C. Rotthaus
Nagoya Math. J.
Vol. 76 (1979), 173-180

KOMPLETTIERUNG SEMILOKALER QUASIAUSGEZEICHNETER RINGE

CHRISTEL ROTTHAUS

In [4] EGA IV (7.4.8) hat Grothendieck die folgende Frage gestellt: "A sei ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal, so daß A separiert und komplett in der I-adischen Topologie ist. A/I sei ein $\boldsymbol{P}$-Ring. Ist dann A ebenfalls ein $\boldsymbol{P}$-Ring?" In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Fall, daß A ein semilokaler noetherscher Ring ist und $\boldsymbol{P}$ die Eigenschaft "die formellen Fasern von A sind geometrisch regulär" bezeichnet. Wir wollen zeigen: "A sei ein semilokaler noetherscher I-adisch kompletter Ring, wobei I ein im Jacobsonradikal von A enthaltenes Ideal ist. Sind die formellen Fasern von A/I geometrisch regulär, so sind auch die formellen Fasern von A geometrisch regulär."

Im folgenden nennen wir einen semilokalen noetherschen Ring A quasiausgezeichnet, wenn seine formellen Fasern geometrisch regulär sind. Unter dem Radikal $\operatorname{rad}(A)$ eines Ringes A verstehen wir immer das Jacobsonradikal von A und mit $\hat{A}$ werde die Komplettierung von A nach der vom Jacobsonradikal auf A induzierten Topologie (auch einfach Komplettierung von A genannt) bezeichnet. Bei den übrigen Bezeichnungen sei auf EGA [3] und [4] bzw. das Buch von H. Matsumura [5] verwiesen.

Herrn Markus Brodmann danke ich für zahlreiche nützliche Gespräche über diese Arbeit.

§ 1. Vorbereitungen

Wir geben eine Zusammenstellung der zum Beweis des Hauptergebnisses benötigten Sätze:

THEOREM 1 (Marot [7]). *A sei ein semilokaler noetherscher Ring; $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$ ein im Jacobsonradikal von A enthaltenes Ideal. A sei komplett in der I-adischen Topologie. Sind die formellen Fasern von A/I geometrisch reduziert, so sind die formellen Fasern von A ebenfalls geometrisch*

Received December 4, 1978.

reduziert.

THEOREM 2 (André [1]). *A und B seien lokale noethersche Ringe, $\varphi: A \to B$ sei ein lokaler, in der Topologie der maximalen Ideale formell glatter Homomorphismus. Ist A quasiausgezeichnet, so lokalisiert die formelle Glattheit von φ.*

Bemerkung. Die Aussage von Theorem 2 bedeutet: Für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ ist der von φ induzierte Morphismus $\varphi_{\mathfrak{P}}: A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{P}}$ (wobei $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$) ebenfalls formell glatt in der Topologie der maximalen Ideale. Insbesondere folgt unter den Bedingungen von Theorem 2, daß der Morphismus $\varphi: A \to B$ regulär ist, d.h. φ ist flach mit geometrisch regulären Fasern.

Ferner benötigen wir die folgende Charakterisierung quasiausgezeichneter semilokaler Ringe:

LEMMA 1 ([5] (33.E)). *A sei ein semilokaler noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist quasiausgezeichnet.*

(b) *Für alle nullteilerfreien endlichen A-Algebren B ist für alle $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec}(\hat{B})$ mit $\mathfrak{Q} \cap B = (0)$ der lokale Ring $\hat{B}_{\mathfrak{Q}}$ regulär.*

Bemerkung.

1) Aus (b) in Lemma 1 folgt insbesondere, daß A die Eigenschaft J-2 erfüllt (vgl. [5] (32.B)).

2) (33.E) ist nur für lokale Ringe formuliert. Der semilokale Fall ergibt sich jedoch als unmittelbare Folgerung.

Wir stellen nun einige beweistechnisch wichtige Hilfssätze zusammen:

Im folgenden sei A immer ein noetherscher semilokaler Ring; $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$ sei ein im Jacobsonradikal von A enthaltenes Ideal.

LEMMA 2. *A sei I-adisch komplett. $\mathfrak{a} \subseteq \hat{A}$ sei ein vom Nullideal verschiedenes Ideal in $\hat{A}$. Für alle $n \in N$ mit $n \geqq n_0$ gelte: $(A \cap (\mathfrak{a} + I^n\hat{A}))\hat{A} = \mathfrak{a} + I^n\hat{A}$. Dann ist $\mathfrak{a} \cap A \neq (0)$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a} + I^n\hat{A}) \cap A$. Nach Voraussetzung gilt für alle $n \geqq n_0$: $\mathfrak{a}_{n+1} + I^n = \mathfrak{a}_n$. Wegen $\mathfrak{a} \neq (0)$ ist $\mathfrak{a} \not\subseteq (\operatorname{rad}(\hat{A}))^r$ für ein $r \in N$ mit $r \geqq n_0$. Wähle $f_r \in \mathfrak{a}_r \backslash (\operatorname{rad}(A))^r$. Dann gibt es ein $f_{r+1} \in \mathfrak{a}_{r+1}$ mit $f_r - f_{r+1} \in I^r$, da $\mathfrak{a}_{r+1} + I^r = \mathfrak{a}_r$. Wir können also eine Folge $f_n \in \mathfrak{a}_n$, $n \geqq r$, finden mit $f_{n+1} - f_n \in I^n$ und $f_n \notin (\operatorname{rad}(A))^r$ für alle $n \geqq r$. Da A I-adisch komplett ist, existiert $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in A$ mit $f \neq 0$. Wegen $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a} \cap A$ $f \in \mathfrak{a} \cap A \neq (0)$.

LEMMA 3. *A sei I-adisch komplett. $\mathfrak{a} \subseteq \hat{A}$ sei ein Ideal mit $\sqrt{\mathfrak{a} + I\hat{A}} = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{M}_j$, wobei die $\mathfrak{M}_j$ maximale Ideale in $\hat{A}$ sind. Dann folgt: $\mathfrak{a} \cap A \neq (0)$.*

Beweis. Die Primärkomponenten von $\mathfrak{a} + I^n\hat{A}$ sind für alle $n \in N$ $\mathfrak{M}_j$-primär. Dann ist mit $\mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a} + I^n\hat{A}) \cap A$: $\mathfrak{a}_n\hat{A} = \mathfrak{a} + I^n\hat{A}$, und die Behauptung folgt mit Lemma 2.

Ist $\varphi: A \to B$ ein lokaler Morphismus lokaler Ringe, so sagen wir im folgenden "φ ist formell glatt", falls φ in der Topologie der maximalen Ideale formell glatt ist.

DEFINITION. $\Gamma_I = \{(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A); \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\hat{A})$ mit $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$; $\mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{P}$ nicht maximal in $\operatorname{Spec} \hat{A}\} \subseteq \Gamma_0 = \{(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\hat{A})$ mit $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(\hat{A})$.

LEMMA 4. *A/I sei quasiausgezeichnet. Dann ist für alle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$ der vom kanonischen Morphismus $\psi: A \to \hat{A}$ induzierte Morphismus $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}: A_\mathfrak{p} \to \hat{A}_\mathfrak{P}$ formell glatt. (D.h. ist $(\mathfrak{m}, \mathfrak{M}) \in \Gamma_0$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{M}$, so lokalisiert die formelle Glattheit von $\psi_{(\mathfrak{m},\mathfrak{M})}$ in einer Teilmenge von Γ_0).*

Beweis. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$. Wähle $(\mathfrak{m}, \mathfrak{M}) \in \Gamma_0$ mit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ maximal in $\operatorname{Spec}(\hat{A})$. Dann ist $\psi_{(\mathfrak{m},\mathfrak{M})}: A_\mathfrak{m} \to \hat{A}_\mathfrak{M}$ formell glatt, da $\hat{A}_\mathfrak{M} \simeq (A_\mathfrak{m})^\wedge$. Nach Voraussetzung ist A/I quasiausgezeichnet; dann ist der von $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ induzierte Morphismus $(A/I)_\mathfrak{p} \to \widehat{(A/I)}_\mathfrak{P}$ formell glatt, denn die formelle Glattheit von $(A/I)_\mathfrak{m} \to \widehat{(A/I)}_\mathfrak{M}$ lokalisiert. Da $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ flach ist, folgt dann mit [3] EGA O_{IV} (19.7.1) auch die formelle Glattheit von $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$.

FOLGERUNG 4.1. *A/I sei quasiausgezeichnet. Dann ist für alle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$ der von $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ induzierte Morphismus der Komplettierungen $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}: \hat{A}_\mathfrak{p} \to (\hat{A}_\mathfrak{P})^\wedge$ formell glatt.*

Beweis. Nach Lemma 4 ist $\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ formell glatt. Die Behauptung folgt mit [3] EGA O_{IV} (19.3.6).

FOLGERUNG 4.2. *A/I sei quasiausgezeichnet. Für alle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$ lokalisiert die formelle Glattheit von $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$. Insbesondere gilt für alle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$, wenn $\operatorname{Spec} \varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ die von $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ induzierte Abbildung der Spektren:*

$\operatorname{Spec}\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}\colon \operatorname{Spec}((\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge) \to \operatorname{Spec}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})$ *bezeichnet*:

$$(\operatorname{Spec}\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})})^{-1}(\operatorname{Reg}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})) = \operatorname{Reg}((\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge)\ .$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt mit Theorem 2. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der Regularität von $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ (vgl. [3] EGA O_{IV} (19.6.4) und (22.5.8)).

§2. Das Hauptergebnis

THEOREM 3. *A sei ein semilokaler noetherscher Ring, $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$ ein im Jacobsonradikal von A enthaltenes Ideal. A sei I-adisch komplett und A/I sei quasiausgezeichnet. Dann ist A ebenfalls quasiausgezeichnet.*

Beweis. Um (b) in Lemma 1 zu zeigen, dürfen wir annehmen, daß A ein Integritätsbereich ist. Wir haben dann nachzuweisen, daß für alle $\mathfrak{S} \in \operatorname{Sing}(\hat{A})$ $\mathfrak{S} \cap A \neq (0)$ ist. Sei also $\mathfrak{S} \in \operatorname{Sing}(\hat{A})$.

1. *Fall.* $\sqrt{\mathfrak{S} + I\hat{A}} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{M}_j$, wobei die $\mathfrak{M}_j$ maximale Ideale in $\hat{A}$ sind. Dann folgt die Behauptung mit Lemma 3.

2. *Fall.* Es gibt ein nicht-maximales Primideal $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\hat{A})$ mit $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{S} + I\hat{A}$.

In diesem Fall konstruieren wir ein geeignetes Ideal $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{S}$ und zeigen: $\mathfrak{D} \cap A \neq (0)$.

Konstruktion von $\mathfrak{D}$. Für alle Paare $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$ betrachten wir folgendes kommutative Diagramm kanonischer Morphismen:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}} & A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{p}}} & \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \\
\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}} \\
\hat{A} & \xrightarrow{\beta_{\mathfrak{P}}} & \hat{A}_{\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\mu_{\mathfrak{P}}} & (\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge
\end{array}$$

Für alle nichtmaximalen Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$ definieren wir:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \bigcap_{\mathfrak{Q} \in \operatorname{Sing}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})} \mathfrak{Q} & \text{falls } \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \text{ nicht regulär} \\ \widehat{A_{\mathfrak{p}}} & \text{falls } \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \text{ regulär} \end{cases}$$

und setzen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \bigcap_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})\in\Gamma_I} (\mu_{\mathfrak{P}}\circ\beta_{\mathfrak{P}})^{-1}(\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}) \\ &= \bigcap_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})\in\Gamma_I} [\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}\cap\hat{A}]\end{aligned}$$

Behauptung 1. $\mathfrak{D}$ ist ein reduziertes von Null verschiedenes Ideal in $\hat{A}$.

Beweis von Behauptung 1. Da nach Theorem 1 die formellen Fasern von A geometrisch reduziert sind, ist $\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ reduziert für alle $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$, denn nach Voraussetzung ist A ein Integritätsbereich. Also ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ entweder gleich $\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ oder ein reduziertes Ideal der Höhe $\geqq 1$. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}$ ist dann für alle $(\mathfrak{p},\mathfrak{P})\in\Gamma_I$ ebenfalls reduziert (oder gleich $(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}$). Das ergibt sich wie folgt aus der Regularität von $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$: Sei etwa $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}=\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{Q}_i\in\operatorname{Spec}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})$. Dann ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}=\bigcap_{i=1}^n[\mathfrak{Q}_i(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}]$, und zu zeigen ist, daß für alle $(\mathfrak{p},\mathfrak{P})\in\Gamma_I$ und alle $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})$ $\mathfrak{q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}$ reduziert ist. Mit [3] EGA O_{IV} (19.7.1) folgt, daß der von $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ induzierte Morphismus der Restklassenringe

$$\widehat{A_{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{q}\to(\hat{A}_{\mathfrak{p}})^{\wedge}/\mathfrak{q}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$$

ebenfalls regulär ist. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß $(\hat{A}_{\mathfrak{p}})^{\wedge}/\mathfrak{q}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$ die Serreschen Kriterien (R_0) und (S_1) erfüllt. Also ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$ reduziert und —nach Konstruktion von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$—Durchschnitt von Primidealen aus dem singulären Ort von $(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}$ (denn $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ ist insbesondere treuflach). Damit folgt, daß $\mathfrak{D}$ Durchschnitt von Primidealen aus dem singulären Ort von $\hat{A}$ ist. Da $\hat{A}$ nach Theorem 1 reduziert ist, folgt Behauptung 1.

Behauptung 2.

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}=\begin{cases}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge} & \text{falls } (\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge} \text{ regulär}\\ \bigcap_{\mathfrak{Q}\in\operatorname{Sing}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge}}\mathfrak{Q} & \text{falls } (\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge} \text{ singulär}\end{cases}$$

Beweis von Behauptung 2. Wie im Beweis von Behauptung 1 gezeigt, folgt "$\supseteq$". Da $\varphi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}$ regulär ist, erhalten wir:

$$\varphi^{-1}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{P})}\Big(\bigcap_{\mathfrak{Q}\in\operatorname{Sing}((\hat{A}_{\mathfrak{P}})^{\wedge})}\mathfrak{Q}\Big)\supseteq\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}=\bigcap_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Sing}(\widehat{A_{\mathfrak{p}}})}\mathfrak{q}$$

und es folgt Behauptung 2.

Behauptung 3. $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{D}$.

Beweis von Behauptung 3. $\mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}(\hat{A})$ sei ein nichtmaximales Primideal, das $\mathfrak{S} + I\hat{A}$ umfaßt. Mit $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{P}$ ist dann $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$, und wegen $\mathfrak{S} \in \mathrm{Sing}(\hat{A})$ ist $\mathfrak{S}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$ Durchschnitt von Primidealen aus dem singulären Ort von $(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$. Mit Behauptung 2 ergibt sich nun:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \subseteq \mathfrak{S}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$$

und es folgt Behauptung 3.

Behauptung 4. $\mathfrak{Q}$ sei ein $\mathfrak{D} + I^n\hat{A}$ umfassendes Primärideal in $\hat{A}$. Dann folgt: $(\mathfrak{Q} \cap A)\hat{A} \supseteq \mathfrak{D} + I^n\hat{A}$ (dabei ist $n \in N$ beliebig, aber fest).

Beweis von Behauptung 4. $\mathfrak{Q}$ sei $\mathfrak{P}$-primär mit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\hat{A})$. Ist $\mathfrak{P}$ maximal in $\mathrm{Spec}(\hat{A})$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathfrak{P}$ nicht maximal; dann ist mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}) \in \Gamma_I$. Wir setzen $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap A$ und betrachten wieder folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}} & A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{p}}} & \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi(\mathfrak{p},\mathfrak{P})} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(\mathfrak{p},\mathfrak{P})} \\ A & \xrightarrow{\beta_{\mathfrak{P}}} & \hat{A}_{\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\mu_{\mathfrak{P}}} & (\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \end{array}$$

Da $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{P}$-primär ist, erhalten wir:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \cap A\,.$$

(4.1) $\mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \cap \widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ ist ein $\mathfrak{p}\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$-primäres Ideal, das $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} + I^n\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ umfaßt.

Beweis von (4.1). $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$ ist ein Durchschnitt von Primidealen aus dem singulären Ort von $(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$. Nach Behauptung 2 gilt dann: $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \supseteq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$. Da $\mathfrak{D} + I^n\hat{A}$ in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist, erhalten wir damit $\mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \cap \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \supseteq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} + I^n\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$. Ferner ist $\mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$ $\mathfrak{P}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge$-primär, also ist auch $\mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \cap \widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ $\mathfrak{p}\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$-primär.

(4.2) $$\mathfrak{q}\widehat{A_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{Q}(\widehat{A_{\mathfrak{P}}})^\wedge \cap \widehat{A_{\mathfrak{p}}}\,.$$

Der Beweis von (4.2) ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß $\mathfrak{Q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}})^\wedge \cap \widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ $\mathfrak{p}\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$-primär ist.

(4.3) $$\mathfrak{q}\hat{A} \supseteq \mathfrak{D} + I^n\hat{A}\,.$$

Beweis von (4.3). Da $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}$-primär ist, ist $\mathrm{Ass}(\hat{A}/\mathfrak{q}\hat{A}) = \{\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_m\}$, wobei die $\mathfrak{P}_i$ die minimalen Primoberideale von $\mathfrak{p}\hat{A}$ in $\mathrm{Spec}(\hat{A})$ sind. Das ergibt sich sofort mit Theorem 1 aus [2] Chap. IV, § 2, no. 6, Theorem

2. Also ist $\mathfrak{q}\hat{A} = \mathfrak{r}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{r}_m$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ $\mathfrak{P}_i$-primär sind. Wegen $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P}_i) \in \Gamma_I$ betrachten wir wieder folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\psi"'] & A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\nu_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\psi(\mathfrak{p},\mathfrak{P}_i)"] & \widehat{A_{\mathfrak{p}}} \arrow[d, "\varphi(\mathfrak{p},\mathfrak{P}_i)"] \\
A \arrow[r, "\beta_{\mathfrak{P}_i}"] & \hat{A}_{\mathfrak{P}_i} \arrow[r, "\mu_{\mathfrak{P}_i}"] & (\hat{A}_{\mathfrak{P}_i})^\wedge
\end{tikzcd}$$

Mit (4.1) und (4.2) folgt: $\mathfrak{q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}_i})^\wedge = \mathfrak{r}_i(\hat{A}_{\mathfrak{P}_i})^\wedge \supseteq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(\hat{A}_{\mathfrak{P}_i})^\wedge$. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{D} + I^n\hat{A}$ in $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{q}(\hat{A}_{\mathfrak{P}_i})^\wedge \cap \hat{A}$ enthalten ist. Insgesamt folgt die Behauptung 4: $\mathfrak{q}\hat{A} \supseteq \mathfrak{D} + I^n\hat{A}$. Da die Behauptung 4 insbesondere für die Primärkomponenten von $\mathfrak{D} + I^n\hat{A}$ erfüllt ist, folgt fur alle $n \in N$: $[(\mathfrak{D} + I^n\hat{A}) \cap A]\hat{A} = \mathfrak{D} + I^n\hat{A}$, und die Behauptung des Satzes ergibt sich aus Lemma 2.

Folgerungen.

(3.1) *A sei ein semilokaler quasiausgezeichneter Ring. Dann ist der formale Potenzreihenring* $A[[T_1, \cdots, T_n]]$ *in endlich vielen Unbestimmten ebenfalls quasiausgezeichnet.*

(3.2) *A sei ein semilokaler quasiausgezeichneter Ring,* $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$ *ein im Jacobsonradikal von A enthaltenes Ideal. Dann ist die I-adische Komplettierung von A wieder quasiausgezeichnet.*

LITERATUR

[1] André, M., Localisation de la lissite formelle, Manuscripta Math. **13** (1974), 297–307.

[2] Bourbaki, N., Elements of Mathematics: Commutative Algebra, Paris, Hermann, (1972).

[3] Grothendieck, A., Éléments de Géométrie algébrique, Inst. haut. Étud. sci., Publ. math. **20** (1964).

[4] ——, Éléments de Géométrie algébrique, Inst. haut. Étud. sci., Publ. math. **24** (1965).

[5] Matsumura, H., Commutative Algebra, New York, Benjamin (1970).

[6] ——, Formal power series rings over polynomial rings I, in: Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honour of Y. Akizuki, Tokyo, Kinokuniya (1973), 511–520.

[7] Marot, J., Sur les anneaux universellement japonais, Bull. Soc. math. France **103** (1975), 103–111.

[8] Nomura, M., Formal power series rings over polynomial rings II, in: Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honour of Y. Akizuki, Tokyo, Kinokuniya (1973), 521–528.

[9] Rotthaus, C., Nicht ausgezeichnete, universell japanische Ringe, Math. Z. **152** (1977), 107–125.

[10] Rotthaus, C., Universell japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort, Nagoya Math. J. **74** (1979), 123–135.
[11] Valabrega, P., A few theorems on completion of excellent rings, Nagoya Math. J. **61** (1976), 127–133.

Mathematisches Institut
der Universität Münster