

SUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION CONDITIONNELLEMENT SOUS-MÉDIANS II

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact, séparé et dénombrable à l'infini et ξ désignera la mesure de Haar sur X . Un noyau de convolution N sur X est une mesure de Radon positive dans X et, pour une mesure de Radon réelle μ dans X , le N -potentiel de μ est la convolution $N*\mu$ dès qu'elle a un sens.

Depuis que O. Frostman [5] a étudié le principe classique du maximum pour les noyaux de Riesz-Frostman sur l'espace euclidien $R^n (n \geq 1)$, il y avait beaucoup de travaux sur le principe classique du maximum.

Dans le cas où X est un tore, il y a un travail important concernant le principe classique du maximum pour les noyaux de convolution symétriques (voir [12]): Un noyau de convolution symétrique N vérifie le principe classique du maximum si et seulement si la transformée de Fourier de N est de la forme $\hat{N} = \lambda_1/\lambda_2$, où λ_j ($j = 1, 2$) est une fonction définie-négative sur le groupe dual $\hat{X}$ de X à valeurs non-négatives.

Dans le cas où X est non-compact et où il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$, nous avons donné une caractérisation analogue pour les noyaux de convolution symétriques et s'annulant à l'infini (voir [7]). On se trouve quelques démonstration incomplètes dans [7].

Remarquons que si, pour un noyau de convolution N , $\hat{N}$ est, pour deux fonctions définies-négatives λ_1 et λ_2 sur $\hat{X}$, de la forme $\hat{N} = \lambda_1/\lambda_2$, alors N est conditionnellement sous-médian par rapport au semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ défini par $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\lambda_2)$.

On dit qu'un noyau de convolution N est conditionnellement sous-médian par rapport au semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ donné si,

pour $t > 0$ quelconque, $N * \alpha_t$ a un sens, si, en posant $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_K^+(X)$ vérifiant la condition que $\frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f$ converge uniformément sur tout compact lorsque $t \rightarrow 0$, $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ est dense dans $C_K^+(X)$ et si, pour $f \in \mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f(0) \geq 0$. Dans ce cas, il existe une mesure de Radon positive σ en dehors de l'origine, et une seule telle que, pour $f \in \mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\int f d\sigma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f(0)$.

Supposons qu'il n'existe aucun sous-groupe compact excepté $\{0\}$. Le but de cet article est de montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants (a) et (b). Soient N un noyau de convolution et N' un noyau de convolution vérifiant $N = o(N')$. On désigne par ε la mesure d'unité à l'origine.

(a) N vérifie le principe de domination relatif à N' .

(b) Il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ des mesures de Radon positives vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et que, pour $t \geq 0$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$ dans X .

Ceci donnera immédiatement l'équivalence suivante:

Pour qu'un noyau de convolution N s'annulant à l'infini vérifie le principe classique du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ des mesures de Radon positives vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$.

Dans le cas où $X = \mathbf{R}^n$, N vérifie le principe classique du maximum si et seulement s'il existe un laplacien généralisé $L \neq 0$ tel que $L * N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

§ 2. Préliminaires et quelques propositions

Dans ce paragraphe, on ne supposera aucune condition supplémentaire pour X .

On désigne par $C_K = C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des

fonctions finies et continues dans X à support compact et par $M_K = M_K(X)$ l'ensemble formé par toutes les fonctions ξ -mesurables et bornées dans X à valeurs réelles et à support compact. Leurs sous-ensembles des fonctions ≥ 0 sont notés C_K^+ et M_K^+ , respectivement. Pour un noyau de convolution N et pour $f \in M_K$, $N*(f\xi)$ est absolument continu par rapport à ξ , et sa densité s'écrit Nf . Evidemment Nf est localement bornée.

Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. On note $N_1 = O(N_2)$ si, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ et un compact K dans X tel que $N_1*f \leq N_2*g$ sur CK . On note $N_1 = o(N_2)$ si N_1 et $N_2 \neq 0$ sont à support compact ou bien si $\text{supp}(N_2)$ est non-compact et si, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ telle que $N_2*g(x) > 0$ sur $\text{supp}(N_1*f)$ et que

$$(2.1) \quad \frac{N_1*f(x)}{N_2*g(x)} = o(1)$$

dans $\{x \in X; N_2*g(x) > 0\}$ à l'infini.

On dit que N_1 vérifie le principe de domination relatif à (resp. le principe transitif de domination par rapport à) N_2 si, pour $f, g \in C_K^+$ quelconques, $N_1*f \leq N_2*g$ (resp. $N_2*f \leq N_2*g$) sur X dès que $N_1*f \leq N_2*g$ (resp. $N_1*f \leq N_1*g$) sur le support de f , $\text{supp}(f)$. Dans ce cas, on écrit $N_1 < N_2$ (resp. $N_1 \sqsubset N_2$).

Remarque 1. Supposons que $N_1 < N_2$. Alors on a:

$$(2.2) \quad \text{Si } N_2 \neq 0, \text{ alors } N_1 = O(N_2).$$

$$(2.3) \quad \text{Si } N_1 \neq 0, \text{ alors } \text{supp}(N_1) \ni 0.$$

$$(2.4) \quad \text{Si } \text{supp}(N_2) \ni 0, \text{ alors } \text{supp}(N_1) \subset \text{supp}(N_2).$$

On voit facilement (2.2) et (2.3). Pour $f \in C_K^+$ et $g \in C_K^+$ vérifiant $\text{supp}(g) \subset \{x \in X; f(x) > 0\}$ quelconques, $\text{supp}(N_2) \ni 0$ et $N_1 < N_2$ montrent qu'il existe une constante $a > 0$ vérifiant $aN_1*g \leq N_2*f$ sur X , et donc $\text{supp}(N_1) + \text{supp}(f) \subset \text{supp}(N_2) + \text{supp}(f)$, où, pour deux sous-ensembles A et B de X , $A + B$ désigne $\{x + y; x \in A, y \in B\}$. En faisant $\text{supp}(f) \downarrow \{0\}$, on arrive à $\text{supp}(N_1) \subset \text{supp}(N_2)$, d'où (2.4).

On dit que N_1 vérifie le principe du balayage relatif à N_2 (resp. le principe transitif du balayage par rapport à N_2) si, pour une mesure de Radon positive μ à support compact et un ouvert relativement compact ω dans X quelconques, il existe une mesure de Radon positive μ' (resp. μ'') portée par $\bar{\omega}$ telle que:

(2.5) $N_1 * \mu' \leq N_2 * \mu$ (resp. $N_2 * \mu'' \leq N_2 * \mu$) dans X .

(2.6) $N_1 * \mu' = N_2 * \mu$ (resp. $N_1 * \mu'' \geq N_1 * \mu$) dans ω .

Dans ce cas, on écrit $N_1 \prec_B N_2$ (resp. $N_1 \sqsubset_B N_2$), et l'on dit que μ' (resp. μ'') est une mesure balayée (resp. une mesure balayée transitivement) de μ sur ω relativement à (N_1, N_2) .

PROPOSITION 2. *Pour deux noyaux de convolution $N_1 \neq 0$ et $N_2 \neq 0$, les six énoncés suivants sont équivalents :*

- (a) $N_1 \prec N_2$. (b) $N_1 \sqsubset N_2$. (c) $N_1 \prec_B N_2$. (d) $N_1 \sqsubset_B N_2$.
 (e) $\check{N}_1 \prec \check{N}_2$. (f) Pour $c \in (0, \infty)$ quelconque, $N_1 + c\varepsilon \prec N_2$.

Pour un noyau de convolution N , on note $\check{N}$ le noyau de convolution défini par $\int f d\check{N} = \int \check{f} dN$ pour toute $f \in C_K$, où $\check{f}(x) = f(-x)$, et l'on l'appelle le noyau adjoint de N . On dit souvent que ε est le noyau d'unité. Pour (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d), voir le théorème 20 dans [11]. Pour (a) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f), voir les propositions 2, 3 dans [10] et la proposition 4 dans [11].

Pour un noyau de convolution N , on désigne par $D^+(N)$ l'ensemble des mesures de Radon positives dont les N -potentiels sont définis.

PROPOSITION 3. *Soient N un noyau de convolution et $N' \neq 0$ un noyau de convolution vérifiant $N \prec N'$. Soit μ une mesure de Radon positive appartenant à $D^+(N')$. Si $N' \geq N' * \mu$ dans X , alors $\mu \in D^+(N)$ et $N(\{0\}) \geq N * \mu(\{0\})$.*

Démonstration. Comme $N = O(N')$, on a $\mu \in D^+(N)$. Soit $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $\check{N}' * \varphi(0) > 0$. Pour $\delta \in (0, \infty)$ quelconque, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que, pour $f \in C_K^+$ portée par v et vérifiant $0 \leq f \leq 1$, $f(0) = 1$ quelconque,

$$(2.7) \quad \check{N} * f(x) \leq \frac{N(\{0\})}{\check{N}' * \varphi(0)} \check{N}' * \varphi(x) + \delta \check{N}' * \varphi(x) \quad \text{sur } v.$$

On désigne ici par $\mathcal{V}$ la totalité des voisinages compacts de l'origine. Comme $\check{N} \prec \check{N}'$, l'inégalité dans (2.7) a lieu sur X . En faisant $\text{supp}(f) \downarrow \{0\}$ et $\delta \downarrow 0$, on arrive à

$$(2.8) \quad \check{N}(\{x\}) \leq \frac{N(\{0\})}{\check{N}' * \varphi(0)} \check{N}' * \varphi(x) \quad \text{sur } X.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad N(\{0\}) - N * \mu(\{0\}) &= N(\{0\}) - \int \check{N}(\{x\}) d\mu(x) \\
&\geq \frac{N(\{0\})}{\check{N}' * \varphi(0)} (\check{N}' * \varphi(0) - \int \check{N}' * \varphi d\mu) \geq 0,
\end{aligned}$$

d'où la proposition 3.

Pour un noyau de convolution N , on désigne par $S(N)$ l'ensemble des noyaux de convolution N' vérifiant $N < N'$. En rappelant (2.8), on obtient le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$. Si $N(\{0\}) = 0$, alors, pour $x \in X$ quelconque, $N(\{x\}) = 0$.*

Pour deux noyaux de convolution N_1 et N_2 , on dit que N_1 est régulier par rapport à N_2 si $\bigcap_{v \in \mathcal{V}} P(N_1, N_2; v) = \{0\}$, où

$$(2.10) \quad P(N_1, N_2; v) = \overline{\{N_1 * \lambda; \lambda \in D^+(N_1) \cap D^+(N_2), \text{supp}(\lambda) \subset Cv, N_2 \geq N_1 * \lambda\}},$$

où l'adhérence est au sens de la topologie vague. On dit simplement qu'un noyau de convolution N est régulier si N est régulier par rapport à lui-même (cf. [11]). On écrit simplement $P(N; v) = P(N, N; v)$.

Remarque 5. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Si $N_1 = o(N_2)$ ou bien si $N_1 = O(N_2)$ et N_2 est régulier, alors N_1 est régulier par rapport à N_2 .

En effet, soit $\eta \in \bigcap_{v \in \mathcal{V}} P(N_1, N_2; v)$ quelconque. Alors il existe une famille filtrante à droite $(v_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{V}$ et une famille filtrante $(N_1 * \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ des N_1 -potentiels des mesures de Radon positives telles que $\bigcup_{\alpha \in A} v_\alpha = X$, $\text{supp}(\lambda_\alpha) \subset Cv_\alpha$, $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = \eta$ (vaguement) et que $N_2 \geq N_1 * \lambda_\alpha$. Si $N_1 = o(N_2)$, on a $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement), d'après la remarque 30 dans [11]. Si N_2 est régulier, alors on a $\lim_\alpha N_2 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement). Comme $N_1 = O(N_2)$, on a aussi $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement). Par conséquent, $\eta = 0$, d'où $\bigcap_{v \in \mathcal{V}} P(N_1, N_2; v) = \{0\}$.

On voit aussi facilement que si $N_1 = O(N_2)$ et N_2 est régulier, alors N_1 est aussi régulier.

Remarque 6. En rappelant la démonstration du théorème 20 et la proposition 25 dans [11], on voit l'énoncé suivant:

Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$.

Pour un ouvert relativement compact ω dans X , il existe une mesure de Radon positive μ''_ω portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait:

$$(2.11) \quad N(\{0\})\mu''_\omega \leq N \text{ dans } X.$$

$$(2.12) \quad \text{Pour } N' \in S(N) \text{ quelconque, } \mu''_\omega \text{ est une mesure balayée transitivement de } \varepsilon \text{ sur } \omega \text{ relativement à } (N, N').$$

$$(2.13) \quad \text{Pour une mesure de Radon positive } \nu \text{ appartenant à } D^+(N) \text{ et } N' \in S(N) \text{ quelconques, } N' * \nu \geq N' * \mu''_\omega \text{ dans } X \text{ dès que } N * \nu \geq N * \mu \text{ dans } \omega.$$

Dans ce cas, μ''_ω s'appelle une mesure balayée transitivement de ε sur ω par rapport à $S(N)$.

Remarque 7. Soit N un noyau de convolution. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ telle que N soit régulier par rapport à N' . Alors, pour un ouvert quelconque ω dans X , il existe une mesure de Radon positive μ''_ω portée par $\bar{\omega}$ vérifiant (2.11), (2.12) et (2.13).

En effet, on choisit une suite croissante $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ d'ouverts relativement compacts telle que $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = \omega$. Soit μ''_n une mesure balayée transitivement de ε sur ω_n par rapport à $S(N)$. Comme $N' \geq N' * \mu''_n$ et $N = O(N')$, $(\mu''_n)_{n=1}^\infty$ et $(N * \mu''_n)_{n=1}^\infty$ sont vaguement bornées. Donc on peut supposer que $(\mu''_n)_{n=1}^\infty$ et $(N * \mu''_n)_{n=1}^\infty$ convergent vaguement. Posons $\mu''_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu''_n$ et $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} N * \mu''_n$ (vaguement). Pour que μ''_ω soit une mesure demandée, il suffit que $\eta = N * \mu''_\omega$. Pour $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $0 \leq \varphi \leq 1$ quelconque, $\lim_{n \rightarrow \infty} N * (\varphi \mu''_n) = N * (\varphi \mu''_\omega)$ (vaguement), et donc

$$(2.14) \quad 0 \leq \eta - N * \mu''_\omega \leq \lim_{n \rightarrow \infty} N * ((1 - \varphi) \mu''_n) \text{ dans } X.$$

Ceci donne que, pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, il existe $\eta_v \in P(N, N'; v)$ vérifiant $0 \leq \eta - N * \mu''_\omega \leq \eta_v$. En faisant $v \uparrow X$, on arrive à $\eta = N * \mu''_\omega$, d'où la remarque 7.

On dit aussi que μ''_ω est une mesure balayée transitivement de ε sur ω par rapport à $S(N)$. Dans les présentes deux remarques, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $N' * \mu''_\omega$ est uniquement déterminé.

PROPOSITION 8. Soit N un noyau de convolution vérifiant $N(\{0\}) > 0$. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' . Alors il existe une mesure de Radon

positive μ'' dans X telle que l'on ait:

$$(2.15) \quad \mu''(\{0\}) = 0.$$

$$(2.16) \quad N * \mu'' \geq N \text{ dans } C\{0\}.$$

$$(2.17) \quad N'' \geq N'' * \mu'' \text{ dans } X \text{ pour tout } N'' \in S(N).$$

Démonstration. Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts dans X telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset C\{0\}$ et $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = C\{0\}$. On prend une mesure balayée transitivement μ''_α de ε sur ω_α par rapport à $S(N)$. Alors $N * \mu''_\alpha \geq N$ dans ω_α , $N'' \geq N'' * \mu''_\alpha$ dans X pour tout $N'' \in S(N)$ et

$$(2.18) \quad N(\{0\})\mu''_\alpha \leq N - N(\{0\})\varepsilon.$$

Comme $N' \neq 0$, on peut supposer que $(\mu''_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ'' . De la même manière que dans la remarque 7, on a $\lim_{\alpha} N * \mu''_\alpha = N * \mu''$ (vaguement), et donc μ'' vérifie (2.16) et (2.17). D'après (2.18), on a $\mu''(\{0\}) = 0$. La démonstration est ainsi complète.

Dans ce cas, μ'' est une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$.

Une famille $(N_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution est, par définition, une résolvante si, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$(2.19) \quad N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q \quad (\text{Équation résolvante}).$$

On connaît bien que, pour un noyau de convolution N , une résolvante $(N_p)_{p>0}$ vérifiant $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N$ (vaguement) est uniquement déterminée dès qu'elle existe. Dans ce cas, en posant $N_0 = N$, $(N_p)_{p \geq 0}$ s'appelle la résolvante associée à N .

D'après le lemme 35 et la remarque 33 dans [11], on voit la remarque suivante:

Remarque 9. Pour un noyau de convolution N , les deux énoncés suivants sont équivalents:

- (a) Il existe la résolvante associée à N .
- (b) N est régulier et vérifie le principe de domination.

On dit que N vérifie le principe de domination si $N < N$.

PROPOSITION 10. Soient $(N_p)_{p>0}$ une résolvente et N' un noyau de convolution. Alors, pour que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p < N'$, il faut et il suffit que, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geq pN' * N_p$.

Démonstration. Comme N_p vérifie le principe de domination, on a $\text{supp}(N_p) \ni 0$ ou bien $N_p = 0$. Donc on peut supposer que $N' \neq 0$. D'après l'équation résolvente, on a, pour tous $p > 0$ et $q > 0$,

$$(2.20) \quad N_q + \frac{1}{p} \varepsilon = \frac{1}{p} \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (pN_{p+q})^{*n} \right),$$

où $(\cdot)^{*1} = (\cdot)$ et $(\cdot)^{*n+1} = (\cdot)^{*n} * (\cdot)$. Si $N' \geq pN' * N_{p+q}$, alors $N_q + \frac{1}{p} \varepsilon < N'$ (voir la proposition 2 et la remarque 10 dans [11]). Si $N_q + \frac{1}{p} \varepsilon <_B N'$, alors $N' \geq pN' * N_{p+q}$. D'après la proposition 2, on voit que $N_q + \frac{1}{p} \varepsilon < N'$ et $N' \geq pN' * N_{p+q}$ sont équivalents. Ceci donne immédiatement la proposition 10 (voir aussi la proposition 2 dans [11]).

PROPOSITION 11. Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvente et supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geq pN' * N_p$. Alors pN_p converge vaguement vers une mesure de Radon positive η dans X lorsque $p \rightarrow 0$. Si $\eta \neq 0$, alors, pour $p > 0$ quelconque, $\text{supp}(N_p) \subset \text{supp}(\eta)$, η est portée par un sous-groupe compact Γ de X et la restriction de η sur Γ est la mesure de Haar normalisée de Γ .

Démonstration. Evidemment $(pN_p)_{p>0}$ est vaguement bornée. Supposons qu'il existe un point vaguement adhérent $\eta \neq 0$ de $(pN_p)_{p>0}$ lorsque $p \rightarrow 0$. On prend une famille filtrante $(N_{p_\alpha})_{\alpha \in A}$ telle que $\lim_{\alpha} p_\alpha = 0$ et $\lim_{\alpha} p_\alpha N_{p_\alpha} = \eta$ (vaguement). En utilisant le lemme de J. Deny (voir le lemme 5.2 dans [4]) et en faisant $p_\alpha \rightarrow 0$ dans l'équation résolvente $(p_\alpha N_{p_\alpha}) * (\varepsilon - (p_\beta - p_\alpha)N_{p_\beta}) = p_\alpha N_{p_\beta}$ ($\beta \in A$), on voit que $\eta * (\varepsilon - p_\beta N_{p_\beta}) = 0$. On a aussi, pour $p > 0$ quelconque,

$$(2.21) \quad \eta * (\varepsilon - pN_p) = 0.$$

En faisant $p_\beta \rightarrow 0$, on voit que $(\eta)^{*2} = \eta$, en utilisant encore le lemme de J. Deny. D'après le théorème 1 dans [13], η est portée par un sous-groupe compact Γ de X et la restriction de η sur Γ est la mesure de Haar normalisée sur Γ . Soit η' un point vaguement adhérent de $(pN_p)_{p>0}$

lorsque $p \rightarrow 0$ quelconque. D'après (2.21) et le lemme de J. Deny, on a $\eta = \eta * \eta'$, et donc $\eta' \neq 0$. De la même manière que ci-dessus, on a $\eta' = \eta * \eta'$, d'où $\eta = \eta'$. Ceci donne que $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = \eta$ (vaguement). D'après (2.21) et la proposition 10, on a, pour tout $p > 0$, $N_p < \eta$, et donc $\text{supp}(N_p) \subset \text{supp}(\eta)$. La démonstration est ainsi complète.

Ensuite une famille $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ des mesures de Radon positives s'appelle un semi-groupe vaguement continu si $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et l'application $\mathbf{R}^+ \ni t \rightarrow \alpha_t$ est vaguement continue, où $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R}^1; t \geq 0\}$. Soit N un noyau de convolution. Si N s'écrit, pour un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, comme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, alors N s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe vaguement continu associé à N . Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu et supposons que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ est défini. Alors $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante.

Remarque 12. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. S'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' * \alpha_t$ a un sens et que $N' \geq N' * \alpha_t$, alors, pour $p > 0$ quelconque $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ est défini.

PROPOSITION 13. *Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvante. Alors, pour qu'il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ tel que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$, il faut et il suffit qu'il existe $p_0 > 0$ tel que N_{p_0} soit non-périodique⁽¹⁾. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est uniquement déterminé.*

Rappelons la caractérisation d'un noyau de convolution de Hunt suivante:

LEMME 14. *Soit N un noyau de convolution. Alors, pour que N soit un noyau de convolution de Hunt, il faut et il suffit que N soit non-périodique et qu'il existe la résolvante associée à N .*

Voir la proposition 1 dans [8].

Démonstration de la proposition 13. D'après le présent lemme, la

(1) Un noyau de convolution N est non-périodique si, pour $x \neq 0 \in X$ quelconque, $N \neq N * \varepsilon_x$, où ε_x désigne la mesure d'unité à x .

condition est nécessaire. Montrons que la condition est suffisante. En rappelant l'équation résolvante, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, N_p est non-périodique. D'après le lemme 14, pour $p > 0$ quelconque, il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_{p,t})_{t \geq 0}$, et un seul tel que $N_p = \int_0^\infty \alpha_{p,t} dt$. Comme $(N_{p+q})_{q \geq 0}$ est la résolvante associée à N_p , on a, pour $t \in \mathbb{R}^+$ quelconque, $\alpha_{p+q,t} = \exp(-qt)\alpha_{p,t}$. Par conséquent, il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, et un seul tel que, pour $p \in (0, \infty)$ et $t \in \mathbb{R}^+$ quelconques, $\alpha_{p,t} = \exp(-pt)\alpha_t$, d'où la proposition 13.

On dit que $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p > 0}$.

PROPOSITION 15. *Soit $(N_p)_{p > 0}$ une résolvante des noyaux de convolution $\neq 0$ vérifiant $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement) et supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour tout $p > 0$, $N' \geq pN' * N_p$ dans X . Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ une mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p ⁽²⁾. Alors $(\mu'_{p,Cv})_{p > 0}$ est vaguement bornée et $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p > 0}$ converge vaguement lorsque $p \rightarrow 0$. Posons η_v sa limite vague. Alors, pour $p > 0$ et un point vaguement adhérent μ'_{Cv} de $(\mu'_{p,Cv})_{p > 0}$ lorsque $p \rightarrow 0$ quelconques,*

$$(2.22) \quad \eta_v * (\varepsilon - pN_p) = N_p * (\varepsilon - \mu'_{Cv}).$$

En particulier, si, pour tout $p > 0$, N_p est non-périodique, alors $\eta_v \neq 0$ et $(\mu'_{p,Cv})_{p > 0}$ converge vaguement lorsque $p \rightarrow 0$.

Démonstration. Admettons la première partie et supposons que, pour tout $p > 0$, N_p est non-périodique. Alors N_p est un noyau de convolution de Hunt (voir le lemme 14). D'après (2.22) et l'injectivité de N_p ⁽³⁾, on voit que $(\mu'_{p,Cv})_{p > 0}$ converge vaguement lorsque $p \rightarrow 0$ et que $\eta_v \neq 0$.

Montrons la première partie. D'après la proposition 10, on a, pour tout $p > 0$, $N_p \prec N'$, et donc la proposition 2 donne que $N_p \sqsubset N'$. Ceci

(2) Pour une mesure de Radon positive μ à support compact et pour un ouvert ω dans X , μ' est une mesure balayée de μ sur ω relativement à un noyau convolution N si $\text{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$, $N * \mu' \leq N * \mu$ dans X , $N * \mu' = N * \mu'$ dans ω et si, pour une mesure de Radon positive ν appartenant à $D^+(N)$ quelconque, $N * \nu \leq N * \mu'$ dans X dès que $N * \nu \leq N * \mu$ dans ω . Si N est un noyau de convolution de Hunt, alors μ' est uniquement déterminée.

(3) On dit qu'un noyau de convolution N est injectif si, pour μ, ν de $D^+(N)$ quelconques, $\mu = \nu$ dès que $N * \mu = N * \nu$. Il est bien connu qu'un noyau de convolution de Hunt est injectif (voir, par exemple, [4]).

donne que

$$(2.23) \quad N' \geq N' * \mu'_{p,Cv} \text{ dans } X \ (p > 0).$$

Par conséquent $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est vaguement bornée. Montrons que la famille $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est aussi vaguement bornée. Supposons qu'elle ne l'est plus. Alors il existe une suite $(p_n)_{n=1}^\infty$ des nombres positifs telle que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int d(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv}) = \infty$. On peut supposer ici que $(\mu'_{p_n,Cv})_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ'_{Cv} portée par $\overline{Cv}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Posons $c_n = \int d(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv})$ et $\eta_n = \frac{1}{c_n}(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv})$; alors on peut supposer que $(\eta_n)_{n=1}^\infty$ converge aussi vaguement vers une mesure de Radon positive η lorsque $n \rightarrow \infty$. Remarquons que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, $\text{supp}(N_p) = \text{supp}(N_q)$, car, pour $r > \max(p, q)$ quelconque, $N_p = \frac{1}{r-p} \sum_{n=1}^\infty ((r-p)N_r)^{*n}$ et $N_q = \frac{1}{r-q} \sum_{n=1}^\infty ((r-q)N_r)^{*n}$. Donc, pour $p > 0$ quelconque, $\text{supp}(\eta) \subset v \cap \text{supp}(N_p)$ et $\int d\eta = 1$. Le lemme de J. Deny (cité ci-dessus) donne que, pour $p > 0$ quelconque,

$$(2.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p * \mu'_{p_n,Cv} = N_p * \mu'_{Cv} \text{ (vaguement),}$$

et donc

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \eta * (\varepsilon - pN_p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} (N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv}) * (\varepsilon - (p - p_n)N_p) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} N_p * (\varepsilon - \mu'_{p_n,Cv}) = 0 \text{ (vaguement)}. \end{aligned}$$

En faisant $p \rightarrow 0$, on arrive à $\eta = 0$, d'où une contradiction. Donc $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est vaguement bornée. Soient $0 < p < q$ quelconques. Alors on a

$$(2.26) \quad N_q * \mu'_{p,Cv} = N_p * \mu'_{p,Cv} * (\varepsilon - (q-p)N_q) \geq N_q = N_q * \mu'_{q,Cv}$$

dans Cv . En rappelant la définition de $\mu'_{p,Cv}$, on a

$$(2.27) \quad N_q * \mu'_{p,Cv} \geq N_q * \mu'_{q,Cv} \text{ dans } X.$$

Soient δ un nombre > 0 et $f \in C_K^+$ quelconques. Alors il existe un nombre $p_0 > 0$ tel que, pour $0 < p < p_0$ et $0 < q < p_0$ quelconques,

$$(2.28) \quad \int f d(qN_q) * (N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) < \delta.$$

Pour $p, q \in (0, p_0)$ vérifiant $p < q$ quelconques, on a

$$(2.29) \quad \begin{aligned} & \int f d(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) - \int f d(N_q - N_q * \mu'_{q,Cv}) - \delta \\ &= (q - p) \int f dN_q * (N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) - \delta \\ & \quad - \int f d(N_q * \mu'_{p,Cv} - N_q * \mu'_{q,Cv}) < 0. \end{aligned}$$

Soient $\eta_{v,1}$ et $\eta_{v,2}$ deux points vaguement adhérents de $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ lorsque $p \rightarrow 0$ quelconques. Alors on a, pour tout $p \in (0, p_0)$,

$$(2.30) \quad \int f d\eta_{v,j} \leq \int f d(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) + \delta \quad (j = 1, 2),$$

et donc $\left| \int f d\eta_{v,1} - \int f d\eta_{v,2} \right| \leq \delta$. En faisant $\delta \downarrow 0$, on arrive à l'égalité $\int f d\eta_{v,1} = \int f d\eta_{v,2}$, d'où $\eta_{v,1} = \eta_{v,2}$. Par conséquent, $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p \rightarrow 0$. L'égalité (2.22) résulte de l'équation résolvante et du lemme de J. Deny. La démonstration est ainsi complète.

On dit que tout le point vaguement adhérent de $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ lorsque $p \rightarrow 0$ est une mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$.

PROPOSITION 16. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $N(\{0\}) > 0$. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' . Soit μ'' une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$ vérifiant $\mu''(\{0\}) = 0$. Alors*

$$(2.31) \quad N' * (N - N * \mu'') \geq 0 \text{ dans } X.$$

LEMME 17. *Soient N et N' deux noyaux de convolution et supposons que N est régulier par rapport à N' . Alors, pour une famille filtrante $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ des mesures de Radon positives convergeant vaguement vers une mesure de Radon positive μ , $\lim_{\alpha} N * \mu_\alpha = N * \mu$ dès que $(N * \mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée et que $N' \geq N' * \mu_\alpha$ dans X .*

Démonstration du lemme 17. On peut supposer que $(N * \mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge vaguement. Posons $\eta = \lim_\alpha N * \mu_\alpha$ (vaguement). Alors $\eta \geq N * \mu$ dans X . Pour $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $0 \leq \varphi \leq 1$ quelconque, on a

$$(2.32) \quad \eta - N * \mu = \lim_\alpha N * ((1 - \varphi)(\mu_\alpha - \mu)) \quad (\text{vaguement}),$$

et donc, pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, il existe $\eta_v \in P(N, N'; v)$ tel que $\eta - N * \mu \leq \eta_v$ dans X . En faisant $v \uparrow X$, on arrive à $\eta = N * \mu$, d'où le lemme 17.

Démonstration de la proposition 16. Comme $N' \geq N * \mu''$ dans X , pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \frac{1}{1+p} \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+p} \mu'' \right)^{*n} \right)$ est défini et $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante.

D'abord on suppose que $\lim_{p \rightarrow 0} p N_p = 0$. Comme $N' \geq p N' * N_p$, le lemme 17 donne que $\lim_{p \rightarrow 0} N * (p N_p) = 0$ (vaguement). On a

$$(2.33) \quad N = \lim_{p \rightarrow 0} N_p * (N - N * \mu'') \quad (\text{vaguement}).$$

Donc $N \neq N * \mu''$. D'après (2.33), on peut écrire, pour une constante $c > 0$ et pour une mesure de Radon positive σ , comme $N - N * \mu'' = c\varepsilon - \sigma$. Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, posons $\sigma_v = \sigma$ sur v et $\sigma_v = 0$ dans Cv . Soit $h \in C_K^+$ vérifiant $N_1 * h(x) > 0$ sur $v + v$. Alors, pour $f \in C_K^+$ portée par v et un entier $n \geq 1$ quelconque, il existe $0 < p < 1$ tel que

$$(2.34) \quad N_p * (c\varepsilon - \sigma_v) * f + \frac{1}{n} N_p * h \geq 0 \quad \text{sur } \text{supp}(\sigma_v * f).$$

Comme $N_p \sqsubset N'$, on a

$$(2.35) \quad N' * (c\varepsilon - \sigma_v) * f + \frac{1}{n} N' * h \geq 0 \quad \text{sur } X.$$

En faisant $n \rightarrow \infty$, $f\xi \rightarrow \varepsilon$ et ensuite $v \uparrow X$, on arrive à (2.31).

On suppose ensuite que $\lim_{p \rightarrow 0} p N_p \neq 0$. D'après la proposition 11, il existe un sous-groupe compact Γ de X tel que, pour $p > 0$ quelconque, $\text{supp}(N_p) \subset \Gamma$ et que $\lim_{p \rightarrow 0} p N_p = \xi_\Gamma$, où ξ_Γ est la mesure de Haar normalisée de Γ . Alors, $\text{supp}(\mu'') \subset \Gamma$ et

$$(2.36) \quad \begin{aligned} (N - N * \mu'') * \xi_\Gamma &= \lim_{p \rightarrow 0} (N - N * \mu'') * (p N_p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p N * (\varepsilon - p N_p) = 0 \quad (\text{vaguement}). \end{aligned}$$

Comme $N - N * \mu'' \leq 0$ dans $C\{0\}$, on a $\text{supp}(N - N * \mu'') \subset \Gamma$. Donc on peut supposer que $\text{supp}(N) \subset \Gamma$, et par suite on a (2.31). La démonstration est ainsi complète.

Par conséquent, on obtiendra la proposition suivante:

PROPOSITION 18. Soit N un noyau de convolution non-périodique vérifiant $N(\{0\}) > 0$. S'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' , alors il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ tels que, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$, $N' \geq N' * \beta_t$, $\frac{1}{t}(\varepsilon - \alpha_t)$, $\frac{1}{t}(\varepsilon - \beta_t)$, $\frac{1}{t}(N * \alpha_t - N)$ convergent vaguement lorsque $t \rightarrow 0$, $\lim_{p \rightarrow 0} p \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt = 0$ (vaguement) et que

$$(2.37) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} N * (\alpha_t - \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\beta_t - \varepsilon).$$

Démonstration. Soit μ'' une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$ vérifiant $\mu''(\{0\}) = 0$. Comme $N' \geq N' * \mu''$, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque,

$$(2.38) \quad \alpha_t = \exp(-t) \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n (\mu'')^{*n}}{n!} \right)$$

a un sens et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. On a, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$, où $(N_p)_{p > 0}$ est la résolvante définie dans la démonstration de la proposition 16. Ecrivons, pour une constante $c \geq 0$ et pour une mesure de Radon positive σ , comme $N - N * \mu'' = c\varepsilon - \sigma$. Montrons que $c > 0$. Supposons contrairement que $c \leq 0$. Alors (2.31) donne que $\sigma = 0$, et donc $N - N * \mu'' = 0$. On a alors $\lim_{p \rightarrow 0} p N_p \neq 0$ (voir la démonstration de la proposition 16). Posons $\xi_r = \lim_{p \rightarrow 0} p N_p$; alors $\text{supp}(\mu'') \subset \text{supp}(\xi_r)$ et $N * \xi_r = N * \xi_r * \mu''$, et donc

$\int d\mu'' = 1$. L'égalité $N = N * \mu''$ et le théorème 1 dans [3] donnent que tout le point de $\text{supp}(\mu'')$ est une période de $N^{(4)}$. Comme $\mu''(\{0\}) = 0$, ceci est en contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent, $c > 0$ et donc $N' \geq \frac{1}{c} N' * \sigma$ (voir (2.31)). Pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque,

(4) On dit que $x \in X$ est une période de N si $N = N * \varepsilon_x$.

$$(2.39) \quad \beta_t = \exp(-ct) \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n (\sigma)^{*n}}{n!} \right)$$

a un sens et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\varepsilon - \alpha_t) = \varepsilon - \mu''$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\varepsilon - \beta_t) = c\varepsilon - \sigma$, on voit (2.37). La démonstration est ainsi complète.

Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Rappelons la définition de la sous-médiane conditionnelle de N par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ (voir § 1). Lorsque $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens, cela est dit aussi conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 .

PROPOSITION 19. *Soient N un noyau de convolution et $(N_p)_{p>0}$ une résolvante vérifiant $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement). Supposons que:*

(a) *Il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que $N = O(N')$, pour tout $p > 0$, $N' \geq pN' * N_p$ et que N soit régulier par rapport à N' .*

(b) *Il existe le semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ associé à $(N_p)_{p>0}$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$.*

(2) *Posons $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) \right)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_K^+$ vérifiant la condition que $pN * (pN_p - \varepsilon) * f$ converge uniformément sur tout compact lorsque $p \rightarrow \infty$. Alors $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) \right)$ est dense dans C_K^+ et, pour $f \in \mathcal{D}^+ \left(\lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) \right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) * f(0) \geq 0$.*

(3) *Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, $N * \mu'_{Cv} \geq N$ dans Cv , où μ'_{Cv} est la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$.*

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (3): Pour tout $p > 0$, $N_p < N'$, et donc $N' \geq N' * \mu'_{Cv}$. On voit alors que $N * \mu'_{Cv}$ a un sens, d'après $N = O(N')$. D'après (b), on voit facilement que, pour $t \in \mathbb{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$. Soit η_v la même que dans la proposition 15. Alors on a $\eta_v \neq 0$, d'après la proposition 15. En utilisant le lemme de J. Deny, $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p * \alpha_t = 0$ (vaguement). On a donc, pour $t > 0$ quelconque,

$$(2.40) \quad \frac{1}{t} \eta_v * (\alpha_t - \varepsilon) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_s ds \right) * (\varepsilon - \mu'_{p,Cv}) * (\alpha_t - \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^t \exp(-pt) \alpha_s ds - \frac{1 - \exp(-pt)}{p} (pN_p) * \alpha_t \right) * (\mu'_{p,Cv} - \varepsilon) \\
&= \frac{1}{t} \left(\int_0^t \alpha_s ds \right) * (\mu'_{Cv} - \varepsilon) \quad (\text{vaguement}),
\end{aligned}$$

où $\mu'_{p,Cv}$ est la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p . Ceci et le lemme 17 donnent que

$$(2.41) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} N * \eta_v * (\alpha_t - \varepsilon) = N * (\mu'_{Cv} - \varepsilon) \quad (\text{vaguement}).$$

Donc $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ contient le sous-cône convexe de C_K^+ engendré par $\{f * \eta_v; f \in C_K^+, v \in \mathcal{V}\}$, et par suite $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ est dense dans C_K^+ . Remarquons que, pour $f \in \mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f * \eta_v(0) \right)_{v \in \mathcal{V}}$ converge vers $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f(0)$ lorsque $v \downarrow \{0\}$. Alors on voit facilement que (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): De la même manière que ci-dessus, (2.22) donne que

$$(2.42) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pN * \eta_v * (pN_p - \varepsilon) = N * (\mu'_{Cv} - \varepsilon) \quad (\text{vaguement}).$$

De la même manière, on voit que (2) $\Leftrightarrow$ (3). La démonstration est ainsi complète.

Dans ce cas, $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right) \subset \mathcal{D}^+ \left(\lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) \right)$ et il existe une mesure de Radon positive σ en dehors de l'origine, et une seule telle que, pour $f \in \mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque,

$$(2.43) \quad \int f d\sigma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) * f(0).$$

On a aussi que $\sigma = \lim_{v \downarrow \{0\}} \frac{1}{\int d\eta_v} (\widehat{N * \mu'_{Cv}} - \check{N})$ (vaguement) en dehors de

l'origine.

En rappelant la présente démonstration, on voit la remarque suivante:

Remarque 20. Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$, $N = O(N')$ et que N soit régulier par rapport à N' . Alors $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ est dense dans C_K^+ .

En effet, de la même manière, (2.41) a lieu, et donc $\mathcal{D}^+ \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) \right)$ est dense dans C_K^+ .

La remarque suivante résulte immédiatement de la définition de la sous-médiane conditionnelle.

Remarque 21. Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Alors pour que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, il faut et il suffit que, pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, il existe une mesure de Radon positive $\eta_v \neq 0$ portée par v telle que $\frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * \eta_v$ converge vaguement dans X lorsque $t \rightarrow 0$ et que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * \eta_v \geq 0$ en dehors de v .

La proposition suivante jouera un rôle dans la démonstration du théorème principal.

PROPOSITION 22. Soient N un noyau de convolution, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu et p une constante > 0 . Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que $N' \geq p \int_0^\infty \exp(-pt) N' * \alpha_t dt$ et que N soit régulier par rapport à N' . Posons $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$. Pour un ouvert ω , on désigne par $\mu'_{p,\omega}$ la mesure balayée de ε sur ω relativement à N_p . Si, pour un ouvert relativement compact ω quelconque, $N * (\varepsilon - pN_p) * \mu'_{p,\omega} \geq N * (\varepsilon - pN_p)$ dans ω , alors N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{V}$ quelconque. On choisit une famille filtrante à droite $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ des ouverts relativement compacts telle que $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = Cv$. Alors $\mu'_{p,Cv} = \lim_\alpha \mu'_{p,\omega_\alpha}$ et $N_p * \mu'_{p,Cv} = \lim_\alpha N_p * \mu'_{p,\omega_\alpha}$ (vaguement). D'après l'inégalité $N' \geq pN' * N_p * \mu'_{p,\omega_\alpha}$ ($\alpha \in A$), le lemme 17 donne que

$$(2.44) \quad pN * N_p * \mu'_{p,Cv} = \lim_{\alpha} pN * N_p * \mu'_{p,\omega_{\alpha}} \quad (\text{vaguement}).$$

Donc on a

$$(2.45) \quad N * (\varepsilon - pN_p) * \mu'_{p,Cv} \geq N * (\varepsilon - pN_p) \text{ dans } Cv.$$

Posons $\eta_{p,v} = N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}$; alors $\eta_{p,v} \neq 0$, d'après l'injectivité de N_p . D'après le lemme 17, on a

$$\begin{aligned} (2.46) \quad & N * (\varepsilon - pN_p) * (\mu'_{p,Cv} - \varepsilon) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} N * (\varepsilon - pN_p) * \eta_{p,v} * (\exp(-pt)\alpha_t - \varepsilon) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} N * \eta_{p,v} * (\alpha_t - \varepsilon) - \frac{1}{t} (1 - \exp(-pt)) N * \eta_{p,v} * \alpha_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{t} pN * N_p * \eta_{p,v} * (\varepsilon - \exp(-pt)\alpha_t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} N * \eta_{p,v} * (\alpha_t - \varepsilon). \end{aligned}$$

D'après la remarque 21, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. La démonstration est ainsi complète.

Considérons la convergence d'une famille filtrante des résolvante.

PROPOSITION 23. *Soient $((N_{p,\alpha})_{p>0})_{\alpha \in A}$ une famille filtrante des résolvantes des noyaux de convolution et N' un noyau de convolution non-zéro. Supposons que, pour $p > 0$ et $\alpha \in A$ quelconques, $N' \geq pN' * N_{p,\alpha}$. Si, pour $p_0 > 0$, $(N_{p_0,\alpha})_{\alpha \in A}$ et $(N' * N_{p_0,\alpha})_{\alpha \in A}$ convergent vaguement et si $\lim_{\alpha} N' * N_{p_0,\alpha} = N' * \left(\lim_{\alpha} N_{p_0,\alpha} \right)$, alors, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement aussi. Posons $N_p = \lim_{\alpha} N_{p,\alpha}$ ($p > 0$). Alors $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante et, pour $p > 0$ quelconque, $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $N' * N_p$.*

Démonstration. Posons $N_{p_0} = \lim_{\alpha} N_{p_0,\alpha}$. Soit $p > 0$ quelconque.

Comme, pour tout $\alpha \in A$, $N' \geq pN' * N_{p,\alpha}$, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée. Soient N_p et N'_p deux points vaguement adhérents de $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ quelconques. On choisit deux sous-familles filtrantes $(N_{p,\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ et $(N_{p,\alpha''})_{\alpha'' \in A''}$ de $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ qui convergent vaguement vers N_p et N'_p , respectivement. Soit $f \in C_K^+$ quelconque. Comme $N_{p,\alpha} < N'$ (voir la proposition 10), on peut supposer qu'il existe $g \in C_K^+$ telle que, pour $\alpha \in A$ quelconque, $N_{p,\alpha} * f \leq N' * g$ sur X . Alors on a

$$\begin{aligned}
(2.47) \quad N_p * N_{p_0} * f(0) &\leq \varliminf_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'} * f(0) \leq \overline{\lim}_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'} * f(0) \\
&= \overline{\lim}_{\alpha'} (N' * N_{p_0,\alpha'} * g(0) - N_{p_0,\alpha'} * (N' * g - N_p * f)(0)) \\
&\leq N' * N_{p_0} * g(0) - N_{p_0} * (N' * g - N_p * f)(0) \\
&= N_p * N_{p_0} * f(0) .
\end{aligned}$$

Comme f est quelconque, $N_p * N_{p_0} = \lim_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'}$ (vaguement). De la même manière, on a $N'_p * N_{p_0} = \lim_{\alpha''} N_{p,\alpha''} * N_{p_0,\alpha''}$ (vaguement). Donc

$$(2.48) \quad N_{p_0} = N_p * (\varepsilon - (p_0 - p)N_{p_0}) = N'_p * (\varepsilon - (p_0 - p)N_{p_0}) .$$

Si $|p_0 - p| < p_0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p)N_{p_0})^{*n}$ converge vaguement et

$$(2.49) \quad N_p = N'_p = N_{p_0} * \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p)N_{p_0})^{*n} \right) ,$$

car $N' \geq p_0 N' * N_{p_0}$. On voit ainsi que, pour $p \in (0, 2p_0)$ quelconque, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement. On voit encore, par récurrence, que, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement. En remarquant (2.47), on voit que $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. De la même manière, on voit que, pour $p \geq p_0$ quelconque, $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $N' * N_p$. En remarquant que, pour $\alpha \in A$ et un entier $n \geq 1$ quelconques, $N' \geq N' * (p_0 N_{p_0})^{*n}$, on voit, par récurrence, que, pour un entier $n \geq 1$ quelconque,

$$(2.50) \quad \lim_{\alpha} N' * (p_0 N_{p_0,\alpha})^{*n} = N' * (p_0 N_{p_0})^{*n} \quad (\text{vaguement}) .$$

Soient $0 < p < p_0$ et $f \in C_K^+$ quelconques. Alors, pour un entier $k \geq 1$ quelconque,

$$\begin{aligned}
(2.51) \quad \int f dN' * N_p &\leq \varliminf_{\alpha} \int f dN' * N_{p,\alpha} \leq \overline{\lim}_{\alpha} \int f dN' * N_{p,\alpha} \\
&= \overline{\lim}_{\alpha} \left(\frac{1}{p_0 - p} \int f dN' * \sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p)N_{p_0,\alpha})^{*n} \right) \\
&\leq \int f dN' * N_p + \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)^n \int f dN' .
\end{aligned}$$

On voit ainsi que $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $N' * N_p$. La démonstration est ainsi complète.

PROPOSITION 24. Soient N un noyau de convolution vérifiant $N < N$,

$N' \neq 0$ un noyau de convolution et $p > 0$ une constante. Si $N' \geq pN' * N$, $N' \neq pN' * N$ et $N < N' * (\varepsilon - pN)$, alors il existe un noyau de convolution N_0 et la résolvante $(N_q)_{q \geq 0}$ associée à N_0 telle que $N_p = N$. Dans ce cas, N_0 est déterminé d'une manière unique et $N_0 < N'$.

Démonstration. Comme $N' \geq pN' * N$ et $N' \neq pN' * N$, $\sum_{n=1}^{\infty} (pN)^{*n}$ converge vaguement, et donc, en utilisant le lemme de J. Deny, $\bigcap_{v \in \mathcal{V}} P(N; v) = \{0\}$; c'est-à-dire, N est régulier. D'après la remarque 9, il existe la résolvante $(M_q)_{q \geq 0}$ associée à N . D'après $N < N' * (\varepsilon - pN)$, on a, pour tout $q > 0$,

$$(2.52) \quad qN' * (\varepsilon - pN) * M_q \leq N' * (\varepsilon - pN),$$

et donc $(p + q)N' * M_q \leq N'$. Posons, pour $q \in [0, p)$ quelconque, $N_q = \frac{1}{p - q} \sum_{n=1}^{\infty} ((p - q)M_0)^{*n}$ et, pour $q \in [p, \infty)$ quelconque, $N_q = M_{q-p}$. Alors, pour $q \geq 0$ quelconque,

$$(2.53) \quad N_q - N_p = (p - q)N_p * N_q \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 0} N_q = N_0.$$

Donc, pour $q \geq 0$ et $q' > 0$ quelconques,

$$(2.54) \quad \begin{aligned} N_q - N_{q'} &= (p - q)(N_{q'} + (q' - p)N_p * N_{q'}) * N_q \\ &\quad - (p - q')(N_q + (q - p)N_p * N_q) * N_{q'} \\ &= (q' - q)N_q * N_{q'}. \end{aligned}$$

D'après (2.53) et (2.54), $(N_q)_{q \geq 0}$ est la résolvante associée à N_0 . L'unicité de N_0 est bien connue. On a, pour $q > 0$, $N' \geq qN' * N_q$, et donc la proposition 10 donne que, pour $q > 0$ quelconque, $N_q < N'$. En faisant $q \downarrow 0$, on arrive à $N_0 < N'$. La démonstration est ainsi complète.

§3. Le principe de domination relatif et la sous-médiane conditionnelle

Dans ce paragraphe, on supposera toujours qu'il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$.

LEMME 25. Soit $(N_p)_{p > 0}$ une résolvante des noyaux de convolution $\neq 0$. Alors il existe le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p > 0}$.

Démonstration. Pour $p > 0$ et $v \in \mathcal{V}$, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ une mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p . Comme, pour $0 < q < p$, on a

$N_q \geq N_q * \mu'_{p,Cv}$, le lemme de J. Deny donne que $\lim_{v \uparrow X} N_p * \mu'_{p,Cv} = 0$ (vaguement). Donc il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que $N_p \neq N_p * \mu'_{p,Cv}$. D'après $N_p < N_p$, $\text{supp}(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) \ni 0$. Soit Γ l'ensemble des périodes de N_p ; alors Γ est un sous-groupe fermé de X . Comme tout le point de Γ est aussi une période de $N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}$, on a $\Gamma \subset v$. En vertu de notre hypothèse pour X , on a $\Gamma = \{0\}$. Donc la proposition 13 donne le présent lemme.

Montrons le premier théorème principal.

THÉORÈME 26. *Soient N un noyau de convolution et N' un noyau de convolution $\neq 0$. Supposons que N est régulier par rapport à N' .*

Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

(a) *N vérifie le principe de domination relatif à N' .*

(b) *$N = O(N')$ et il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et que, pour $t \geq 0$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$.*

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (a): On peut supposer que $N \neq 0$. Comme N est régulier par rapport à N' , $N' \neq 0$. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$; alors, $N' \geq pN' * N_p$. Montrons que $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement). Supposons contrairement que cette égalité n'a pas lieu. Alors, d'après la proposition 11 et notre hypothèse pour X , $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = \varepsilon$ (vaguement) et, pour tout $p > 0$, $\text{supp}(N_p) \subset \{0\}$, et donc $\text{supp}(\alpha_t) \subset \{0\}$. Comme $N' \geq N' * \alpha_t$ et $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$), il existe une constante $a > 0$ telle que $\alpha_t = \exp(-at)\varepsilon$. Alors $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p+a} = 0$, d'où une contradiction. On obtient ainsi que $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement). D'après le lemme 17, on a aussi $\lim_{p \rightarrow 0} N * (pN_p) = 0$ (vaguement). Pour montrer que $N < N'$, il suffit de montrer que, pour $f, g \in C_K^+$ quelconques,

$$(3.1) \quad N * f < N' * g \text{ sur } \text{supp}(f) \Rightarrow N * f \leq N' * g \text{ sur } X.$$

On choisit $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que, pour une mesure de Radon positive ν portée par v_0 de masse totale d'unité quelconque,

$$(3.2) \quad N * \nu * f(x) < N' * g(x) \text{ sur } \text{supp}(f) + v_0,$$

où $\text{supp}(f) + v_0 = \{x + y; x \in \text{supp}(f), y \in v_0\}$. Pour $v \in \mathcal{V}$, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p . Posons

$\mu'_{Cv} = \lim_{p \rightarrow 0} \mu'_{p,Cv}$ et $\eta_v = \lim_{p \rightarrow 0} (N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})$ (voir la proposition 15). D'après la proposition 15, on a $\eta_v \neq 0$. D'après la proposition 10, on a $N_p < N'$. En utilisant la proposition 2, on voit qu'il existe $h_p \in C_K^+$ vérifiant $N_p * h_p = N' * g$ sur $\text{supp}(f) + v_0$ et $N_p * h_p \leq N' * g$ sur X . Pour $p > 0$ et $v \in \mathcal{V}$ vérifiant $v \subset v_0$ quelconques, on pose

$$\lambda_{v,1} = \frac{1}{\int d\eta_v} (N - N * \mu'_{Cv})^+ \quad \text{et} \quad \lambda_{v,2} = \frac{1}{\int d\eta_v} (N - N * \mu'_{Cv})^-.$$

Alors, d'après la proposition 19, on a $\text{supp}(\lambda_{v,1}) \subset v$. D'après la proposition 15, on a

$$\begin{aligned} (3.3) \quad & N_p * \lambda_{v,1} * f - N_p * \lambda_{v,2} * f \\ &= \frac{1}{\int d\eta_v} N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) * f < N_p * h_p \\ &\quad \text{sur } \text{supp}(f) + v_0 \supset \text{supp}(f * \lambda_{v,1}). \end{aligned}$$

En utilisant $N_p < N_p$, on a

$$(3.4) \quad \frac{1}{\int d\eta_v} N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) * f \leq N_p * h_p \leq N' * g \text{ sur } X.$$

En faisant $v \downarrow \{0\}$ et ensuite $p \rightarrow 0$, on arrive à $N * f \leq N' * g$ sur X , d'où (3.1). On voit ainsi que (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): D'après la proposition 18, il suffit de montrer (a) $\Rightarrow$ (b) dans le cas où $N(\{0\}) = 0$. Soit a une constante > 0 quelconque. On remarque que $S(N + a\varepsilon) \subset S(N)$ et que $N + a\varepsilon$ est régulier par rapport à N' . Soit μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ relativement à $(N + a\varepsilon, N')$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$. D'après le corollaire 4 et la proposition 18, il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_{a,t})_{t \geq 0}$ et $(\beta_{a,t})_{t \geq 0}$ tels que l'on ait:

$$(3.5) \quad \alpha_{a,t} = \exp(-t) \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n (\mu''_a)^n}{n!} \right).$$

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\beta_{a,t} - \varepsilon) = (N + a\varepsilon) * (\mu''_a - \varepsilon) \text{ (vaguement)}.$$

On a, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_{a,t}$. Soient $\varphi \neq 0 \in C_K^+$ quelconque fixée et $x_0 \in X$ vérifiant $\varphi(x_0) > 0$ fixé. Posons, pour toute $c > 0$,

$g_c = \left(\int_0^\infty \exp(-t) \alpha_{a,ct} dt \right) * \varphi$. Alors $(g_c)_{c>0}$ converge uniformément vers φ sur tout compact lorsque $c \rightarrow 0$ et vers 0 sur tout compact lorsque $c \rightarrow \infty$, car

$$(3.7) \quad g_c = \left(\frac{1}{c} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{c}t\right) \alpha_{a,ct} dt \right) * \varphi,$$

$\left(\int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_{a,ct} dt \right)_{p>0}$ est une résolvante et $\text{supp}(\alpha_t)$ n'est pas compact dès que $\mu_a'' \neq 0$ ($t > 0$). Il existe donc une constante $c_a > 0$ telle que $g_{c_a}(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$. Pour tout $p > 0$, on pose $N_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_{a,ca} dt$. Alors $(N_{p,a})_{p>0}$ est une résolvante et, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geq pN' * N_{p,a}$. Donc, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,a})_{a>0}$ est vaguement bornée. On peut supposer que $(N_{1,a})_{a>0}$ converge vaguement lorsque $a \rightarrow 0$. Posons $N_1 = \lim_{a \rightarrow 0} N_{1,a}$. Alors $N_1 * \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$, et donc $N_1 \neq 0$. On a aussi $N_1 < N_1$ et $N' \geq N' * N_1$. Comme $N_{1,a} < N'$ et $N_{1,a} < N' * (\varepsilon - N_{1,a})$, on a $N_1 < N'$ et, pour $f \in C_K^+$ vérifiant $f \leq 1$ quelconque, $N_1 < N' * (\varepsilon - fN_1)$. En faisant $f \uparrow 1$, on a $N_1 < N' * (\varepsilon - N_1)$. Montrons qu'il existe une résolvante $(M_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution $\neq 0$ vérifiant $M_1 = N_1$. Supposons d'abord que $N' = N' * N_1$. Alors $N' * N_1 = \lim_{a \rightarrow 0} N' * N_{1,a}$ (vaguement). D'après la proposition 23, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,a})_{a>0}$ converge vaguement lorsque $a \rightarrow 0$ et que, en posant $N_p = \lim_{a \rightarrow 0} N_{p,a}$, $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. On a aussi $N' = pN' * N_p$, et donc $N_p \neq 0$. Par conséquent $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante demandée. Supposons ensuite que $N' \neq N' * N_1$. Alors, d'après la proposition 24, il existe une résolvante $(M_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution $\neq 0$, et une seule telle que $M_1 = N_1$. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(M_p)_{p>0}$. Comme $N_1 * \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$, $N_1 \neq \varepsilon$, et donc, pour tout $t > 0$, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Montrons finalement que N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. Soit ω un ouvert relativement compact dans X quelconque. On choisit une famille filtrante à droite $(\omega_a)_{a \in A}$ des ouverts telle que $\bar{\omega}_a \subset \omega$ et $\bigcup_{a \in A} \omega_a = \omega$. Pour $a > 0$, on désigne par $\mu'_{\omega_a, a}$ la mesure balayée de ε sur ω_a relativement à $N_{1,a}$. Comme $N_{1,a} < N'$, $N' \geq N' * \mu'_{\omega_a, a}$, et donc $(\mu'_{\omega_a, a})_{a>0}$ est vaguement bornée. On a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (N + a\varepsilon) * (\varepsilon - N_{1,a}) * (\mu'_{\omega_a, a} - \varepsilon) \\ = c_a(N + a\varepsilon) * (\varepsilon - \mu_a'') * N_{1,a} * (\mu'_{\omega_a, a} - \varepsilon) \geq 0 \text{ dans } \omega_a. \end{aligned}$$

Soit μ'_{ω_α} un point vaguement adhérent de $(\mu'_{\omega_\alpha, a})_{a>0}$ lorsque $a \downarrow 0$. D'après le lemme 17 et (3.8), on a

$$(3.9) \quad N * (\varepsilon - N_1) * (\mu'_{\omega_\alpha} - \varepsilon) \geq 0 \text{ dans } \omega_\alpha.$$

On a aussi $\text{supp}(\mu'_{\omega_\alpha}) \subset \bar{\omega}_\alpha$, $N_1 * \mu'_{\omega_\alpha} \leq N_1$ dans X et $N_1 * \mu'_{\omega_\alpha} = N_1$ dans ω_α . Soit μ'_ω la mesure balayée de ε sur ω relativement à N_1 . Alors μ'_ω est un point vaguement adhérent de $(\mu'_{\omega_\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}}$ lorsque $\omega_\alpha \uparrow \omega$, et donc

$$(3.10) \quad N * (\varepsilon - N_1) * (\mu'_\omega - \varepsilon) \geq 0 \text{ dans } \omega.$$

D'après la proposition 22, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. Comme, pour tout $p > 0$, $N' \geq pN' * M_p$, on a, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$. On voit ainsi (a) $\Rightarrow$ (b). La démonstration est complète.

En particulier, on aura corollaire suivant:

COROLLAIRE 27. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à ξ . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

- (a) *N vérifie le principe classique du maximum; c'est-à-dire, $N < \xi$.*
- (b) *N est borné⁽⁵⁾ et il existe un semi-groupe vaguement continu sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$.*

On dit que $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est sous-markovien si, pour tout $t \geq 0$, $\int d\alpha_t \leq 1$.

En regardant la démonstration du théorème 26, on verra la remarque suivante:

Remarque 28. Soit N un noyau de convolution. Supposons qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' . Alors il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et que, pour $N'' \in S(N)$ et $t \in \mathbf{R}^+$ quelconques, $N'' \geq N'' * \alpha_t$.

Rappelons la démonstration du théorème 26. Soit a une constante > 0 quelconque. Soient μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N + a\varepsilon)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$ et $(\alpha_{a,t})_{t \geq 0}$, $(\beta_{a,t})_{t \geq 0}$ les deux semi-groupes vaguement continus définis par μ''_a de la même manière que dans le théorème 26. En faisant la même discussion comme dans

(5) Cela signifie que, pour $f \in C_K$ quelconque, $N * f$ est bornée sur X .

le théorème 26 concernant la famille $((\alpha_{a,t})_{t \geq 0})_{a > 0}$ des semi-groupes vaguement continus, on voit facilement qu'il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ demandé.

QUESTION 29. Est-ce que $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ dans la remarque 28 est toujours unique excepté la multiplication constante?

Soient $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ deux semi-groupes vaguement continus. On dit que $(\beta_t)_{t \geq 0}$ est un multiple constant de $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ si, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $\beta_t = \alpha_{ct}$, où c est une constante > 0 indépendante de t .

Dans le théorème 26, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ n'est pas toujours unique excepté la multiplication constante. Par exemple, considérer les noyaux de Riesz-Frostman dans $\mathbf{R}^n$.

Le théorème suivant indique que le principe classique du maximum et le principe de domination relatif au noyau de convolution de Hunt sont essentiels.

THÉORÈME 30. Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$. Supposons que le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N)$ est égal à X et qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' . Alors on a (a) ou bien (b).

(a) Il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que $S(N) = \{a\varphi\xi; a \in \mathbf{R}^+\}$.

(b) Il existe un noyau de convolution de Hunt N_0 tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 et que

$$(3.11) \quad S(N) = \{N_0 * \lambda + \eta; \lambda \in D^+(N_0), \eta \text{ est } \geq 0 \text{ et } N_0\text{-harmonique}\}.$$

Dans (b), N_0 est uniquement déterminé excepté la multiplication constante.

On dit qu'une fonction finie et continue φ est exponentielle si, pour $x, y \in X$ quelconques, $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$. On voit évidemment que $S(N) = \{a\varphi\xi; a \in \mathbf{R}^+\}$ et $S(\varphi^{-1}N) = \{a\xi; a \in \mathbf{R}^+\}$ sont équivalents, où $\varphi^{-1}N$ est le noyau de convolution dont la densité par rapport à N est égale à φ^{-1} .

Une mesure de Radon réelle η est dite N_0 -harmonique si, pour tout $t \geq 0$, $\eta = \eta * \alpha_t$, où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé à N_0 . Dans (b), N_0 est la plus petite majorante de N (voir [11]).

Démonstration. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et que, pour $N'' \in S(N)$ et $t \in \mathbf{R}^+$ quelconques, $N'' \geq N'' * \alpha_t$.

Pour $p > 0$ quelconque, on pose $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$. Alors, pour $N'' \in S(N)$ quelconque, $N'' \geq pN'' * N_p$.

Supposons d'abord qu'il existe $p_0 > 0$ et $N'' \neq 0 \in S(N)$ tels que $N'' \neq p_0 N'' * N_{p_0}$. Dans ce cas, on montrera que (b) a lieu. D'après la proposition 24, $\sum_{n=1}^\infty (p_0 N_{p_0})^{*n}$ converge vaguement. Alors $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ existe et $N_0 = \sum_{n=1}^\infty p_0^{n-1} (N_{p_0})^{*n}$. D'après les définitions, N_0 est un noyau de convolution de Hunt et N est conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 . On a évidemment $N < N_0$. D'après la proposition 10, on a, pour $N'' \in S(N)$ et $p > 0$ quelconques, $N_p < N''$, et donc $N_0 < N''$. Par conséquent, N_0 est la plus petite majorante de N . L'égalité (3.11) et l'unicité de N_0 sont déjà connues (voir la proposition 31 et la remarque 43 dans [11]). On voit que (b) a lieu.

Supposons ensuite que, pour $p > 0$ et $N'' \in S(N)$ quelconques, $N'' = pN'' * N_p$. Dans ce cas, on montrera que (a) a lieu. On remarque que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, $\text{supp}(N_p) = \text{supp}(N_q)$ et que $\text{supp}(N) \ni 0$. Montrons que, pour $p > 0$, $\text{supp}(N) \subset \text{supp}(N_p)$. Supposons contrairement que cette inclusion n'a pas lieu. Alors il existe deux fonctions $f \neq 0$ et $g \neq 0 \in C_K^+$ et $y \in X$ tels que $\text{supp}(f) \subset \{x \in X; g(x) > 0\}$, $N * f(y) > 0$ et que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p * g(y) = 0$. Comme $\lim_{p \rightarrow 0} pN * N_p = 0$ (vaguement), il existe $p_0 > 0$ tel que $N * (\varepsilon - p_0 N_{p_0}) * f(y) > 0$. Comme $\text{supp}(N_{p_0}) \ni 0$, il existe une constante $a > 0$ telle que

$$(3.12) \quad N * (\varepsilon - p_0 N_{p_0}) * f \leq a N_{p_0} * g \text{ sur } \text{supp}(f).$$

De la même manière que dans le théorème 26 ((b) $\Rightarrow$ (a)), on a $N * (\varepsilon - p_0 N_{p_0}) * f \leq a N_{p_0} * g$ sur X , d'où une contradiction. Par conséquent, $\text{supp}(N) \subset \text{supp}(N_p)$ ($p > 0$), et donc le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N_p)$ est égal à X . Remarquons que, pour $N'' \in S(N)$ quelconque, $N'' = N'' * N_1$. En utilisant le théorème 2 dans [3], on voit qu'il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que

$$(3.13) \quad \varphi(x) = \varphi * N_1(x) = \left(\int \frac{1}{\varphi} dN_1 \right) \varphi(x) \text{ sur } X,$$

car $\{M: \text{noyau de convolution}; M = M * N_1\}$ est vaguement fermé. Donc $\int \varphi^{-1} dN_1 = 1$. Comme φ^{-1} est aussi exponentielle, on voit que $(\varphi^{-1} N_p)_{p>0}$ est aussi une résolvante, et pour $p > 0$ quelconque, $p \int \varphi^{-1} dN_p = 1$. On

voit facilement que $S(\varphi^{-1}N) = \{\varphi^{-1}N''; N'' \in S(N)\}$. D'après la proposition 10 et (3.13), on a, pour tout $p > 0$, $\varphi\xi \in S(N_p)$. De la même manière que dans le théorème 26 ((b) $\Rightarrow$ (a)), on a $\varphi\xi \in S(N)$, et donc $S(\varphi^{-1}N) \ni \xi$. Supposons que $S(N) \neq \{a\varphi\xi; a \in \mathbb{R}^+\}$. Comme $\text{supp}(N) \ni 0$, $0 \in S(N)$. Donc il existe $N'' \neq 0 \in S(\varphi^{-1}N)$ tel que, pour tout $a > 0$, $N'' \neq a\xi$. Alors il existe $f \neq 0 \in C_K^+$ telle que, $\min(N'' * f, 1)$ ne soit pas une constante. Comme, pour $p > 0$ quelconque,

$$(3.14) \quad \min(N'' * f, 1) \geq (\min(N'' * f, 1)) * (p\varphi^{-1}N_p),$$

on a $(\min(N'' * f, 1))\xi \in S(\varphi^{-1}N)$, et donc $(\min(N'' * f, 1))\varphi\xi \in S(N)$. D'après notre hypothèse, on a, pour $p > 0$ quelconque,

$$(3.15) \quad (\min(N'' * f, 1)) * (p\varphi^{-1}N_p) = \min(N'' * f, 1).$$

En utilisant le théorème 1 dans [3], on voit que $\min(N'' * f, 1)$ est une constante sur le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(\varphi^{-1}N_p)$; c'est-à-dire, $\min(N'' * f, 1)$ est une constante. Cela est une contradiction. On voit ainsi que (a) a lieu. La démonstration est complète.

Dans le présent théorème, il est très naturel de supposer que le sous-groupe fermé X' engendré par $\text{supp}(N)$ est égal à X , car, en général, il suffit de considérer la restreinte de N sur X' au lieu de N .

Remarque 31. Soient N et N' les mêmes que dans le théorème 30. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $\neq 0$ non-proportionnel à N' dans $S(N)$. Alors le semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ obtenu dans la remarque 28 est uniquement déterminé excepté la multiplication constante (cf. la question 29).

Cela est un résultat immédiat de l'unicité de la plus petite majorante de N (excepté la multiplication constante).

Le théorème 30 donne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 32. *Soient N, N' les mêmes que dans le théorème 30 et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu obtenu dans la remarque 28. Alors il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que $(\varphi^{-1}\alpha_t)_{t \geq 0}$ soit un semi-groupe vaguement continu et markovien⁽⁶⁾, ou bien $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens.*

(6) On dit qu'un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est markovien si, pour tout $t > 0$, $\int d\alpha_t = 1$.

Démonstration. On peut supposer que $N \neq 0$. Soit X' le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N)$. Alors, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $\text{supp}(\alpha_t) \subset X'$. Supposons que $\int_0^\infty \alpha_t dt$ n'a pas un sens. Comme toute la fonction exponentielle >0 sur X' peut être prolongée en une fonction exponentielle >0 sur X , le théorème 30 donne qu'il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X tel que $S(N) \supset \{a\varphi\xi; a \in \mathbf{R}^+\}$. Comme $\varphi \geq \varphi * \alpha_t$, $(\varphi^{-1}\alpha_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$; alors $\varphi = \varphi * (pN_p)$, et donc, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $\int \varphi^{-1} d\alpha_t = 1$, d'où le corollaire 32.

On aura aussi le corollaire suivant:

COROLLAIRE 33. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à ξ . Supposons que le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N)$ est égal à X . Si N vérifie le principe classique du maximum, alors on a (a) ou bien (b).*

(a) $S(N) = \{a\xi; a \in \mathbf{R}^+\}$.

(b) *Il existe un noyau de convolution de Hunt sous-markovien $N_0^{(7)}$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 et que*

$$(3.16) \quad S(N) = \overline{\{N_0 * \lambda + a\xi; \lambda \in D^+(N_0), a \in \mathbf{R}^+\}},$$

où l'adhérence est au sens de la topologie vague.

Démonstration. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu obtenu dans la remarque 28. Comme $S(N) \ni \xi$, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est sous-markovien. Supposons que (a) n'a pas lieu. Alors, d'après le théorème 30, $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens. Soit $N' \in S(N)$ quelconque. Pour $f \neq 0 \in C_K^+$ et $a \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $(\min(N' * f, a))\xi \in S(N)$. D'après le théorème 30, il existe $\lambda_{f,a} \in D^+(N_0)$ et une mesure de Radon positive et N_0 -harmonique $\eta_{f,a}$ telles que

$$(3.17) \quad (\min(N' * f, a))\xi = N_0 * \lambda_{f,a} + \eta_{f,a}.$$

On remarque ici que, pour tout $t \geq 0$, $\int d\alpha_t = 1$ ou bien que, pour tout

(7) On dit qu'un noyau de convolution de Hunt est sous-markovien si le semi-groupe associé est sous-markovien.

$t > 0$, $\int d\alpha_t < 1$. Si, pour $t > 0$, $\int d\alpha_t < 1$, alors $\eta_{f,a} = 0$. Supposons $\int d\alpha_t = 1$. D'après le théorème 1 dans [3], tout le point du sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N_0)$ est une période de $\eta_{f,a}$, car $\eta_{f,a}$ est borné. Comme le sous-groupe fermé engendré par $\text{supp}(N_0)$ est égal à X , $\eta_{f,a}$ est proportionnelle à ξ . Ceux-ci donnent que (b) a lieu. La démonstration est ainsi complète.

En généralisant partiellement le théorème 2 dans [10], on obtiendra le théorème suivant:

THÉORÈME 34. *Soit N un noyau de convolution et supposons qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N' . Alors il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ tels que, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \alpha_t$ et $N' \geq N' * \beta_t$, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$ et que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,*

$$(3.18) \quad (N * (\varepsilon - pN_p) + qN_p) * N'_q = N_p,$$

où $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ et où $N'_q = \int_0^\infty \exp(-qt)\beta_t dt$.

Démonstration. On peut supposer que $N \neq 0$, car si $N = 0$, alors, en posant $\alpha_t = \exp(-t)\varepsilon$ et $\beta_t = \varepsilon$, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ sont les deux semi-groupes vaguement continus demandés. Soit a une constante > 0 quelconque. Soit μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N + a\varepsilon)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$. On note $(\alpha_{a,t})_{t \geq 0}$ et $(\beta_{a,t})_{t \geq 0}$ les deux semi-groupes vaguement continus définis par μ''_a de la même manière que dans le théorème 26. Soit c_a une constante > 0 définie dans la démonstration du théorème 26. Posons, pour $p > 0$ quelconques, $N_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_{a,cat} dt$ et $N'_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt)\beta_{a,cat} dt$. Alors, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geq N' * (pN_{p,a})$ et $N' \geq N' * (pN'_{p,a})$, d'après la proposition 16. Pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, on a

$$(3.19) \quad c_a(\varepsilon - \mu''_a) * N_{p,a} = \varepsilon - pN_{p,a} \text{ et } c_a(N + a\varepsilon) * (\varepsilon - \mu''_a) * N'_{q,a} = \varepsilon - qN'_{q,a},$$

et donc

$$(3.20) \quad ((N + a\varepsilon) * (\varepsilon - pN_{p,a}) + qN_{p,a}) * N'_{q,a} = N_{p,a}.$$

De la même manière que dans le théorème 26, on peut supposer que

$(N_1, a)_{a>0}$ converge vaguement vers un noyau de convolution N_1 sur X lorsque $a \rightarrow 0$.

Supposons d'abord que $N' = N' * N_1$. De la même manière que dans le théorème 26, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \lim_{a \rightarrow 0} N_{p,a} \neq 0$ (vaguement) existe, $(N_p)_{p>0}$ est une résolvente et que $N' = N' * (pN_p) = \lim_{a \rightarrow 0} N' * (pN_{p,a})$ (vaguement). Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p>0}$. Alors on voit aussi que, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$ et que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. Pour $q > 0$ quelconque, on désigne par N'_q un point vaguement adhérent de $(N'_{q,a})_{a>0}$ lorsque $a \rightarrow 0$ et on choisit une famille filtrante à gauche $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ des nombres > 0 telle que $\lim_{\alpha} a_\alpha = 0$ et que $N'_q = \lim_{\alpha} N'_{q,a_\alpha}$ (vaguement). De la même manière que dans la proposition 23, on voit que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$(3.21) \quad \lim_{\alpha} N_{p,a_\alpha} * N'_{q,a_\alpha} = N_p * N'_q \quad (\text{vaguement}).$$

En utilisant le lemme 17 et (3.20), on a

$$(3.22) \quad (N * (\varepsilon - pN_p) + qN_p) * N'_q = N_p \quad (p > 0, q > 0).$$

On a, en même temps, $N'_q \neq 0$. Pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, on a

$$(3.23) \quad \begin{aligned} N_1 * N'_p &= (N * (\varepsilon - N_1) + qN_1) * N'_q * N'_p \\ &= (N * (\varepsilon - N_1) + pN_1) * N'_q * N'_p + (q - p)N_1 * N'_q * N'_p \\ &= N_1 * (N'_q + (q - p)N'_p * N'_q), \end{aligned}$$

et donc l'injectivité de N_1 donne que $N'_p - N'_q = (q - p)N'_p * N'_q$. Ceci donne que, pour $p > 0$ quelconque, $N'_p = \lim_{a \rightarrow 0} N'_{p,a}$ (vaguement) existe et que $(N'_p)_{p>0}$ est une résolvente. Soit $(\beta_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(N'_p)_{p>0}$. Comme $N' \geq pN' * N'_p$ ($p > 0$), on a, pour $t \in \mathbb{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \beta_t$. On voit ainsi que $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ sont deux semi-groupes vaguement continus demandés.

Supposons que $N' \neq N' * N_1$. En regardant la proposition 24 et le théorème 26, on voit qu'il existe un noyau de convolution de Hunt $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$, et un seul tel que $N_1 = \int_0^\infty \exp(-t) \alpha_t dt$ et que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 . On a aussi $N < N_0$ (voir (3.3) et (3.4)), et donc $N = O(N_0)$. D'après le théorème 2 dans [10] (ou bien le théorème 32 dans [11]), il existe un noyau de convolution de Hunt

$N' = \int_0^\infty \beta_t dt$, et un seul tel que

$$(3.24) \quad N * N' = N_0 .$$

Soient $(N_p)_{p>0}$ la résolvante associée à N_0 et $(N'_p)_{p>0}$ la résolvante associée à N' . En utilisant l'équation résolvante, on voit que (3.24) donne (3.18), d'où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ sont deux semi-groupes vaguement continus demandés. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 35. Soient $N, N', (\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ les mêmes que dans le théorème 34. Alors il existe la mesure singulière β associée à $(\beta_t)_{t \geq 0}$ ⁽⁸⁾ et, pour $f \in C_K^+(C\{0\}) \cap \mathcal{D}^+\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(N * \alpha_t - N)\right)$ quelconque,

$$(3.25) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(N * \alpha_t - N) * f(0) = \int \check{f} d\beta .$$

Démonstration. Comme, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, $N' \geq N' * \beta_t$, la proposition 15 et (2.40) donnent qu'il existe la mesure singulière β associée à $(\beta_t)_{t \geq 0}$. Soit α' la mesure de Radon positive en dehors de l'origine telle que, pour $f \in C_K^+(C\{0\}) \cap \mathcal{D}^+\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(N * \alpha_t - N)\right)$ quelconque,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(N * \alpha_t - N) * f(0) = \int \check{f} d\alpha' .$$

Soient N_p et N'_p les mêmes que dans le théorème 34. Soit $v \in \mathcal{V}$ quelconque. Soient $\mu_{Cv,p}^{(1)}$ et $\mu_{Cv,p}^{(2)}$ la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p et celle relativement à N'_p , respectivement. Posons $\mu_{Cv}^{(j)} = \lim_{p \rightarrow 0} \mu_{Cv,p}^{(j)}$ ($j = 1, 2$), $\eta_v = \lim_{p \rightarrow 0} (N_p - N_p * \mu_{Cv,p}^{(1)})$ et $\eta'_v = \lim_{p \rightarrow 0} (N'_p - N'_p * \mu_{Cv,p}^{(2)})$ (voir la proposition 15). On a $\eta_v \neq 0$ et $\eta'_v \neq 0$. D'après (3.18), on a, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$(3.26) \quad (N * (\varepsilon - pN_p) * (\varepsilon - \mu_{Cv,p}^{(1)}) + q(N_p - N_p * \mu_{Cv,p}^{(1)})) * (N_q - N_q * \mu_{Cv,q}^{(2)}) \\ = (N_p - N_p * \mu_{Cv,p}^{(1)}) * (\varepsilon - \mu_{Cv,q}^{(2)}) .$$

On a $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement) et $N' \geq N' * \mu_{Cv,p}^{(j)}$ ($p > 0$). En faisant $p \downarrow 0$ et ensuite $q \downarrow 0$ dans (3.26), on a, d'après le lemme 17,

$$(3.27) \quad N * (\varepsilon - \mu_{Cv}^{(1)}) * \eta'_v = \eta_v * (\varepsilon - \mu_{Cv}^{(2)}) .$$

(8) Lorsque β_t/t converge vaguement dans $C\{0\}$ lorsque $t \downarrow 0$, sa limite en dehors de $\{0\}$ s'appelle la mesure singulière associée à $(\beta_t)_{t \geq 0}$.

Ceci donne que

$$(3.28) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N * \alpha_t - N) * (\eta_v * \eta'_v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\beta_t - \varepsilon) * (\eta_v * \eta'_v)$$

(vaguement) (voir (2.40) et (2.41)). Donc, pour $f \in C_K^+(C\{0\})$ vérifiant $\text{supp}(f * \eta_v * \eta'_v) \subset C\{0\}$ quelconque,

$$(3.29) \quad \int \widehat{f * \eta_v * \eta'_v} d\beta = \int \widehat{f * \eta_v * \eta'_v} d\sigma'.$$

Comme v est quelconque, $\beta = \alpha'$. La démonstration est ainsi complète.

Soit $\hat{X}$ le groupe dual de X . On dit qu'une fonction complexe et continue ψ sur $\hat{X}$ est définie-négative si $\psi(\hat{0}) \geq 0$ ($\hat{0}$ est l'origine de $\hat{X}$) et si, pour un entier $n \geq 1$, $(\hat{x}_j)_{j=1}^n \subset \hat{X}$ et $(c_j)_{j=1}^n$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ quelconques,

$$(3.30) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_j - \hat{x}_k) c_j \bar{c}_k \leq 0$$

(cf., par exemple, [1] et [6]). Si ψ est à valeurs réelles, alors $\psi \geq 0$. On connaît bien que, pour un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ sur X (resp. une fonction définie-négative ψ sur $\hat{X}$), il existe une fonction définie-négative ψ sur $\hat{X}$ (resp. un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ sur X), et une seule telle que, pour $t \in \mathbb{R}^+$ quelconque, $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$, où la signe $\wedge$ désigne la transformation de Fourier (cf., par exemple, [6]). Dans ce cas, ψ (resp. $(\alpha_t)_{t \geq 0}$) s'appelle la fonction définie-négative associée à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ (resp. le semi-groupe vaguement continu associé à ψ).

Comme une application du théorème 34, on montrera complètement le théorème principal dans [7].

THÉOREME 36. *Soit N un noyau de convolution symétrique (par rapport à l'origine) et régulier par rapport à ξ . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

- (a) *N vérifie le principe classique du maximum.*
- (b) *Il existe deux fonctions définie-négatives ψ_1 et ψ_2 à valeurs réelles telles que $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ soit localement sommable et que*

$$(3.31) \quad \hat{N} = \frac{\psi_2}{\psi_1} \hat{\xi},$$

où $\hat{\xi}$ est la mesure de Haar sur $\hat{X}$ associée à ξ .

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): D'après le théorème 34, il existe deux semi-groupes vaguement continus et sous-markoviens $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ tels que, en posant $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$ ($p > 0$) et $N'_q = \int_0^\infty \exp(-qt) \beta_t dt$ ($q > 0$), (3.18) ait lieu. On peut supposer que, pour $a > 0$ quelconque, une mesure balayée transitivement μ''_a de ε sur $C\{0\}$ relativement à $(N + a\varepsilon, \xi)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$ est symétrique par rapport à l'origine. On peut supposer donc que, pour $t \in \mathbf{R}^+$ quelconque, α_t et β_t sont symétrique par rapport à l'origine. Soient ψ_1 et ψ_2 la fonction définie-négative associée à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et celle associée à $(\beta_t)_{t \geq 0}$, respectivement. Alors ψ_j ($j = 1, 2$) est à valeurs réelles, et donc $\psi_j \geq 0$. Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, on désigne par μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p > 0}$. Soit η_v la mesure de Radon positive portée par v telle que, pour $p > 0$ quelconque, (2.22) ait lieu; alors $\eta_v \neq 0$. Montrons que la variation totale $|N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)|$ de $N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)$ est de masse totale finie. D'après (2.22), on a

$$(3.32) \quad N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) = N * N_p * (\varepsilon - \mu'_{Cv}),$$

et donc, (3.18) donne que, pour $q > 0$ quelconque,

$$(3.33) \quad (N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + qN_p * \eta_v) * N'_q = N_p * \eta_v.$$

D'après la proposition 19, $\text{supp}((N - N * \mu'_{Cv})^+) \subset v$. Comme $\int dN_p \leq \frac{1}{p}$, $(N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + pN_p * \eta_v)^+$ est de masse totale finie. Comme $N'_q \sqsubset \xi$, on a

$$(3.34) \quad \int d(N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + qN_p * \eta_v) \geq 0,$$

et donc $|N - N * \mu'_{Cv}|$ est de masse totale finie et $\int d(N - N * \mu'_{Cv}) + q \int d\eta_v \geq 0$. En faisant $q \downarrow 0$, on arrive à $\int d(N - N * \mu'_{Cv}) \geq 0$. En utilisant (3.32), on voit que $|N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)|$ est de masse totale finie et que $\int dN * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) \geq 0$. Posons $\sigma_v = \frac{\eta_v}{\int d\eta_v}$; alors $|N * \sigma_v * \check{\sigma}_v * (\varepsilon - pN_p)|$

est aussi de masse totale finie. D'après (3.18), on a

$$(3.35) \quad \widehat{N * \sigma_v * \check{\sigma}_v * (\varepsilon - pN_p)} = \frac{\psi_2}{p + \psi_1} |\hat{\sigma}_v|^2.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow 0} N * (pN_p) = 0$ (vaguement), d'après $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$), et comme v est quelconque, on voit que N est de type positif (au sens des mesures). D'après le théorème de Bochner, $\hat{N}$ a un sens et est une mesure de Radon positive dans $\hat{X}$. Alors, pour $f \in C_K$ quelconque,

$$(3.36) \quad \int |\hat{f}|^2 d\hat{N} = N * f * \check{f}(0) = \lim_{v \downarrow \{0\}} \lim_{p \downarrow 0} \int |\hat{f}|^2 |\hat{\sigma}_v|^2 \frac{\psi_2}{p + \psi_1} d\hat{\xi}.$$

Donc $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ est définie $\hat{\xi}$ -p.p., localement $\hat{\xi}$ -sommable et l'on a

$$(3.37) \quad \int |\hat{f}|^2 d\hat{N} = \int |\hat{f}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi}.$$

On a encore, pour $f, g \in C_K$ quelconques,

$$(3.38) \quad \int \hat{f} \bar{g} d\hat{N} = \int \hat{f} \bar{g} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi}.$$

Ceci donne immédiatement que $\hat{N} = \frac{\psi_2}{\psi_1} \hat{\xi}$, d'où (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Soient $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à ψ_1 et celui associé à ψ_2 , respectivement. Comme $\psi_1 \neq 0$, on a, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$ et $N'_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \beta_t dt$; alors $p \int dN_p \leq 1$, $p \int dN'_p \leq 1$ et $\lim_{p \rightarrow 0} pN_p = 0$ (vaguement). Comme $f \in C_K$ quelconque,

$$(3.39) \quad N * f * \check{f}(0) = \int |\hat{f}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi} < \infty,$$

$N * f * \check{f}$ s'annule à l'infini. D'après la définition, N s'annule à l'infini. Donc, pour $p > 0$ quelconque, $N * N_p$ a un sens et $\lim_{p \rightarrow 0} N * (pN_p) = 0$ (vaguement). On a, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconque,

$$(3.40) \quad (N * (\varepsilon - pN_p) + qN_p) * N'_q = N_p.$$

Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, on désigne par $\mu'_{Cv,p}$ la mesure balayée de ε sur

Cv relativement à N_p . Comme $\lim_{q \rightarrow \infty} qN'_q = \varepsilon$ (vaguement), on a

$$\begin{aligned}
 (3.41) \quad & N * (\varepsilon - \mu'_{Cv,p}) * (\varepsilon - pN_p) + p(N_p - N_p * \mu'_{Cv,p}) \\
 &= \lim_{q \rightarrow \infty} q(N * (\varepsilon - \mu'_{Cv,p}) * (\varepsilon - pN_p) + p(N_p - N_p * \mu'_{Cv,p})) * N'_q \\
 &= \lim_{q \rightarrow \infty} q(N_p - N_p * \mu'_{Cv,p}) * (\varepsilon - (q - p)N'_q) \leq 0 \text{ dans } Cv,
 \end{aligned}$$

d'après (3.40) et l'équation résolvente. Soit μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$. D'après le lemme 17, on a

$$(3.42) \quad N * (\varepsilon - \mu'_{Cv}) = \lim_{p \rightarrow 0} N * (\varepsilon - \mu'_{Cv,p}) * (\varepsilon - pN_p) \leq 0 \text{ dans } Cv.$$

D'après la proposition 19, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, et donc le théorème 26 donne que $N < \xi$, d'où (b) $\Rightarrow$ (a). La démonstration est ainsi complète.

D'après théorème 36, on verra facilement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 37. *Soit N un noyau de convolution symétrique et vérifiant le principe classique du maximum. Alors on a:*

- (a) *Si N est régulier par rapport à ξ , alors N s'annule à l'infini.*
- (b) *Si N est régulier par rapport à ξ , alors N est de type positif.*

On remarque que l'inverse de (a) existe toujours (voir la remarque 5). Dans le théorème 36, la condition de la symétrie de N est inévitable.

§4. Les noyaux de convolution vérifiant le principe classique du maximum sur $\mathbf{R}^n$

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que $X = \mathbf{R}^n$. On dit qu'une distribution L est un laplacien généralisé si, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ à valeurs réelles quelconques,

$$(4.1) \quad L(\varphi) \leq 0$$

dès que $\varphi(0) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} \varphi(x)$, où $\mathcal{D}$ désigne l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions infiniment dérivables dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs complexes et à support compact.

On connaît bien qu'à un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ (resp. un laplacien généralisé L), on associe uniquement un laplacien généralisé L (resp. un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$) tel que, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$(4.2) \quad L * \varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\alpha_t - \varepsilon) * \varphi(0)$$

(voir, par exemple, [6]). Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ s'appelle le semi-groupe vaguement continu défini par L et L s'appelle l'opérateur infinitésimal de $(\alpha_t)_{t \geq 0}$.

Ceci donne que, pour un laplacien généralisé L (resp. une fonction définie-négative ψ), il existe une fonction définie-négative ψ (resp. un laplacien généralisé L), et une seule telle que

$$(4.3) \quad \hat{L} = -\psi dx,$$

où la mesure de Lebesgue désigne dx .

D'après le théorème de Levy-Khinchine, on connaît que, pour un laplacien généralisé L , il existe une constante $c \geq 0$, une famille $(b_j)_{j=1}^n$ des constantes réelles, une matrice réelle et semi-définie-positive $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ et une mesure positive σ en dehors de l'origine vérifiant $\int |x|^2/(1+|x|^2) d\sigma(x) < \infty$ telles que, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$(4.4) \quad L(\varphi) = -c\varphi(0) + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}(0) \\ + \int \left(\varphi(x) - \varphi(0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \frac{x_j}{1+|x|^2} \right) d\sigma(x),$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$.

En utilisant le théorème 26 (et aussi le corollaire 27), on obtiendra l'équivalence explicite du principe classique du maximum.

THÉOREME 38. *Soit N un noyau de convolution sur R^n régulier par rapport à dx . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

- (a) *N vérifie le principe classique du maximum.*
- (b) *N est borné et il existe un laplacien généralisé $L \neq 0$ tel que, au sens des distributions,*

$$(4.5) \quad L * N \geq 0 \text{ en dehors de l'origine.}$$

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): D'après le corollaire 27, il existe un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$) tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. Soit L l'opérateur infinitésimal de $(\alpha_t)_{t \geq 0}$. Alors, d'après $\alpha_t \neq \varepsilon$ ($t > 0$), $L \neq 0$.

En regardant (4.4), on voit qu'il existe un laplacien généralisé L' à support compact et une mesure positive σ' dans $\mathbf{R}^n$ de masse totale finie tels que

$$(4.6) \quad L = L' + \sigma' - \left(\int d\sigma' \right) \varepsilon.$$

Comme N est borné, $L * N$ a un sens. Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante vérifiant $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt) \alpha_t dt$ ($p > 0$). Alors, pour $p > 0$ quelconque, $L * N_p = pN_p - \varepsilon$ (au sens des distributions). Pour $v \in \mathcal{V}$ quelconque, on désigne par μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$ et par η_v la mesure positive portée par v vérifiant (2.22). Alors

$$(4.7) \quad \begin{aligned} L * N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) &= L * N * N_p * (\varepsilon - \mu'_{Cv}) \\ &= N * (pN_p - \varepsilon) * (\varepsilon - \mu'_{Cv}). \end{aligned}$$

D'après (4.6) et le lemme 17, on a, au sens des distributions,

$$(4.8) \quad \lim_{p \rightarrow 0} L * N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) = L * N * \eta_v,$$

et donc, en utilisant encore le lemme 17 et la proposition 19, on a

$$(4.9) \quad L * N * \eta_v = N * (\mu'_{Cv} - \varepsilon) \geq 0 \text{ dans } Cv.$$

Remarquons que $\eta_v \neq 0$. Comme v est quelconque, (4.9) donne immédiatement (4.5), d'où (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu défini par L . Comme $L \neq 0$, on a, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ vérifiant $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur $\{x \in \mathbf{R}^n; |x| \leq 1\}$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = L$ (au sens des distributions), on a aussi $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = \varphi L$ et $\lim_{t \rightarrow 0} (1 - \varphi) \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = (1 - \varphi)L$ (au sens des distributions). Comme, pour $t > 0$ quelconque, $(1 - \varphi) \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)$ est une mesure positive, $(1 - \varphi)L$ est aussi une mesure positive et $(1 - \varphi) \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)$ converge vaguement vers $(1 - \varphi)L$ lorsque $t \rightarrow 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$ quelconque. Soient $(N_p)_{p>0}$, μ'_{Cv} et η_v les mêmes que ci-dessus. Alors, pour $f \geq 0 \in \mathcal{D}$ vérifiant $\text{supp}(f) \subset Cv$ quelconque,

$$\begin{aligned}
(4.10) \quad 0 &\leq L * N * \eta_v(f) = (\varphi L) * N * \eta_v(f) + ((1 - \varphi)L) * N * \eta_v(f) \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0} \left(\varphi \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) \right) * N * \eta_v * \check{f}(0) \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left((1 - \varphi) \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) \right) * N * \eta_v * \check{f}(0) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) * N * \eta_v * \check{f}(0) = \int f dN * (\mu'_{Cv} - \varepsilon),
\end{aligned}$$

d'après (2.41). Par conséquent, la proposition 19 donne que N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, et donc, d'après le corollaire 27, $N < \xi$. La démonstration est ainsi complète.

En généralisant le résultat de K. Kunugui (cf. [14]), G. Choquet a donné une condition suffisante pour le principe classique du maximum (cf. [2]). Le théorème 38 est un résultat définitif.

En regardant la remarque 28 et le théorème 38, on verra le corollaire suivant:

COROLLAIRE 39. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à dx et vérifiant le principe classique du maximum. Alors il existe un laplacien généralisé $L \neq 0$ tel que $L * N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine et que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L * N' \leq 0$ au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$.*

En effet, d'après la remarque 28, on voit, de la même manière que dans le théorème 38, qu'il existe un laplacien généralisé L tel que $L * N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine et que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L * N' \leq 0$ au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$ dès que N' est borné. Pour $N' \in S(N)$ quelconque, il existe une suite $(N'_m)_{m=1}^\infty$ des noyaux de convolution bornés $\subset S(N)$ telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} N'_m = N'$ (vaguement) (voir la démonstration du corollaire 33). En rappelant (4.6), on voit que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L * N'$ a un sens et que $L * N' \leq 0$ au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1959), 208-215.
- [2] G. Choquet, Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum, Sémin. Théorie du potentiel, 1958/59.
- [3] G. Choquet et J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), 4260-4262.

- [4] J. Deny, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associé à une famille fondamentale, *Ann. Inst. Fourier*, **12** (1962), 643–667.
- [5] O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions (Thèse), *Meddel Lunds Univ. Sem.*, **3** (1935), 1–118.
- [6] C. S. Herz, Analyse harmonique à plusieurs variables, *Sém. Math. d'Orsay*, 1965/66.
- [7] M. Itô, Sur le principe classique du maximum pour les noyaux de convolution symétriques, *Nagoya Math. J.*, **41** (1971), 121–133.
- [8] —, Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt II, *Nagoya Math. J.*, **53** (1974), 115–126.
- [9] —, Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution non-bornés, *Nagoya Math. J.*, **57** (1975), 167–197.
- [10] —, Sur les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians, *Nagoya Math. J.*, **66** (1977), 53–76.
- [11] —, Sur le principe de domination relatif, le balayage et les noyaux conditionnellement sous-médians, *J. Math. pures et appl.*, **57** (1978), 423–451.
- [12] J.-P. Kahane, Quotients de fonctions définies-négatives, *Sém. Bourbaki*, 1966/67.
- [13] M. Kishi, Positive idempotents on a locally compact abelian group, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **27** (1976), 181–187.
- [14] K. Kunugui, Étude sur la théorie du potentiel généralisé, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 63–102.

*Département de Mathématiques
Université de Nagoya*

