème d'annulation de Stickelberger. Cette méthode a été introduite par Georges Gras dans [3]. La démonstration donnée ici semble un peu plus simple et le résultat obtenu plus général: on ne fait plus ici l'hypothèse " $\ell$  premier à  $g$ ".

### 1. Notations et définitions

On désigne par  $\ell$  un nombre premier impair. Soit  $\chi$  un caractère résiduel d'ordre  $g$  et de conducteur  $f$ , réel, différent du caractère unité. On note  $K/\mathbf{Q}$  l'extension cyclique, de corps de base le corps des rationnels  $\mathbf{Q}$ , correspondant à  $\chi$ . Nous voulons dire par là, que si l'on considère  $\chi$  comme un homomorphisme de  $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{(f)}/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$  dans le groupe des racines  $g^{\text{ème}}$  de l'unité, alors le noyau de  $\chi$  est le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{(f)}/K)$ . On désigne par  $G$  le groupe de Galois de  $K/\mathbf{Q}$ . Le caractère  $\chi$  peut aussi être considéré comme un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathbf{Q}_\ell^{(g)*}$ , groupe multiplicatif du corps  $\mathbf{Q}_\ell^{(g)}$ ; ce corps est le corps obtenu en ajoutant au corps  $\ell$ -adique  $\mathbf{Q}_\ell$ , les racines  $g^{\text{ème}}$  de l'unité. On désigne par  $\chi_1$  le prolongement  $\mathbf{Z}_\ell$ -linéaire de  $\chi$  à  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ . Le noyau de  $\chi_1$  est un idéal de  $\mathbf{Z}_\ell[G]$  qui peut être défini à l'aide d'un idempotent de l'algèbre  $\mathbf{Q}_\ell[G]$  de la façon suivante: Soit  $\psi$  le caractère  $\ell$ -adique issu de  $\chi$ , c'est-à-dire la trace de  $\chi$  dans l'extension

---

Received April 26, 1979.

$\mathbf{Q}_\ell^{(g)}/\mathbf{Q}_\ell$ . Soit  $1_\psi = (1/|G|) \sum_{\tau \in G} \psi(\tau^{-1})\tau$  l'idempotent de  $\mathbf{Q}_\ell[G]$  associé à  $\psi$ . Alors  $\text{Ker } \chi_1$  est l'ensemble des  $x$  de  $\mathbf{Z}_\ell[G]$  tels que  $x1_\psi = 0$ . Une autre façon de définir  $\text{Ker } \chi_1$  est utilisée dans la suite: désignons par  $\sigma$  un générateur de  $G$  et par  $P(Y)$  le polynôme  $\prod (Y - \chi(\sigma)^u)$ ,  $u$  parcourant le groupe  $\text{Gal}(\mathbf{Q}_\ell^{(g)}/\mathbf{Q}_\ell)$ . Il s'agit du polynôme cyclotomique  $\ell$ -adique ayant  $\chi(\sigma)$  comme racine. L'idéal  $\text{Ker } \chi_1$  est l'idéal de  $\mathbf{Z}_\ell[G]$  engendré par  $P(\sigma)$ . Remarquons aussi que  $\chi_1$  a pour image  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ , anneau des entiers de  $\mathbf{Q}_\ell^{(g)}$ . On a donc un isomorphisme d'anneaux entre  $\mathbf{Z}_\ell[G]/\text{Ker } \chi_1$  et  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ . Cet isomorphisme fait correspondre à la classe de  $\sum_{\tau \in G} a_\tau \tau$  modulo  $\text{Ker } \chi_1$ , l'élément  $\sum_{\tau \in G} a_\tau \chi(\tau)$  de  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ . Ainsi tout  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -module annihilé par  $\text{Ker } \chi_1$  peut être considéré comme un  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ -module.

D'une façon générale, dans toute la suite, si  $A/B$  est une extension galoisienne et si  $C$  est un corps intermédiaire tel que  $A/C$  soit abélienne, et  $C/B$  galoisienne, on entend par opération de  $\text{Gal}(C/B)$  sur  $\text{Gal}(A/C)$ , l'opération conjugaison ainsi notée: Si  $u$  appartient à  $\text{Gal}(A/C)$  et si  $\tau$  appartient à  $\text{Gal}(C/B)$ , alors  $u^\tau$  est égal à  $t^{-1}ut$ , où  $t$  est un prolongement de  $\tau$  à  $A$ . Précisons de plus que si  $a$  appartient à  $A$ , on désigne par  $a^u$  l'image de  $a$  par  $u$  et, en conséquence, la composition des automorphismes  $u$  et  $v$  de  $A$  est notée suivant la convention  $a^{(uv)} = (a^u)^v$ .

Soit  $U/K$  la  $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K$ , non ramifiée en dehors de  $\ell$ . Le groupe de Galois  $\text{Gal}(U/K)$  est un  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -module. Soit  $K_\infty$  la  $\mathbf{Z}_\ell$ -extension maximale de  $K$  (Comme  $K$  est réel, il s'agit donc de la  $\mathbf{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $K$ ). On sait que  $\text{Gal}(U/K_\infty)$  est le sous-module de torsion de  $\text{Gal}(U/K)$  et qu'il est fini. Nous désignons par  $\mathcal{H}(\chi)$  le  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -module quotient  $\text{Gal}(U/K_\infty)/\text{Gal}(U/K_\infty)^{P(\sigma)}$ . Il s'agit donc d'un  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ -module.

## 2. Énoncé des résultats obtenus

Rappelons que  $\chi$  est un caractère réel, différent du caractère unité et que  $g$  est son ordre.

**THÉORÈME A.** *Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $\mathcal{H}(\chi)$  est annihilé en tant que  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ -module par  $L_\ell(1, \chi)$ , valeur en 1 de la fonction  $L$   $\ell$ -adique relative à  $\chi$ .*

**THÉORÈME B.** *Si  $g$  est une puissance de  $\ell$  et si  $\zeta_g$  est une racine primitive  $g^{\text{ème}}$  de 1, alors  $\mathcal{H}(\chi)$  est annihilé par  $(1 - \zeta_g)L_\ell(1, \chi)$ .*

### 3. Démonstration des théorèmes

Soit  $N$  le corps intermédiaire entre  $U$  et  $K$  tel que  $\text{Gal}(U/N) = \text{Gal}(U/K)^{P(\sigma)}$ . Ainsi  $N/K$  est la  $\ell$ -extension abélienne, non ramifiée sauf en  $\ell$ , maximale telle que  $N/\mathbf{Q}$  soit galoisienne et  $\text{Gal}(N/K)$  soit annulé par  $P(\sigma)$ . Soit, pour tout entier  $n$ ,  $\mathbf{Q}_n$  le sous-corps de  $\mathbf{Q}^{(\ell^n)}$  défini par  $[\mathbf{Q}^{(\ell^n)} : \mathbf{Q}_n] = \ell - 1$ . Pour tout corps  $A$ , on pose  $A_i = A\mathbf{Q}_i$ . On désigne par  $\mathbf{Q}_\infty = \bigcup_{i \geq 1} \mathbf{Q}_i$  et  $K_\infty = \bigcup_{i \geq 1} K_i = K\mathbf{Q}_\infty$  les  $\mathbf{Z}_\ell$ -extensions cyclotomiques de  $\mathbf{Q}$  et  $K$ . Soit  $n_0$  l'entier non nul défini par  $\mathbf{Q}_{n_0} = \mathbf{Q}_\infty \cap K$ . On a donc  $K_{n_0} = K \neq K_{n_0+1}$ .

**PROPOSITION 3.1.** *Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , l'intersection  $N \cap K_\infty$  est égale à  $K$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$  alors  $N \cap K_\infty$  est égal à  $K_{n_0+1}$ . Dans tous les cas,  $\mathcal{H}(\chi)$  est isomorphe, en tant que  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ -module, à  $\text{Gal}(N/N \cap K_\infty)$ .*

*Démonstration.* Comme l'extension  $N \cap K_\infty/\mathbf{Q}$  est abélienne, le  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -module  $\text{Gal}(N \cap K_\infty/K)$  est annulé par  $\sigma - 1$  et  $P(\sigma)$ . Donc il est annulé par  $P(1)$ . Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $P(1)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_\ell$  et  $N \cap K_\infty = K$ . Si par contre,  $g$  est une puissance de  $\ell$ , alors  $P(1) = \ell$  et le degré  $[N \cap K_\infty : K]$  ne peut excéder  $\ell$ . Nous avons donc  $N \cap K_\infty \subset K_{n_0+1}$ . D'autre part, l'extension  $K_{n_0+1}/\mathbf{Q}$  est abélienne et  $\text{Gal}(K_{n_0+1}/K)$  est annulé par  $\sigma - 1$  et  $\ell = P(1)$ , donc par  $P(\sigma)$ . Ainsi, on a  $K_{n_0+1} = N \cap K_\infty$ .

Démontrons maintenant l'égalité  $\text{Gal}(U/K)^{P(\sigma)} \cap \text{Gal}(U/K_\infty) = \text{Gal}(U/K_\infty)^{P(\sigma)}$ . Soit  $h$  un élément de  $\text{Gal}(U/K)$  et supposons que  $h^{P(\sigma)}$  appartienne à  $\text{Gal}(U/K_\infty)$ . Comme  $\text{Gal}(U/K_\infty)$  est le sous-module de torsion de  $\text{Gal}(U/K)$ , il existe un entier  $k$  tel que  $h^{kP(\sigma)} = 1$ . Mais  $K_\infty/\mathbf{Q}$  est abélienne et  $h^{kP(1)}$  appartient à  $\text{Gal}(U/K_\infty)$ . Donc  $h$  appartient lui-même à  $\text{Gal}(U/K_\infty)$ . Nous en déduisons les égalités et isomorphismes:  $\mathcal{H}(\chi) = \text{Gal}(U/K_\infty)/\text{Gal}(U/K_\infty)^{P(\sigma)} = \text{Gal}(U/K_\infty)/(\text{Gal}(U/K)^{P(\sigma)} \cap \text{Gal}(U/K_\infty)) \simeq (\text{Gal}(U/K)^{P(\sigma)} \text{Gal}(U/K_\infty))/\text{Gal}(U/K)^{P(\sigma)} = \text{Gal}(U/N \cap K_\infty)/\text{Gal}(U/N) \simeq \text{Gal}(N/N \cap K_\infty)$ . Ce qui termine la démonstration de la proposition 3.1.

Soit  $n$  un entier non nul. Définissons  $N^n$  comme le corps intermédiaire entre  $N$  et  $N \cap K_\infty$  maximal tel que  $\text{Gal}(N^n/N \cap K_\infty)$  soit d'exposant divisant  $\ell^n$ . Alors  $\mathcal{H}(\chi)/\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$  est isomorphe en tant que  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ -module à  $\text{Gal}(N^n/N \cap K_\infty)$ . Introduisons  $L$ , corps obtenu en ajoutant à  $K$  les racines  $\ell^{\text{ème}}$  de 1, c'est-à-dire  $L = K\mathbf{Q}^{(\ell)}$ , et  $M^n = N^n L = N^n \mathbf{Q}^{(\ell)}$ . Nous avons alors

$M_n^n = M^n \mathbf{Q}_n = N^n L_n = N^n \mathbf{Q}^{(\ell^n)}$ . Soit  $G_n$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(L_n/\mathbf{Q})$ . Il est clair que tous les  $G$ -modules introduits précédemment peuvent également être considérés comme des  $G_n$ -modules.

**PROPOSITION 3.2.** *On suppose que  $n$  est un entier non nul. Si  $g$  est une puissance de  $\ell$ , on suppose de plus  $n$  supérieur à  $n_0 + 1$ . Alors  $\mathcal{H}(\chi)/\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$  est isomorphe en tant que  $G_n$ -module à  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ .*

*Démonstration.* Nous avons  $M_n^n = N^n L_n$ . D'autre part, on vérifie l'égalité  $N^n \cap L_n = N \cap K_\infty$ . On en déduit l'isomorphisme  $\text{Gal}(M_n^n/L_n) \simeq \text{Gal}(N^n/N \cap K_\infty)$ ; d'où le résultat en utilisant la proposition 3.1.

L'extension  $M_n^n/L_n$  est une extension de Kummer d'exposant divisant  $\ell^n$ . Nous notons  $W_n$  son radical, c'est-à-dire:  $W_n = \{w; w \in L_n; \ell^n \sqrt{w} \in M_n^n\}$ . Le groupe  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$  est évidemment un  $G_n$ -module et en tant que groupe il est isomorphe à  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ . Les structures de  $G_n$ -modules de ces deux groupes sont liées par l'involution du miroir que nous allons rappeler:

Soit  $A_n = \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}$  l'anneau des classes résiduelles d'entiers modulo  $\ell^n$  et  $A_n^*$  son groupe multiplicatif. Si  $\xi_n$  est une racine primitive ( $\ell^n$ )<sup>ème</sup> de 1, alors on note  $\chi^*$  l'homomorphisme de  $G_n$  dans  $A_n^*$  défini par  $\xi_n^\tau = \xi_n^{\chi^*(\tau)}$ . Si  $x = \sum_{\tau \in G} a_\tau \tau$  est un élément de  $A_n[G_n]$ , on pose  $\bar{x} = \sum_{\tau \in G} a_\tau \chi^*(\tau) \tau^{-1}$ . L'application de l'algèbre  $A_n[G_n]$  dans elle-même qui à  $x$  fait correspondre  $\bar{x}$  est un automorphisme involutif de  $A_n[G_n]$  que l'on appelle: "involution du miroir". Les groupes  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$  et  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$  sont des  $A_n[G_n]$ -modules et leurs structures sont liées par la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.3.** *Les annulateurs, dans  $A_n[G_n]$ , de  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$  et  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$  sont images l'un de l'autre par l'involution du miroir.*

Nous ne réécrivons pas ici la démonstration de la "Spiegelungsrelation" d'où provient ce résultat. On peut consulter [4] ou [5].

Introduisons  $n_1$  et  $f_0$  définis par l'égalité  $f = \ell^{n_1} f_0$ ,  $f_0$  étant premier à  $\ell$  et  $f$  désignant le conducteur de  $\chi$  (On a donc  $n_1 \geq n_0$  sauf si  $n_1 = 0$  et  $n_0 = 1$ ). Posons  $f_n = \ell^n f_0$  et supposons désormais  $n$  supérieur à  $n_1$ . Alors  $f_n$  est le conducteur de  $L_n$ . On désigne par  $(L_n/a)$  le symbole d'Artin attaché à l'extension  $L_n/\mathbf{Q}$ ,  $a$  étant un entier premier à  $f_n$ . On considère l'élément de  $\mathbf{Q}_\ell[G_n]$  défini par  $s_n = (1/f_n) \sum_a a(L_n/a)^{-1}$ , la somme étant étendue aux entiers  $a$  de 1 à  $f_n$  et premiers à  $f_n$ . Rappelons le théorème de Stickelberger: l'idéal  $s_n \mathbf{Z}_\ell[G_n] \cap \mathbf{Z}_\ell[G_n]$  de  $\mathbf{Z}_\ell[G_n]$  annule le groupe des  $\ell$ -classes

d'idéaux (au sens ordinaire) de  $L_n$ . D'autre part nous utilisons également un élément  $s'_n$  défini par:  $s'_n = s_n - 1/2 \sum_a (L_n/a)$ , cette somme étant étendue aux entiers  $a$  de 1 à  $f_n$  et premiers à  $f_n$ . Si  $b$  est un entier premier à  $f_n$ , nous posons  $y_n = (1 - b(L_n/b)^{-1})s_n$  et  $y'_n = (1 - b(L_n/b)^{-1})s'_n$ . La première quantité appartient à  $Z[G_n]$  et en imposant à  $b$  d'être impair,  $y'_n$  est aussi dans  $Z[G_n]$ ; ce que nous supposons dans la suite.

PROPOSITION 3.4. *On suppose toujours que  $n$  est un entier non nul, supérieur à  $n_1$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$ , supposons de plus  $n$  supérieur à  $n_0 + 1$ . Alors  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$  est annulé par  $y'_n$ .*

*Démonstration.* Soit  $w$  un élément de  $W_n$ . Comme l'extension  $L_n(\sqrt[n]{w})/L_n$  est non ramifiée, sauf en  $\ell$ , l'idéal de  $L_n$  engendré par  $w$  est de la forme  $\alpha^{\ell^n}\mathfrak{b}$ , où  $\alpha$  est un idéal de  $L_n$  premier à  $\ell$  et  $\mathfrak{b}$  un idéal de  $L_n$  dont la décomposition en idéaux premiers ne contient que des idéaux au-dessus de  $\ell$ . Notons  $\mathcal{T}(\ell)$  le groupe des idéaux engendré par les idéaux premiers de  $L_n$  au-dessus de  $\ell$ , et  $D$  le groupe de décomposition de  $\ell$  dans  $L_n/\mathbf{Q}$ . Le groupe  $\mathcal{T}(\ell)$  est un  $Z[G_n]$ -module et plus précisément un  $Z[G_n/D]$ -module. Considérons l'élément  $s'_n$  de  $\mathbf{Q}[G_n]$ . Sa restriction à  $\mathbf{Q}[G_n/D]$  est nulle d'après le théorème II 3 de [2]. Il en sera de même de la restriction de  $y'_n$  à  $Z[G_n/D]$  et  $y'_n$  annule le groupe  $\mathcal{T}(\ell)$ . Nous avons donc  $\mathfrak{b}^{y'_n} = 1$ .

D'autre part, on déduit du théorème de Stickelberger que  $\alpha^{y'_n}$  est principal. Il existe donc un élément  $u$  dans  $L_n$  et une unité  $\varepsilon$  de  $L_n$  tels que  $w^{y'_n} = u^{\ell^n}\varepsilon$ .

Introduisons maintenant la conjugaison complexe  $\sigma_\infty$  de  $G_n$ . Puisque  $K$  est réel,  $\sigma_\infty$  appartient à  $\text{Gal}(L_n/K)$  et  $\sigma_\infty - 1$  annule  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ . Mais  $\chi^*(\sigma_\infty) = -1$  et l'image de  $\sigma_\infty - 1$  par l'involution du miroir est  $-(\sigma_\infty + 1)$ . On déduit de la proposition 3.2 que  $\sigma_\infty + 1$  annule  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$ . Cela implique que  $\varepsilon^{\sigma_\infty+1}$  est une puissance  $(\ell^n)^{\text{ème}}$  d'un élément de  $L_n$ , donc finalement d'une unité de  $L_n$ . Considérons le groupe des unités  $E$  de  $L_n$  et le quotient  $\mathcal{E} = E/E^{\ell^n}$ . Ce groupe se décompose en produit direct sous la forme:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(\ell^n+1)/2}\mathcal{E}^{(\ell^n-1)/2}$ . Le premier facteur s'identifie par injection canonique à  $E_0/E_0^{\ell^n}$ , où  $E_0$  est le groupe des unités du sous-corps réel maximal de  $L_n$ . Le deuxième est cyclique, engendré par la classe d'une racine de l'unité. Ainsi, si  $\varepsilon^{\sigma_\infty+1}$  appartient à  $E^{\ell^n}$ , alors  $\varepsilon$  est, modulo  $E^{\ell^n}$ , une racine de l'unité. Nous aurons donc  $w^{y'_n} = v^{\ell^n}\zeta$ , avec  $v$  dans  $L_n$  et  $\zeta$  racine de l'unité appartenant à  $L_n$ . Comme  $n \geq n_1$ , nous avons  $L_n \neq L_{n+1}$  et  $\zeta^{\ell^n} = 1$ . Ceci montre que les racines  $(\ell^n)^{\text{ème}}$  de  $w^{y'_n}$  appartiennent à  $M_n^n \cap L_{2n}$ .

Il reste à calculer cette intersection: Nous avons  $M_n^n \cap L_{2n} = (L_n N^n) \cap L_{2n} = L_n(N^n \cap L_{2n})$ . Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , on a  $N^n \cap L_{2n} = K$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$ , alors  $N^n \cap L_{2n} = K_{n_0+1}$ . D'où l'on déduit  $M_n^n \cap L_{2n} = L_n K$  ou  $L_n K_{n_0+1}$  suivant les cas. Mais si  $g$  est une puissance de  $\ell$ , on a supposé  $n \geq n_0 + 1$ . Nous avons donc dans tous les cas  $M_n^n \cap L_{2n} = L_n$ . Ainsi  $w^{y'_n}$  appartient à  $(L_n^*)^{\ell^n}$ ; ce qui démontre la proposition 3.4.

Introduisons maintenant les éléments de  $\mathcal{Q}_\ell[G_n]$ :

$$x_n = \left( (1 - b^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{b} \right) \right) (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{a} \right),$$

$$x'_n = x_n - \frac{1}{2} (1 - b) \sum_a a \left( \frac{L_n}{a} \right)^{-1}.$$

L'entier  $b$  est le même que précédemment. Il est seulement pour l'instant supposé premier à  $f_n$  et impair. L'indicateur d'Euler est noté  $\varphi$  et  $\sum_a$  désigne la somme sur les entiers  $a$ , de 1 à  $f_n$ , premiers à  $f_n$ .

**PROPOSITION 3.5.** *Les éléments  $x_n$  et  $y_n$  appartiennent à  $Z_\ell[G_n]$ . Leurs résidus modulo  $\ell^n$  sont des éléments de  $A_n[G_n]$ , images l'un de l'autre par l'involution du miroir.*

*Démonstration.* Le symbole  $\sum_a$  désigne la somme sur les entiers  $a$ , de 1 à  $f_n$ , premiers à  $f_n$ . On peut écrire:

$$x_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \left( \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{a} \right) - \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{b} \right) \left( \frac{L_n}{a} \right) \right).$$

Définissons  $a'$  par  $\begin{cases} ba' \equiv a \pmod{f_n} \\ 1 \leq a' \leq f_n \end{cases}$ . Il est clair que  $a \rightarrow a'$  réalise une permutation de l'ensemble des entiers premiers à  $f_n$  et compris entre 1 et  $f_n$ . Nous aurons donc:

$$x_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \left( \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{a} \right) - \sum_a a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)} \left( \frac{L_n}{b} \right) \left( \frac{L_n}{a'} \right) \right)$$

d'où

$$x_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a [a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)}] \left( \frac{L_n}{a} \right).$$

Il apparaît clairement dans cette écriture que  $x_n$  appartient à  $Z_\ell[G_n]$ . Mais  $\chi^*(L_n/a)$  est le résidu modulo  $\ell^n$  de  $a$ . Donc l'image du résidu modulo  $\ell^n$

de  $x_n$  par l'involution du miroir est le résidu modulo  $\ell^n$  de  $\bar{x}_n$  défini par:

$$\bar{x}_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a a [a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)}] \left( \frac{L_n}{a} \right)^{-1}.$$

Calculons maintenant la quantité entre crochets: Nous pouvons écrire:

$$a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)} = (a - a'b) A$$

avec

$$A = a^{\varphi(\ell^n)-1} + a'b a^{\varphi(\ell^n)-2} + \dots + (a'b)^{\varphi(\ell^n)-1}.$$

Mais si  $a'b = a + \lambda \ell^n$ , nous avons alors

$$(a'b)^i = a^i + i a^{i-1} \lambda \ell^n + \dots \equiv a^i + i a^{i-1} \lambda \ell^n \pmod{(\ell^{2n})}.$$

Remplaçons dans  $A$ : nous obtenons alors

$$A \equiv \varphi(\ell^n) a^{\varphi(\ell^n)-1} + a^{\varphi(\ell^n)-2} (1 + 2 + \dots + (\varphi(\ell^n) - 1)) \lambda \ell^n \pmod{(\ell^{2n})}.$$

D'où

$$A \equiv \varphi(\ell^n) a^{\varphi(\ell^n)-1} \pmod{(\ell^{2n-1})}$$

et

$$A/\varphi(\ell^n) \equiv a^{\varphi(\ell^n)-1} \pmod{(\ell^n)}$$

et enfin

$$aA/\varphi(\ell^n) \equiv a^{\varphi(\ell^n)} \equiv 1 \pmod{(\ell^n)}.$$

Nous obtenons donc:  $\bar{x}_n \equiv (1/f_n) \sum_a (a - a'b)(L_n/a)^{-1} \pmod{(\ell^n)}$ .

Il reste à constater que cette dernière quantité n'est autre que  $y_n$ . En effet, on a:  $y_n = (1 - b(L_n/b)^{-1})(1/f_n) \sum_a a(L_n/a)^{-1} = (1/f_n)(\sum_a a(L_n/a)^{-1} - \sum_a ab(L_n/a)^{-1}(L_n/b)^{-1})$ . Nous raisonnons alors de la même façon qu'au début de la démonstration: on peut remplacer dans la dernière somme  $a$  par  $a'$  et on obtiendra:

$$\begin{aligned} y_n &= (1/f_n) \left( \sum_a a \left( \frac{L_n}{a} \right)^{-1} - \sum_a a'b \left( \frac{L_n}{a'} \right)^{-1} \left( \frac{L_n}{b} \right)^{-1} \right) \\ &= (1/f_n) \sum_a (a - a'b) \left( \frac{L_n}{a} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

**PROPOSITION 3.6.** *On suppose toujours que  $n$  est un entier non nul, supérieur à  $n_1$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$ , on suppose de plus que  $n$  est*

supérieur à  $n_0 + 1$ . Alors le groupe de Galois  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ , considéré comme  $Z_i[G_n]$ -module, est annulé par  $x'_n$ .

*Démonstration.* Les résidus modulo  $\ell^n$  de  $\sum_a (L_n/a)$  et  $\sum_a a(L_n/a)^{-1}$  se correspondent par l'involution du miroir. On déduit donc de la proposition précédente (3.5) que les résidus de  $x'_n$  et  $y'_n$  se correspondent par l'involution du miroir. On déduit alors des propositions 3.3 et 3.4 que  $x'_n$  annule  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ .

*Remarque.* On peut constater que  $\sum_a a(L_n/a)^{-1}$  annule  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$  et en déduire que  $x_n$  annule  $\text{Gal}(M_n^n/L_n)$ . D'où finalement, on constate que  $y_n$  annule  $W_n/(L_n^*)^{\ell^n}$ . Pourquoi avoir introduit  $s'_n, x'_n, y'_n$ ? Uniquement à cause de l'annulation de l'idéal  $\mathfrak{b}$  au cours de la démonstration de la proposition 3.3. En effet, nous avons vu à ce niveau que  $\mathfrak{b}^{y'_n} = 1$ . Il ne nous a pas semblé très simple de montrer directement que  $\mathfrak{b}^{y'_n}$  est la puissance  $(\ell^n)^{\text{ème}}$  d'un idéal principal.

Introduisons la notation suivante:  $S_n$  est l'élément de  $\mathbf{Q}_i^{(g)}$  défini par  $S_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \chi(a)$ . La somme est étendue aux entiers  $a$ , compris entre 1 et  $f_n$  et premiers à  $f_n$ . D'autre part, on considère dans la suite  $\chi$  comme un caractère de  $G_n$  ou de  $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{(f_n)}/\mathbf{Q})$ . La valeur  $\chi(a)$  est par définition égale à  $\chi(L_n/a)$ ; cela provient de l'identification de  $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{(f_n)}/\mathbf{Q})$  et de  $(Z/f_n Z)^*$ .

**PROPOSITION 3.7.** *Supposons que  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ . Soit  $n$  un entier non nul, supérieur à  $n_1$ . Alors  $S_n$  appartient à  $Z_i^{(g)}$  et annule le  $Z_i^{(g)}$ -module  $\mathcal{H}(\chi)/\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ .*

*Démonstration.* Imposons de plus à l'entier  $b$  la condition suivante:  $\chi(b)$  est une racine de 1 d'ordre non puissance de  $\ell$ . Nous avons  $\chi_1(x_n) = (1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)) S_n$  et  $1 - \chi(b)$  est une unité de  $Z_i^{(g)}$ . Mais nous avons  $1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b) \equiv 1 - \chi(b) \pmod{(\ell^n)}$  et  $1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)$  est une unité de  $Z_i^{(g)}$ . Comme  $x_n$  appartient à  $Z_i[G_n]$ ,  $\chi_1(x_n)$  appartient à  $Z_i^{(g)}$  et  $S_n$  également.

D'autre part, on déduit des propositions 3.2 et 3.6 que  $x'_n$  annule  $\mathcal{H}(\chi)/\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ . En termes de  $Z_i^{(g)}$ -modules, cela veut dire que  $\chi_1(x'_n)$  annule  $\mathcal{H}(\chi)/\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ .

Il reste donc à vérifier que  $\chi_1(x_n) = \chi_1(x'_n)$ . En effet,  $\chi_1(x_n - x'_n) = 1/2(1 - b) \sum_a a \chi(a)^{-1}$ . Comme  $\chi$  est un caractère réel, on a  $\chi(a) = \chi(f_n - a)$  et on en déduit  $\chi_1(x'_n - x_n) = 0$ . Nous avons démontré la proposition.

Nous pouvons maintenant justifier le théorème A: en effet, le groupe  $\mathcal{H}(\chi)$  est fini. Donc si  $n$  est assez grand,  $\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$  est égal à 1 et  $\mathcal{H}(\chi)$  est annulé par  $S_n$ . Il reste alors à utiliser l'approximation  $\ell$ -adique de  $L_\ell(1, \chi)$  telle qu'elle est donnée par Fresnel dans [1]. On a  $-L_\ell(1, \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Donc  $L_\ell(1, \chi)$  annule  $\mathcal{H}(\chi)$ .

**PROPOSITION 3.8.** *Supposons que  $g$  est une puissance de  $\ell$ . Soit  $n$  un entier supérieur à  $n_1$  et  $n_0 + 1$ . Soit  $\zeta_g$  une racine primitive  $g^{\text{ème}}$  de 1. Alors  $(1 - \zeta_g)S_n$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$  et annule le  $Z_\ell^{(g)}$ -module  $\mathcal{H}(\chi)|\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ .*

*Démonstration.* Nous imposons maintenant à  $b$  de vérifier la condition suivante:  $\chi(b)$  est une racine primitive de 1, d'ordre  $g$ . Alors, les idéaux de  $Z_\ell^{(g)}$  engendrés par  $1 - \chi(b)$  et  $1 - \zeta_g$  sont les mêmes: à savoir l'idéal maximal de  $Z_\ell^{(g)}$ . On déduit de la congruence  $1 - b^{\varphi(\ell^n)}\chi(b) \equiv 1 - \chi(b) \pmod{(\ell^n)}$ , que  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)}\chi(b))/(1 - \zeta_g)$  est une unité de  $Z_\ell^{(g)}$ . Comme  $x_n$  appartient à  $Z_\ell[G_n]$ ,  $\chi_1(x_n)$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$  et  $(1 - \zeta_g)S_n$  également. Ces deux éléments engendrent dans  $Z_\ell^{(g)}$  le même idéal. D'autre part, on déduit des propositions 3.2 et 3.6 que  $x'_n$  annule  $\mathcal{H}(\chi)|\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ . Ceci implique que  $\chi_1(x'_n)$  annule  $\mathcal{H}(\chi)|\mathcal{H}(\chi)^{\ell^n}$ . On a aussi, comme précédemment,  $\chi_1(x_n) = \chi_1(x'_n)$ . Ceci démontre la proposition 3.8. Le théorème B s'en déduit de la même façon que le théorème A se déduisait de la proposition 3.7.

*Remarque.* Nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 3.7, que si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $S_n$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$ . On peut constater d'autre part, que si  $f$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $S_n$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$ .

*Démonstration.* Pour tout entier  $a$ , premier à  $f_n$ , il existe des entiers  $a'$  et  $a''$  uniques tels que:  $a \equiv a'a'' \pmod{(f_n)}$ ;  $a' \equiv 1 \pmod{(f_0)}$ ;  $a'' \equiv 1 \pmod{(\ell^n)}$ ;  $1 \leq a' < f_n$  et  $1 \leq a'' < f_n$ . Nous aurons donc  $a^{\varphi(\ell^n)} \equiv a'^{\varphi(\ell^n)} a''^{\varphi(\ell^n)} \pmod{(\ell^{2n-1})}$  et on en déduit

$$\sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \chi(a) \equiv \left( \sum_{a'} a'^{\varphi(\ell^n)} \chi(a') \right) \left( \sum_{a''} a''^{\varphi(\ell^n)} \chi(a'') \right) \pmod{(\ell^{2n-1})}.$$

La première somme est étendue aux entiers  $a$ , de 1 à  $f_n$ , premiers à  $f_n$ ; la deuxième aux entiers  $a'$ , de 1 à  $f_n$ , premiers à  $f_n$ , congrus à 1 modulo  $f_0$  et la troisième aux entiers  $a''$ , de 1 à  $f_n$ , premiers à  $f_n$ , congrus à 1 modulo  $\ell^n$ . Considérons la dernière somme: Nous avons

$$a''^{\varphi(\ell^n)} \equiv 1 \pmod{(\ell^{2n-1})}. \text{ Donc } \sum_{a''} a''^{\varphi(\ell^n)} \chi(a'') \equiv \sum_{a''} \chi(a'') \pmod{(\ell^{2n-1})}.$$

Mais si  $f_0$  est différent de 1, cette dernière somme est nulle. On a donc  $\sum_a \alpha^{\varphi(\ell^n)} \chi(a) \equiv 0 \pmod{(\ell^{2n-1})}$  et ceci montre que  $S_n$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$ .

#### 4. Dernières remarques

Examinons les approximations de  $L_\ell(1, \chi)$  fournies par les quantités  $S_n$ .

**PROPOSITION 4.1.** *L'entier  $n$  est toujours supposé non nul et supérieur à  $n_1$ . Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors on a la congruence  $S_{n+1} \equiv S_n \pmod{(\ell^n)}$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$  et si  $f$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors on a  $(1 - \zeta_g)S_{n+1} \equiv (1 - \zeta_g)S_n \pmod{(\ell^n)}$ . Si  $f$  et  $g$  sont des puissances de  $\ell$ , on a seulement  $(1 - \zeta_g)^2 S_n \equiv (1 - \zeta_g)^2 S_{n+1} \pmod{(\ell^n)}$ .*

*Démonstration.* On choisit l'entier  $b$  comme il est indiqué dans les démonstrations des propositions 3.7 et 3.8. Ce choix fait pour  $n$ , convient aussi pour  $n + 1$ . Considérons la restriction de  $Z[G_{n+1}]$  à  $Z[G_n]$ . Un calcul élémentaire montre que l'image de  $y'_{n+1}$  par cette restriction est  $y'_n$ ; (Théorème II 3 [2]). D'autre part, si l'on considère la restriction de  $A_{n+1}[G_{n+1}]$  à  $A_n[G_n]$  et les involutions du miroir relatives à  $L_{n+1}/\mathbf{Q}$  et  $L_n/\mathbf{Q}$ , on constate que ces opérations permutent. Il découle de la proposition 3.5 que le résidu modulo  $\ell^n$  de  $x'_n$  coïncide avec le résidu modulo  $\ell^n$  de la restriction de  $x'_{n+1}$  à  $Z_\ell[G_n]$ . Notant de la même façon:  $\chi$ , le caractère  $\chi$  de  $G$ , son prolongement à  $G_n$  et son prolongement à  $G_{n+1}$  et notant de la même façon:  $\chi_1$  les prolongements  $Z_\ell$ -linéaires de  $\chi$  à  $Z_\ell[G_{n+1}]$  et  $Z_\ell[G_n]$ , nous avons donc  $\chi_1(x'_n) \equiv \chi_1(x'_{n+1}) \pmod{(\ell^n)}$ . C'est-à-dire:  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b))S_n \equiv (1 - b^{\varphi(\ell^{n+1})} \chi(b))S_{n+1} \pmod{(\ell^n)}$ . Mais nous avons  $1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b) \equiv 1 - \chi(b) \pmod{(\ell^n)}$  et  $1 - b^{\varphi(\ell^{n+1})} \chi(b) \equiv 1 - \chi(b) \pmod{(\ell^{n+1})}$ . Lorsque  $f$  ou  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , on en déduit à l'aide de la remarque placée à la fin du paragraphe 3, la congruence  $(1 - \chi(b))S_n \equiv (1 - \chi(b))S_{n+1} \pmod{(\ell^n)}$ . Si  $g$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $1 - \chi(b)$  est une unité de  $Z_\ell^{(g)}$ ; d'où  $S_n \equiv S_{n+1} \pmod{(\ell^n)}$ . Si  $g$  est une puissance de  $\ell$  et si  $f$  n'est pas une telle puissance, alors  $(1 - \chi(b))/1 - \zeta_g$  est une unité de  $Z_\ell^{(g)}$ ; d'où  $(1 - \zeta_g)S_n \equiv (1 - \zeta_g)S_{n+1} \pmod{(\ell^n)}$ . Si, enfin,  $f$  et  $g$  sont des puissances de  $\ell$ , alors  $(1 - \zeta_g)S_n$  appartient à  $Z_\ell^{(g)}$  et on obtient alors le résultat annoncé en utilisant les mêmes arguments.

**CONSEQUENCE.** On déduit de la proposition 4.1 la convergence de la suite  $S_n$ . De plus, le résidu modulo  $\ell^n$  de  $L_\ell(1, \chi)$  (ou  $(1 - \zeta_g)L_\ell(1, \chi)$ , ou  $(1 - \zeta_g)^2 L_\ell(1, \chi)$  suivant les cas) est l'opposé du résidu de  $S_n$  (ou  $(1 - \zeta_g)S_n$

ou  $(1 - \zeta_g)^2 S_n$ ). Pour obtenir celui-ci, on peut utiliser le calcul effectué dans la proposition 3.5. En effet, on a, en reprenant les notations adoptées lors de la démonstration de cette proposition:

$$S_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \chi(a)$$

et

$$(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)) S_n = (1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a (a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)}) \chi(a).$$

Mais d'après la proposition 3.5, on a aussi:

$(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)) S_n \equiv (1/f_n) \sum_a a^{-1} (a - a'b) \chi(a) \pmod{\ell^n}$ ; en désignant par  $a^{-1}$  un entier, inverse de  $a$  modulo  $\ell^n$ . Cette formule permet de calculer plus facilement le résidu modulo  $\ell^n$  de  $L_\ell(1, \chi)$ . (G. Gras a dernièrement généralisé ces considérations et obtenu de façon analogue le résidu modulo  $\ell^n$  de  $L_\ell(s, \chi)$ : " Sur la construction des fonctions  $L$   $p$ -adiques abéliennes "; à paraître au Séminaire D.P.P.).

Examinons le cas particulier où  $f$  et  $g$  sont des puissances de  $\ell$ :

**PROPOSITION 4.2.** *Supposons que  $f$  et  $g$  soient tous deux des puissances de  $\ell$ . On a alors  $K = \mathbf{Q}_{n_0} = \mathbf{Q}_{n_1}$ . Le corps  $N$  est égal à  $\mathbf{Q}_{n_0+1}$  et  $\mathcal{H}(\chi)$  est réduit à 1. D'autre part  $(1 - \zeta_g) L_\ell(1, \chi)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ .*

*Démonstration.* La première assertion de cet énoncé est évidente. Posons pour simplifier  $n = n_0 = n_1$ . Le degré de  $\chi$  est donc  $g = \ell^{n-1}$  et son conducteur  $f = \ell^n$ . Nous voulons montrer maintenant que  $(1 - \zeta_g) L_\ell(1, \chi)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ . Choisissons d'abord un entier  $b$ . Pour que  $\chi(b)$  soit une racine primitive  $g^{\text{ème}}$  de 1, il est suffisant de prendre  $b = 1 + \ell$ , ou bien tout entier congru à 1 modulo  $\ell$  et non congru à 1 modulo  $\ell^2$ . Utilisons la suite exacte:

$$0 \longrightarrow (1 - \zeta_g) \mathbf{Z}_\ell^{(g)} \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell^{(g)} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}_\ell / \ell \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow 0,$$

où l'homomorphisme  $\alpha$  est défini par  $\alpha(\sum_i c_i \zeta_g^i) = \sum_i c_i + \ell \mathbf{Z}_\ell$  (les  $c_i$  sont dans  $\mathbf{Z}_\ell$ ). Considérons l'élément de  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$ :  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)) S_n$  et calculons son image par  $\alpha$ . Pour cela il est nécessaire d'écrire cet élément comme combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbf{Z}_\ell$  de  $1, \zeta_g, \zeta_g^2, \dots$  etc. Comme au début de la démonstration de la proposition 3.5, nous écrivons ( $\sum_a$  a le même sens)  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b)) \sum_a a^{\varphi(\ell^n)} \chi(a) = \sum_a (a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)}) \chi(a)$  et  $a^{\varphi(\ell^n)} - a'^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)} \equiv 0 \pmod{\ell^{2n-1}}$ . L'image par  $\alpha$  cherchée est donc la classe

modulo  $\ell$  de  $(\sum_a \alpha^{\varphi(\ell^n)} - \alpha^{\varphi(\ell^n)} b^{\varphi(\ell^n)})/f_n \varphi(\ell^n)$ . Le même calcul montre que cette expression est la classe modulo  $\ell$  de  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)})(1/f_n \varphi(\ell^n)) \sum_a \alpha^{\varphi(\ell^n)}$ . Or il est facile de vérifier que cet élément de  $Z_\ell$  est premier à  $\ell$ : en effet, puisque  $b \not\equiv 1 \pmod{\ell^2}$ , on a  $b^{\varphi(\ell^n)} \not\equiv 1 \pmod{\ell^{n+1}}$  et  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)})/f_n$  est une unité de  $Z_\ell$ . De même,  $\alpha^{\varphi(\ell^n)} \equiv 1 \pmod{\ell^n}$  et  $\sum_a \alpha^{\varphi(\ell^n)} \equiv \varphi(\ell^n) \pmod{\ell^n}$ , montre que  $(\sum_a \alpha^{\varphi(\ell^n)})/\varphi(\ell^n)$  est aussi une unité de  $Z_\ell$ . On déduit donc de la suite exacte écrite plus haut que  $(1 - b^{\varphi(\ell^n)} \chi(b))S_n$  est une unité de  $Z_\ell^{(g)}$ . Il en sera de même de  $(1 - \zeta_g)S_n$ . D'après la proposition 4.1,  $(1 - \zeta_g)L_\ell(1, \chi)$  est aussi une unité de  $Z_\ell^{(g)}$ .

Il découle alors du théorème B que le groupe  $\mathcal{H}(\chi)$  est réduit à 1 et que le corps  $N$  est égal à  $\mathbf{Q}_{n+1}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] Fresnel, J., Nombres de Bernoulli et fonctions L  $p$ -adiques, Ann. Inst. Fourier, **17**, 2 (1967), 281–333.
- [ 2 ] Grass, G., Application de la notion de  $\varphi$ -objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes, Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1975–1976.
- [ 3 ] Gras, G., Annulation du groupe des  $\ell$ -classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à  $\ell$ , Ann. Inst. Fourier, **29**, 1 (1979).
- [ 4 ] Leopoldt, H. W., Zur Struktur der  $\ell$ -Klassengruppe galoischer Zahlkörper, Journ. für die reine und ang. Math., **199** (1958).
- [ 5 ] Oriat, B. et Satgé, P., Un essai de généralisation du "Spiegelungssatz", Journ. für die reine und ang. Math., **307** (1979).

*Mathématiques E.R.A. n° 070654*  
*Faculté des Sciences*  
*25030 BESANCON Cedex*