I. Higuchi
Nagoya Math. J.
Vol. 108 (1987), 145–165

LA BALAYABILITÉ AU SENS FORT DES NOYAU-FONCTIONS CONTINUES DU POTENTIEL

ISAO HIGUCHI

§ 1. Introduction

Soient X un espace localement compact et non-compact à base dénombrable, G une noyau-fonction continue sur X et M (resp. M_K) l'ensemble des toutes mesures de Radon positives sur X (resp. des toutes mesures de Radon positives sur X à support compact).

Pour une fonction borélienne $u \geqq 0$ sur X et un fermé F dans X, on désigne par $R_G^F(u)$ la fonction réduite de u sur F par rapport à G. Posons

$$R_G^\delta(u)(x) = \inf_{\omega \in \mathscr{G}_K} R_G^{C\omega}(u)(x)$$

où $\mathscr{G}_K$ désigne la totalité des ouverts relativement compacts dans X. On appelle $R_G^\delta(u)$ la fonction réduite de u à l'infini δ par rapport à G. Soient u et v deux fonctions non-négatives et boréliennes sur X. On note $u = v$ G-q.p. à l'infini δ lorsque $R_G^\delta(u)(x) = R_G^\delta(v)(x)$ G-p.p.p. sur X (cf. par exemple, [8]).

Une noyau-fonction continue G est dite régulière lorsque pour tout $x \in X$, $G\varepsilon_x = 0$ G-q.p. à l'infini δ, où ε_x désigne la mesure de Dirac à x.

La régularité d'une noyau-fonction continue G vérifiant le principe de domination joue un rôle important pour construire une famille résolvante associée à G (cf. [4], [5] et [9]).

On dit que G est balayable si, pour toute $\mu \in M$ vérifiant $G\mu(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et tout fermé F dans X, il existe une measure balayée de μ sur F relativement à G.

Pour un noyau de convolution vérifiant le principe de domination sur un groupe abélien localement compact, sa régularité et sa balayabilité sont équivalentes l'une l'autre lorsque le noyau est non-pseudo-périodique (cf. [1] et [7]).

D'autre part, dans la théorie du potentiel par rapport aux noyau-

Received August 26, 1986.

fonctions, la situation est un peu différente. L'auteur a démontré dans [3] que si une noyau-fonction continue est régulière, alors elle est balayable. Mais l'inverse n'est pas vraie en général. On connaît un exemple d'une noyau-fonction continue qui est balayable et non-régulière (voir [9], Example 22).

Une fonction G-surharmonique $u \geqq 0$ est dite un G-pseudo-potentiel s'il existe $\nu \in M$ telle que $u(x) \leqq G\nu(x)$ sur X et $G\nu(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X.

On dit que G est balayable au sens fort si G est balayable et tout G-pseudo-potentiel u est de la forme $u(x) = G\mu(x)$ G-p.p.p. sur X, où $\mu \in M$.

Dans cet article, nous discuterons d'abord le balayage sur un fermé d'une fonction G-surharmonique s'annulant G-q.p. à l'infini δ et donnerons une généralisation du théorème de H. Watanabe concernant l'existence d'une mesure d'équilibre sur un fermé.

Ensuite nous considérerons une relation entre la régularité et la balayabilité au sens fort d'une noyau-fonction continue. On verra que l'équivalence entre eux n'a pas lieu en général (cf. Exemple dans §4).

Le but principal de cet article est de montrer l'énoncé suivant:

Soit G une noyau-fonction continue sur X vérifiant $G(x, x) > 0$ pout tout $x \in X$. Supposons que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Alors il y a équivalence entre (1) et (2):

(1) G vérifie le principe de domination et est régulière.

(2) (a) G est balayable au sens fort,

et en outre

(b) il existe τ et ρ dans M telle que $\tau(\{x \in X; \check{G}\tau(x) = +\infty\}) = 0$, $\check{G}\tau(x) < \check{G}\rho(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et $\check{G}\tau = \check{G}\rho$ $\check{G}$-q.p. à l'infini δ.

En particulier, lorsque G est symétrique et non-dégénéré, G est balayable au sens fort si et seulement si G vérifie le principe de domination et est régulière.

L'auteur tient à remercier M. le Prof. M. Itô pour ses suggestions précieuses et ses indications valables et M. le Prof. M. Kishi pour ses conseils et ses bienveillants encouragements tout au long de ces recherches.

§ 2. Préliminaires

Une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) $G(x, y)$ sur l'espace produit $X \times X$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ s'appelle une noyau-fonction s.c.i. sur X. Une noyau-fonction s.c.i. sur X s'appelle une noyau-fonction continue si elle est continue au sens large sur $X \times X$ et finie en dehors de la diagonal Δ de $X \times X$.

On note $\check{G}$ la noyau-fonction adjointe de G définie par $\check{G}(x, y) = G(y, x)$. Lorsque G et $\check{G}$ sont égaux, on dit que G est symétrique.

Soit G une noyau-fonction s.c.i. sur X. Le potentiel $G\mu$ et l'énergie $I(\mu)$ de $\mu \in M$ par rapport à G sont définis par

$$G\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y)$$

et

$$I(\mu) = \int G\mu(x) d\mu(x) ,$$

respectivement. Posons

$$E(G) = \{\mu \in M;\ I(\mu) < +\infty\} , \qquad E_K(G) = E(G) \cap M_K ,$$
$$F(G) = \{\mu \in M;\ \mu(\{x \in X;\ G\mu(x) = +\infty\}) = 0\}$$

et

$$F_K(G) = F(G) \cap M_K .$$

Évidemment $F(G) \supset E(G)$.

Une partie de X est dite G-négligeable si elle est de mesure intérieure nulle pour toute mesure dans $E_K(G)$. On dit qu'une propriété a lieu à peu près partout (écrit par G-p.p.p.) sur un ensemble A dans X si elle est vraie sur A sauf un ensemble G-négligeable.

Remarque 1. (1) Pour $\mu \in F(G)$ quelconque, il existe une suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $E_K(G)$ telle que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

(2) Une propriété a lieu G-p.p.p. sur A si et seulement si pour toute $\mu \in F(G)$ à support contenu dans A, elle a lieu μ-p.p..

Posons

$$D(G) = \{\mu \in M;\ G\mu(x) < +\infty\ G\text{-p.p.p. sur } X\} .$$

C'est une classe fondamentale dans M pour G.

Rappelons les principes suivants qui se présenteront souvent.

Soient G et N deux noyau-fonctions s.c.i. sur X.

(I) On dit que G satisfait au principe de domination relatif à N (écrit par $G \prec N$) lorsque pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M$ quelconques, l'inégalité $G\mu(x) \leq N\nu(x)$ sur le support $S\mu$ de μ entraîne la même inégalité dans X.

En particulier, on dit que G vérifie le principe de domination, le principe du maximum et le principe complet du maximum lorsque $G \prec G$, $G \prec 1$ et $G \prec G + a$ pour tout $a \geqq 0$, respectivement.

(II) On dit que G satisfait au principe transitif de domination par rapport à N (écrit par $G \sqsubset N$) lorsque pour $\mu \in E_K(G)$ et $\nu \in M$ quelconques, l'inégalité $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ sur $S\mu$ entraîne $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X.

D'après le théorème de Lusin et la remarque 1, (1), on aura la remarque suivante:

Remarque 2. (1) Si $G \prec N$, alors pour $\mu \in F(G)$ *et* $\nu \in M$ quelconques, $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ G-p.p.p. sur $S\mu$ entraîne $G\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X.

(2) Si $G \sqsubset N$, alors pour $\mu \in F(G)$ et $\nu \in M$ quelconques, $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ G-p.p.p. sur $S\mu$ entraîne $N\mu(x) \leqq N\nu(x)$ sur X.

(III) On dit que G satisfait au principe du balayage relatif à N (écrit par $G \lessdot N$) lorsque pour toute $\mu \in M$ vérifiant $N\mu(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et tout compact K dans X, il existe une mesure $\mu' \in M_K$ portée par K telle que l'on ait:

$$\begin{aligned} G\mu'(x) &= N\mu(x) \qquad G\text{-p.p.p. sur } K\,, \\ G\mu'(x) &\leqq N\mu(x) \qquad \text{dans } X\,. \end{aligned}$$

Une telle mesure μ' s'appelle une mesure balayée de μ sur K relativement à (G, N).

En particulier, on dit simplement que G satisfait au balayage lorsque $G \lessdot G$. Dans ce cas, μ' est dite simplement une mesure balayée de μ sur K relativement à G.

(IV) On dit que G vérifie le principe de continuité si pour $\mu \in M_K$ quelconque, $G\mu$ est fini et continu sur X dès que la restreinte de $G\mu$ à $S\mu$ l'est aussi.

Posons

$$F_c(G) = \{\mu \in M;\ G\mu \text{ est fini et continu sur } X\}\,.$$

Alors on obtient facilement la remarque suivante:

Remarque 3. (1) La classe $F_c(G)$ est héréditaire, c'est-à-dire, pour $\mu \in F_c(G)$ et $\nu \in M$ quelconques, $\nu \in F_c(G)$ dès que $\nu \leqq \mu$.

(2) Si G vérifie le principe de continuité, alors pour $\mu \in F_K(G)$ et $\varepsilon > 0$ quelconques, il existe un compact K_ε dans X tel que $\mu(CK_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restreinte de μ sur K_ε[1] appartient à $F_c(G)$.

1) Cela signifie une mesure de Radon positive sur X qui est égale à μ sur K_ε et s'annule dans CK_ε

(3) Supposons que $\check{G}$ vérifie le principe de continuité. Alors $M_K \subset D(G)$ et une propriété a lieu G-p.p.p. sur un ensemble A dans X si et seulement si pour toute $\mu \in F_c(\check{G})$ à $S\mu \subset A$, elle a lieu μ-p.p..

Le théorème fondamental de Kishi est le suivant (voir [12]):

Théorème A. *Soient G et N deux noyau-fonctions s.c.i. sur X. Supposons que G et $\check{G}$ satisfont au principe de continuité et que $G(x, x) > 0$ sur Δ. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents*:

$$(1)\quad G \prec N. \qquad (2)\quad \check{G} \sqsubset \check{N}. \qquad (8)\quad G \preccurlyeq N.$$

Remarquons que l'équivalence entre (1) et (2) ci-dessus s'obtient sans le principe de continuité de G et celui de $\check{G}$ (cf. [3]).

D'autre part, nous avons montré le résultat suivant dans [6].

Théorème B. *Soit G une noyau-fonction continue vérifiant $G(x, x) > 0$ sur Δ. Si $G \prec G$, alors G et $\check{G}$ satisfont au principe de continuité.*

Par conséquent, le théorème de Kishi s'exprime sous la forme suivante (cf. [12] et [6]):

Théorème C. *Pour une noyau-fonction continue G vérifiant $G(x, x) > 0$ sur Δ, les quatre énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *G satisfait au principe de domination.*
(2) *$\check{G}$ satisfait au principe de domination.*
(3) *G satisfait au principe du balayage.*
(4) *$\check{G}$ satisfait au principe du balayage.*

Une noyau-fonction continue G est dite non-dégénérée si pour tous points x_1 et x_2 différents dans X, les fonctions $G(x, x_1)$ et $G(x, x_2)$ de x ne sont pas proportionnelles. On considère que la fonction constante 0 est proportionnelle à toute fonction.

Théorème D (voir M. Kishi [11], Remark 2). *Soit G une noyau-fonction continue sur X vérifiant $G(x, x) > 0$ sur Δ. Supposons que G vérifie le principe complet du maximum et est non-dégénérée. Alors G vérifie le principe restreint d'unicité suivant*:

Pour $\mu, \nu \in E_K(G)$ quelconques, $\mu = \nu$ dès que $G\mu(x) = G\nu(x)$ G-p.p.p. sur X.

Le résultat suivant concernant la convergence d'une suite des mesures est déjà connu (cf. par exemple, [10], Theorem 2 et [2], Lemme II.1.2).

THÉORÈME E. *Supposons que $\check{G}$ vérifie le principe de continuité, $G(x, x) > 0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Alors on a:*

(1) *Soit $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans M_K convergeant vaguement vers $\mu \in M_K$. Si pour tout n, $S\mu_n$ est contenu dans un compact fixé, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} G\mu_n(x) = G\mu(x) \qquad G\text{-p.p.p. sur } X.$$

(2) *Soit $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$. Supposons qu'il existe une fonction u telle que $u(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et que $G\mu_n(x) \leqq u(x)$ sur X pour tout n. Alors $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée.*

§ 3. Fonctions G-surharmoniques s'annulant G-q.p. à l'infini δ

Dans cette section, on suppose toujours que G est une noyau-fonction continue vérifiant $G(x, x) > 0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable.

DÉFINITION 1. Une fonction s.c.i. $u(x) \geqq 0$ sur X est dite G-surharmonique si $u(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et si, en posant $N(x, y) = u(x)$ pour tout $(x, y) \in X \times X$, on a $G \prec N$.

On désigne par $S(G)$ l'ensemble de toutes fonctions G-surharmoniques sur X.

Soient u une fonction borélienne et non-négative sur X et F un fermé dans X. On pose

$$S_u^F(G) = \{v \in S(G);\ v(x) \geqq u(x)\ G\text{-p.p.p. sur } F\}.$$

La fonction réduite $R_G^F(u)$ de u sur F par rapport à G est définie par

$$R_G^F(u)(x) = \begin{cases} \inf\{v(x);\ v \in S_u^F(G)\} & \text{si } S_u^F(G) \neq \phi\,, \\ \infty & \text{si } S_u^F(G) = \phi\,. \end{cases}$$

Remarque 4. (1) Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X, c'est-à-dire, Ω_n est un ouvert relativement compact, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = X$. Alors on a

$$R_G^{\delta}(u)(x) = \lim_{n\to\infty} R_G^{C\Omega_n}(u)(x) \qquad \text{sur } X.$$

(2) Supposons que G vérifie le principe de continuité. Soit $u \geqq 0$ une fonction s.c.i. vérifiant $u(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X. Alors, d'après le théorème A, il y a équivalence entre:

(a) u est G-surharmonique.

(b) Pour $\mu \in E_k(G)$ et $\nu \in M$ quelconques, on a $\int u d\mu \leqq \int u d\nu$ dès que $\check{G}\mu(x) \leqq \check{G}\nu(x)$ sur $S\mu$.

LEMME 1. *Soient $u \in S(G)$ et F un fermé dans X. Supposons que $\check{G}$ vérifie le principe de continuité. Alors il existe une suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_K(G)$ telle que*

$$S\mu_n \subset F,$$
$$G\mu_n(x) \leqq G\mu_{n+1}(x) \quad G\text{-}p.p.p. \quad \text{sur } S\mu_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} G\mu_n(x) = u(x) \quad G\text{-}p.p.p. \quad \text{sur } F$$

et

$$G\mu_n(x) \leqq u(x) \qquad \text{sur } X.$$

En particulier, si F est compact, alors tout point μ vaguement adhérent de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ lorsque $n \to \infty$ vérifie

$$S\mu \subset F,$$
$$G\mu(x) = u(x) \quad G\text{-}p.p.p. \quad \text{sur } F$$

et

$$G\mu(x) \leqq u(x) \qquad \text{sur } X.$$

Démonstration. Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. Posons

$$F_n = F \cap \bar{\Omega}_n \cap \{x \in X;\ u(x) \leqq n\}.$$

Alors, d'après la définition 1 et le théorème A, il existe, pour tout n, une mesure $\mu_n \in E_K(G)$ vérifiant

$$G\mu_n(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } F_n$$

et

$$G\mu_n(x) \leqq u(x) \qquad \text{sur } X.$$

On peut voir facilement que $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite demandée.

Si F est compact, alors pour tout point μ vaguement adhérent de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, on a

$$G\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} G\mu_n(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p. sur } F$$

(voir Théorème E). Évidemment on a $G\mu(x) \leqq u(x)$ sur X, d'où le lemme 1.

DÉFINITION 2. Une suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_K(G)$ obtenue dans le lemme 1 est dite une suite approximative du balayage de u sur F relativement à G.

Lorsque $G \prec G$ *et* F est compact, $G\mu$ dans le lemme 1 est dit un potentiel balayé inférieurement de u sur F relativement à G, car pour $\nu \in D(G)$ quelconque, on a $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ sur X dès que $G\nu(x) \geqq u(x)$ G-p.p.p. sur F.

Remarque 5. Soient $u \in S(G)$, F un fermé et $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite approximative du balayage de u sur F relativement à G. Si $G \prec G$, alors $\{G\mu_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante avec n. Donc, d'après le remarque 4, on a

$$R_G^F(u)(x) = \lim_{n\to\infty} G\mu_n(x) \qquad \text{sur } X$$

et

$$R_G^F(u)(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } F.$$

Par conséquent $R_G^F(u) \in S(G)$.

Le lemme 1 donne immédiatement la remarque suivante:

Remarque 6. Supposons que $G \prec G$. Alors, pour tout fermé F dans X, on a $R_G^F(u)(x) \leqq u(x)$ sur X et l'application

$$R_G^F\colon\ S(G) \ni u \longrightarrow R_G^F(u) \in S(G)$$

est positivement semi-linéaire et continue à gauche.

LEMME 2. *Supposons que $G \prec G$. Soit $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans $F(G)$ convergeant vers $\mu \in M$ lorsque $n \to \infty$. S'il existe $u \in S(G)$ telle que $u = 0$ G-q.p. à l'infini δ et que $G\mu_n(x) \leqq u(x)$ sur X $(n = 1, 2, \cdots)$, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} G\mu_n(x) = G\mu(x) \quad G\text{-}p.p.p. \quad sur\ X.$$

Démostration. Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. Pour n, $m \geqq 1$, on désigne par $\mu_{n,m}$ la restreinte de μ_n sur $C\Omega_m$. D'après la remarque 5, $R_G^{C\Omega_m}(u)$ est G-surharmonique, et donc la remarque 2 donne

$$G\mu_{n,m}(x) \leqq R_G^{C\Omega_m}(u)(x) \qquad \text{sur } X.$$

Par conséquent, le théorème E montre que pour $m \geqq 1$,

$$G\mu(x) \geqq \liminf_{n\to\infty} G(\mu_n - \mu_{n,m})(x) \geqq \liminf_{n\to\infty} G\mu_n(x) - R_G^{C\Omega_m}(u)(x)$$
$$G\text{-p.p.p.} \qquad \text{sur } X.$$

En faisant $m \to \infty$, on arrive à

$$G\mu(x) \geqq \liminf_{n\to\infty} G\mu_n(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X.$$

L'inégalité inverse ayant évidemment lieu sur X, on a l'égalité demandée.

THÉORÈME 1. *Soit G une noyau-fonction continue sur X telle que $G(x, x) > 0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Supposons que $G \prec G$. Alors pour toute $u \in S(G)$ vérifiant $u = 0$ G-q.p. à l'infini δ et pour tout fermé F dans X, il existe une mesure $\mu \in D(G)$ telle que l'on ait:*

$$S\mu \subset F\,,$$
$$G\mu(x) = u(x) \quad G\text{-}p.p.p. \quad sur\ F$$

et

$$G\mu(x) \leqq u(x) \qquad\qquad sur\ X\,.$$

Démonstration. Soit $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_k(G)$ une suite approximative du balayage de u sur F relativement à G. D'après le théorème E, (2), on peut supposer que $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une mesure $\mu \in M$ portée par F lorsque $n \to \infty$. La suite $\{G\mu_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ étant croissante, le lemme 2 donne

$$G\mu(x) = \lim_{n\to\infty} G\mu_n(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } F\,.$$

D'autre part on a évidemment

$$G\mu(x) \leqq \lim_{n\to\infty} G\mu_n(x) \leqq u(x) \qquad \text{sur } X\,,$$

d'où notre théorème.

DÉFINITION 3. Soit $u \in S(G)$. Un fermé F dans X est dit u-effilé à l'infini δ si

$$\inf_{\omega \in \mathscr{G}_K} R_G^{F \cap C\omega}(u)(x) = 0 \qquad G\text{-p.p.p. sur } X.$$

Le théorème 1 donne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Supposons que $G \prec G$; soit $u \in S(G)$. Si un fermé F dans X est u-effilé à l'infini δ, alors il existe $\mu_F \in D(G)$ portée par F telle que*

$$G\mu_F(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad sur\ F$$

et

$$G\mu_F(x) \leqq u(x) \qquad\qquad sur\ X\,.$$

En effet, soit $G|_{F\times F}$ la restreinte de G sur $F \times F$. Appliquant le théorème 1 à $G|_{F\times F}$, on obtient immédiatement notre corollaire.

Le corollaire ci-dessus est une généralisation du résultat de H. Watanabe qui l'a obtenu dans le cas où G vérifie le principe complet du maximum, $u=1$ et où G est régulière.

§ 4. Régularité et balayabilité au sens fort

Dans cette section, nous considérerons une relation entre la régularité et la balayabilité des noyau-fonctions continues.

On suppose encore que G est une noyau-fonction continue vérifiant $G(x, x)>0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable.

Posons

$$S_0(G)=\{u\in S(G);\ u=0\ G\text{-q.p. à l'infini } \delta\}.$$

Alors on a le lemme suivant:

LEMME 3. *Supposons que $G \prec G$. Alors $S_0(G)$ est complètement additive, c'est-à-dire, pour une suite $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset S_0(G)$ quelconque, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ appartient à $S_0(G)$ dès que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ appartient à $S(G)$.*

Démonstration. D'après la remarque 6, on a

$$R_G^{C\omega}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big)(x)=\sum_{n=1}^{\infty} R_G^{C\omega}(u_n)(x) \leqq \sum_{n=1}^{k} R_G^{C\omega}(u_n)(x)+\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(x).$$

En faisant $\omega \uparrow X$ et ensuite $k \rightarrow \infty$, on a

$$R_G^{\delta}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big)(x)=0 \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X,$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \in S_0(G)$.

LEMME 4. *Supposons que $G \prec G$. Alors, pour $\mu \in D(G)$, $\nu \in D(\check{G})$ et un fermé F dans X quelconques, on a*

$$\int R_G^F(G\mu)d\nu=\int R_{\check{G}}^F(\check{G}\nu)d\mu.$$

Démonstration. Soit $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$) une suite approximative du balayage de $G\mu$ (resp. $\check{G}\nu$) sur F relativement à G (resp. $\check{G}$). Alors, d'après les remarques 4 et 5 on a

$$\int R_G^F(G\mu)d\nu=\lim_{n\to\infty}\int G\mu_n d\nu=\lim_{n\to\infty}\int \check{G}\nu d\mu_n=\lim_{n\to\infty}\int R_{\check{G}}^F(\check{G}\nu)d\mu_n$$

$$\leqq \int R^F_{\check{G}}(\check{G}\nu)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \check{G}\nu_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int G\mu d\nu_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} R^F_G(G\mu)d\nu_n \leqq \int R^F_G(G\mu)d\nu\,,$$

d'où l'égalité demandée.

Le lemme 4 donne le lemme suivant:

LEMME 5. *Supposons que $G \prec G$. Alors, pour tout fermé $F \subset X$ et tout point $x \in X$, la fonction $R^F_G(G\varepsilon_y)(x)$ de y est borélienne et on a, pour toute $\mu \in D(G)$,*

$$R^F_G(G\mu)(x) = \int R^F_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y) \qquad sur\ X$$

et de plus

$$R^\delta_G(G\mu)(x) = \int R^\delta_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y) \qquad sur\ \{x \in X;\ R^\delta_G(G\mu)(x) < +\infty\}\,.$$

Démonstration. D'après le lemme 4, on a

$$R^F_G(G\varepsilon_y)(x) = R^F_{\check{G}}(\check{G}\varepsilon_x)(y)\,,$$

et donc la fonction $R^F_G(G\varepsilon_y)(x)$ de y est borélienne et

$$\int R^F_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y) = \int R^F_{\check{G}}(\check{G}\varepsilon_x)(y)d\mu(y) = R^F_G(G\mu)(x)\,.$$

Soit $(\Omega_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion de X. Alors, d'après le théorème de Lebesgue et la décroissance de $\{R^{C\Omega_n}_G(G\varepsilon_y)\}_{n=1}^\infty$, on a

$$R^\delta_G(G\mu)(x) = \lim_{n\to\infty} R^{C\Omega_n}_G(G\mu)(x) = \lim_{n\to\infty}\int R^{C\Omega_n}_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y)$$
$$= \int R^\delta_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y) \quad \text{sur} \bigcup_{n=1}^\infty \left\{x \in X;\ \int R^{C\Omega_n}_G(G\varepsilon_y)(x)d\mu(y) < +\infty\right\},$$

d'où la deuxième égalité demandée.

La proposition suivante résultera du présent lemme.

PROPOSITION 1. *Supposons que $G \prec G$. Alors G est régulière si et seulement si, pour toute $\mu \in D(G)$, $G\mu = 0$ G-q.p. à l'infini δ.*

Posons

$$H(x, y) = R^\delta_G(G\varepsilon_y)(x)$$

(cf. [13]). Alors, pour $\mu \in D(G)$ quelconque, le lemme 5 donne

$$H\mu(x) = \int H(x, y)d\mu(y) = R_G^{\delta}(G\mu)(x) \qquad \text{sur } \{x \in X;\ R_G^{\delta}(G\mu)(x) < +\infty\}.$$

LEMME 6. *Supposons que $G \prec G$. Alors, pour $\mu \in D(G)$ quelconque, il existe un G-pseudo-potentiel u tel que l'on ait:*

$$u(x) = H\mu(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X$$

et

$$u(x) \leqq H\mu(x) \qquad\qquad \text{sur } X.$$

Démonstration. Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. Posons

$$F_m = \bar{\Omega}_m \cap \{x \in X;\ G\mu(x) \leqq m\}$$

et désignons par $G\mu_{m,n}$ un potentiel balayé inférieurement de $R_G^{C\Omega_n}(G\mu)$ sur F_m relativement à G (voir Définition 2). D'après le théorème E, (2) et le lemme 1, il existe une suite $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ des entiers positifs à $n_k < n_{k+1}$ telle que pour tout $m \geqq 1$, la sous-suite $(\mu_{m,n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(\mu_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une mesure $\mu_m \in M_0$ quand $k \to \infty$. D'après le théorème E, (1) et le lemme 1, on a

$$\begin{aligned} G\mu_m(x) &= \lim_{k\to\infty} G\mu_{m,n_k}(x) = \lim_{n\to\infty} G\mu_{m,n}(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} R_G^{C\Omega_n}(G\mu)(x) = H\mu(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } F_m. \end{aligned}$$

On remarque ici que $\{G\mu_{m,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. D'autre part, la suite $\{G\mu_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ est croissante, car pour tous m et k, $G\mu_{m,n_k}(x) \leqq G\mu_{m+1,n_k}(x)$ sur X. Donc on obtient

$$H\mu(x) = \lim_{m\to\infty} G\mu_m(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X.$$

Posons $u(x) = \lim_{m\to\infty} G\mu_m(x)$; alors u est un G-pseudo-potentiel demandé. En effet, il est clair que $u \in S(G)$ et $u(x) \leqq G\mu(x)$ sur X. En outre, comme tout ouvert non-vide n'est pas G-négligeable, on a

$$u(x) = \liminf_{y\to x} u(y) \leqq \liminf_{y\to x} R_G^{\delta}(G\mu)(y) = \liminf_{y\to x} H\mu(x) \leqq H\mu(x) \qquad \text{sur } X$$

car

$$R_G^{\delta}(G\mu)(x) = H\mu(x) \qquad \text{sur } \{x \in X;\ R_G^{\delta}(G\mu)(x) < +\infty\}.$$

Le lemme 6 est ainsi démontré.

LEMME 7. *Supposons que G vérifie le principe de continuité. Alors il existe une mesure $\alpha \in F_c(G)$ telle que $G\alpha(x) > 0$ sur X.*

Démonstration. Soient $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une base des ouverts relativement compacts de X et $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. D'après le principe de continuité de G, il existe $\nu_n\,(\neq 0) \in F_c(G)$ à $S\nu_n \subset \omega_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Posons

$$a_n = \max\left\{\max_{x \in \bar{\Omega}_n} G\nu_n(x),\ \int_{\bar{\Omega}_n} d\nu_n,\ 1\right\}$$

et

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n a_n} \nu_n .$$

Alors α est une mesure demandée. En effet, G est évidemment fini et continu sur X. Comme pour tout n, $\omega_n \cap S\alpha \neq \phi$, on a $S\alpha = X$. Par conséquent $G\alpha(x) > 0$ sur X car $G(x, x) > 0$ sur Δ.

LEMME 8. *Supposons que $G \prec G$ et que G est non-dégénérée. Si, pour toutes $\mu_1, \mu_2 \in F(G)$ telles que $G\mu_i(x)$ est localement borné $(i = 1, 2)$, $G\mu_1(x) = G\mu_2(x)$ sur X, alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Démonstration. D'après le lemme 7, il existe une mesure $\alpha \in F_c(G)$ telle que $G\alpha(x) > 0$ sur X. Posons

$$K(x, y) = \frac{1}{G\alpha(x)} G(x, y) \qquad \text{sur } X \times X .$$

Alors K est une noyau-fonction continue et non-dégénérée sur X vérifiant le principe complet du maximum. Évidemment $E_K(G) = E_K(K)$ et, pour $\mu, \nu \in E_K(G)$ quelconques, $G\mu(x) = G\nu(x)$ sur X entraîne $K\mu(x) = K\nu(x)$ sur X. Donc le théorème D montre que G vérifie le principe restreint d'unicité.

Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. On désigne par $\mu_{i,n}$ la restreinte de μ_i sur $\bar{\Omega}_n$ et par $\mu'_{i,n}$ une mesure balayée de $\mu_i - \mu_{i,n}$ sur $\bar{\Omega}_n$ relativement à G $(i = 1, 2)$. Comme $\mu_{i,n} + \mu'_{i,n}$ est une mesure balayée de μ_i sur $\bar{\Omega}_n$ relativement à G et $\mu_{i,n} + \mu'_{i,n} \in E_K(G)$, on a

$$\mu_{1,n} + \mu'_{1,n} = \mu_{2,n} + \mu'_{2,n} \qquad \text{pour tout } n .$$

En faisant $n \to \infty$, on arrive à $\mu_1 = \mu_2$, car

$$0 \leqq \limsup_{n\to\infty} G\mu'_{i,n}(x) \leqq \lim_{n\to\infty} G(\mu_i - \mu_{i,n})(x) = 0 \qquad \text{sur } X\ (i = 1, 2) ,$$

et donc $(\mu'_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers 0 lorsque $n \to \infty$ $(i = 1, 2)$.

Notre lemme est ainsi démontré.

Notre résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 2. *Soit G une noyau-fonction continue sur X vérifiant $G(x, x) > 0$ sur Δ. Supposons que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Alors il y a équivalence entre*:

(1) *G vérifie le principe de domination et est régulière.*

(2) (a) *G est balayable au sens fort*

et en outre

(b) *il existe $\tau \in F(\check{G})$ et $\rho \in D(\check{G})$ telles que $\check{G}\tau(x) < \check{G}\rho(x)$ G-p.p.p. sur X et $\check{G}\tau = \check{G}\rho$ $\check{G}$-q.p. à l'infini δ.*

Démonstration. D'abord nous allons montrer que (1) $\rightarrow$ (2).

D'après le théorème B et le lemme 7, il existe $\rho \in F_c(\check{G})$ vérifiant $\check{G}\rho(x) > 0$ sur X. Comme $\check{G}\rho(x) < +\infty$ sur X, on obtient, d'après le lemme 5,

$$R_{\check{G}}^{\delta}(\check{G}\rho)(x) = \int R_{\check{G}}^{\delta}(\check{G}\varepsilon_y)(x)d\rho(y) = \lim_{n\to\infty}\int R_{\check{G}}^{C\Omega_n}(\check{G}\varepsilon_y)(x)d\rho(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int R_G^{C\Omega_n}(G\varepsilon_x)(y)d\rho(y) = \int R_G^{\delta}(G\varepsilon_x)(y)d\rho(y) = 0\,.$$

Posons $\tau = 0$; alors ρ et τ sont deux mesures demandées dans (2), (b).

D'autre part, en vertu de la proposition 1, la régularité de G montre que tout G-pseudo-potentiel appartient à $S_0(G)$. Donc le théorème 1 donne (2), (a).

Ensuite nous allons montrer que (2) $\rightarrow$ (1).

D'après le lemme 5, il suffit de montrer que pour tout $y \in X$, $H\varepsilon_y(x) = 0$ G-p.p.p. sur X. Soit V un voiginage ouvert et relativement compact de y. La noyau-fonction G étant balayable, on choisit une mesure balayée $\varepsilon_{y,CV}$ de ε_y sur CV relativement à G. Alors $H\varepsilon_y(x) = H\varepsilon_{y,CV}(x)$ sur X. Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. On désigne par μ_n la restreinte de $\varepsilon_{y,CV}$ sur $\Omega_n \cap C\Omega_{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Alors $\mu_n \in E_K(G)$ et $\varepsilon_{y,CV} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$. Donc, d'après le lemme 3, il suffit de montrer que pour toute $\mu \in E_K(G)$, $H\mu(x) = 0$ G-p.p.p. sur X. En outre, d'après la remarque 3 et le lemme 3, on peut supposer que $\mu \in F_c(G) \cap M_K$. Comme $\check{G}\rho(x) < +\infty$ G-p.p.p. sur X et $\mu(\{x \in X;\ \check{G}\rho(x) = +\infty\}) = 0$, en désignant par ν_n la restreinte de μ sur $\{x \in X;\ n-1 \leqq \check{G}\rho(x) < n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, on a $\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$ et $\int \check{G}\rho d\nu_n < +\infty$. D'après la remarque 3, (1), on a $\nu_n \in F_c(G) \cap M_K$, et donc, en utilisant encore le lemme 3, on peut supposer de plus que $\int \check{G}\rho d\mu < +\infty$.

D'après le lemme 6, il existe $\beta \in F(G)$ telle que

$$G\beta(x) = H\mu(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X$$

et

$$G\beta(x) \leqq H\mu(x) \qquad\qquad \text{sur } X.$$

Il suffit de montrer que $\beta = 0$. On remarque que

$$\int H\mu d(\rho + \tau) \leqq \int G\mu d(\rho + \tau) = \int \check{G}(\rho + \tau)d\mu < + \infty .$$

Comme $\tau \in F(\check{G})$, on a $\int H\mu d\tau = \int G\beta d\tau$ (cf. Remarque 1), et donc

$$0 = \int \{R_G^\delta(\check{G}\rho) - R_G^\delta(\check{G}\tau)\}d\mu = \int R_G^\delta(G\mu)d(\rho - \tau) = \int H\mu d(\rho - \tau)$$

$$\geqq \int G\beta d(\rho - \tau) = \int (\check{G}\rho - \check{G}\tau)d\beta .$$

D'après l'inégalité $\check{G}\rho(x) > \check{G}\tau(x)$ G-p.p.p. sur X, on a $\beta = 0$, d'où (1).

La démonstration du théorème 2 est ainsi complète.

Rappelons la démonstration ci-dessus. Alors on aura immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Supposons que* $G(x, x) > 0$ *sur* Δ *et que tout ouvert non-vide dans* X *n'est pas* G*-négligeable. Alors il y a équivalence entre*:

(1) *G vérifie le principe de domination et est régulière.*

(2) *G est balayable et pour toute* $\mu \in F_c(G) \cap M_K$, $H\mu(x) = 0$ G*-p.p.p. sur* X, *où* $H(x, y) = R_G^\delta(G\varepsilon_y)(x)$.

L'exemple suivant montre que la balayabilité au sens fort d'une noyau-fonction continue n'implique pas nécessairement sa régularité.

EXEMPLE.[2)] Soient X l'espace euclidien R^d à dimension $d \geqq 3$ et U le noyau newtonien sur R^d. On choisit une mesure $\xi \in F_c(U)$ vérifiant $0 < \int d\xi < + \infty$. Posons

$$G(x, y) = U(x, y) + U\xi(x) .$$

Nous allons montrer que G est balayable au sens fort et n'est pas régulière.

On verra d'abord que $G \prec G$. En effet, on suppose que pour $\mu \in E_K(G)$ $E_K(U)$ et $\nu \in M_K$, $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ sur $S\mu$. Alors

2) Cet exemple a été indiqué par M. le Prof. M. Itô pendant la préparation de cet article.

$$U\mu(x) + U\xi(x)\int d\mu \leqq U\nu(x) + U\xi(x)\int d\nu \qquad \text{sur } S\mu\,.$$

Si $\int d\mu \leqq \int d\nu$, le principe de domination de U donne que $G\mu(x) \leqq G\nu(x)$ sur R^d. Supposons que $\int d\mu > \int d\nu$. Alors $U\mu(x) \leqq U\nu(x)$ sur R^d et donc le principe du maximum de U et le théorème A donnent que $\int d\mu \leqq \int d\nu$, d'où une contradiction. Par conséquent, $G \prec G$.

Il est facile de voir que, pour $y \in R^d$ quelconque, $R^{\delta}_{G}(G\varepsilon_y)(x) = U\xi(x)$ sur R^d. Donc G n'est pas régulière.

On verra que G est valayable au sens fort. En effet, soient u un G-pseudo-potentiel et F un fermé dans R^d. Alors il existe $\nu \in D(G)$ telle que $u(x) \leqq G\nu(x)$ sur R^d. On désigne par $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite approximative du balayage de u sur F relativement à G. D'après le théorème E, (2), on peut supposer qu'il existe $\mu \in D(G)$ telle que $\mu_n \to \mu$ vaguement quand $n \to \infty$. De la même manière que ci-dessus, on a

$$\int d\mu_n \leqq \int d\mu_{n+1} \leqq \int d\nu < +\infty \qquad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

car $G\mu_n(x) \leqq G\mu_{n+1}(x) \leqq G\nu(x)$ sur R^d. Si $n < m$, alors on a

$$U\mu_n(x) + U\xi(x)\int d\mu_n \leqq U\mu_m(x) + U\xi(x)\int d\mu_m \qquad \text{sur } R^d$$

et donc

$$\begin{aligned} U\mu_n(x) + U\xi(x)\int d\mu_n &\leqq \lim_{m\to\infty} U\mu_m(x) + U\xi(x)\lim_{m\to\infty}\int d\mu_m \\ &= U\mu(x) + U\xi(x)\lim_{m\to\infty}\int d\mu_m \quad U\text{-p.p.p. sur } R^d\,. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que U est régulière. Comme $\mu_n \in E_K(G)$ et $\xi \in F_c(U)$, le principe du maximum de U et le théorème A donnent

$$\left(1 + \int d\xi\right) \cdot \int d\mu_n \leqq \int d\mu + \int d\xi \lim_{m\to\infty}\int d\mu_m\,.$$

En faisant $n \to \infty$, on arrive à $\int d\mu \geqq \lim_{n\to\infty}\int d\mu_n$, d'où $\int d\mu = \lim_{n\to\infty}\int d\mu_n$. Donc on obtient

$$G\mu(x) = U\mu(x) + U\xi(x)\int d\mu = \lim_{n\to\infty}\left\{U\mu_n(x) + U\xi(x)\int d\mu_n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} G\mu_n(x) = u(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } F$$

et

$$G\mu(x) \leqq u(x) \qquad \text{sur } X.$$

Par conséquent, G est balayable au sens fort.

En vertu des théorèmes 2 et 3, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit G une noyau-fonction continue sur X telle que $G(x, x) > 0$ sur $\varDelta$ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Supposons que G est non-dégénérée. Alors il y a équivalence entre*:

(1) *G et $\check{G}$ vérifient le principe de domination et sont régulières.*

(2) *G et $\check{G}$ sont balayables au sens fort.*

Démonstration. D'après le théorème 2, on a (1) $\rightarrow$ (2), et donc on montrera seulement que (2) $\rightarrow$ (1).

Évidemment G et $\check{G}$ vérifient le principe de domination. Donc il nous reste de voir que G est régulière. D'après le théorème 3, il suffit de montrer que pour toute $\mu \in F_c(G) \cap M_K$, on a $H\mu(x) = 0$ G-p.p.p. sur X. Soient $\omega \in \mathscr{G}_K$, $\nu \in F_c(G) \cap M_K$ et $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. On désigne par μ_n (resp. $\nu_{C\omega}$) une mesure balayée de μ (resp. ν) sur $C\Omega_n$ (resp. $C\omega$) relativement à G (resp. $\check{G}$). Si $\Omega_n \supset \omega$, on a

$$\int G\mu_n d(\nu - \nu_{C\omega}) = \int \check{G}(\nu - \nu_{C\omega}) d\mu_n = 0.$$

En faisant $n \uparrow \infty$, on a

$$\int H\mu d(\nu - \nu_{C\omega}) = 0.$$

D'après le lemme 6 et la balayabilité au sens fort de G, il existe $\lambda \in F(G)$ telle que

$$G\lambda(x) = H\mu(x) \quad G\text{-p.p.p.} \quad \text{sur } X.$$

On va montrer que $\lambda = 0$. On désigne par $\lambda_{C\omega}$ une mesure balayée de λ sur $C\omega$ relativement à G. Alors on a

$$\begin{aligned}\int G\lambda d\nu &= \int H\mu d\nu = \int H\mu d\nu_{C\omega} = \int G\lambda d\nu_{C\omega} = \int G\lambda_{C\omega} d\nu_{C\omega} = \int \check{G}\nu_{C\omega} d\lambda_{C\omega} \\ &\leqq \int \check{G}\nu d\lambda_{C\omega} = \int G\lambda_{C\omega} d\nu \leqq \int G\lambda d\nu,\end{aligned}$$

d'où

$$\int G\lambda d\nu = \int G\lambda_{C\omega} d\nu .$$

Comme ν est quelconque, on a $G\lambda(x) = G\lambda_{C\omega}(x)$ G-p.p.p. sur X. Donc, d'après le lemme 8, on a $\lambda = \lambda_{C\omega}$. En faisant $\omega \uparrow X$, on arrive à $\lambda = 0$, d'où (1).

Le théorème 4 est ainsi démontré.

COROLLAIRE. *Soit G une noyau-fonction continue sur X telle que $G(x, x) > 0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Supposons que G est symétrique et non-dégénérée. Alors G est balayable au sens fort si et seulement si elle vérifie le principe de domination et est régulière.*

§ 5. Noyau-fonctions continues réglières

En vertu du théorème 2, on peut déterminer $H(x, y)$ précisément sous la forme suivante:

THÉORÈME 5. *Soit G une noyau-fonction continue sur X telle que $G(x, x) > 0$ sur Δ et que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable. Supposons que $G \prec G$ et que G et $\check{G}$ sont régulières. Alors, $H(x, y) = 0$ ou bien $= + \infty$ sur $X \times X$ et en outre $H(x, y) = 0$ si $G(x, y) < + \infty$, où $H(x, y) = R_G^{\delta}(G\varepsilon_y)(x)$.*

Démonstration. D'après le théorème 2, G et $\check{G}$ sont balayables. Soit $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion de X. Pour $x \in X$ quelconque, on désigne par $\varepsilon_{x,n}$ (resp. $\tilde{\varepsilon}_{x,n}$) une mesure balayée de ε_x sur $C\Omega_n$ relativement à G (resp. $\check{G}$). Si $x \in \Omega_n$, alors $\varepsilon_{x,n} \in F(G)$ et $\tilde{\varepsilon}_{x,n} \in F(\check{G})$ et donc

$$R_G^{C\Omega_n}(G\varepsilon_x) = G\varepsilon_{x,n} \quad \text{et} \quad R_{\check{G}}^{C\Omega_n}(\check{G}\varepsilon_x) = G\tilde{\varepsilon}_{x,n} .$$

Soit $n_0 \geqq 1$ fixé. Alors, pour $x, y \in \Omega_{n_0}$ et $n \geqq n_0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} G\varepsilon_{y,n}(x) &= \int \check{G}\varepsilon_x(z) d\varepsilon_{y,n}(z) = \int \check{G}\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z) d\varepsilon_{y,n}(z) \\ &= \int G\varepsilon_{y,n}(z) d\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z) . \end{aligned}$$

Comme $\{G\varepsilon_{y,n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, le théorème de Lebesgue montre que

$$H(x, y) = R_G^{\delta}(G\varepsilon_y)(x) = \lim_{n\to\infty} G\varepsilon_{y,n}(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int G\varepsilon_{y,n}(z) d\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z)$$

$$= \int \lim_{n\to\infty} G\varepsilon_{y,n}(z) d\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z) = 0$$

sur $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \Omega_{n_0} \times \Omega_{n_0};\ \int G\varepsilon_{y,n}(z) d\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z) < +\infty\right\}$.

Comme n_0 est quelconque, on obtient

$$H(x, y) = 0 \quad \text{ou bien} = +\infty \quad \text{sur } X \times X .$$

En particulier, pour tout $(x, y) \in X \times X$ vérifiant $G(x, y) < +\infty$, on a

$$H(x, y) = 0 ,$$

car

$$\int G\varepsilon_{y,n}(z) d\tilde{\varepsilon}_{x,n_0}(z) \leqq G(x, y) < +\infty .$$

La démonstration est ainsi complète.

§ 6. Noyaux de convolutions continus sur un groupe abélien

Dans cette section, X désigne un groupe abélien localement compact et non-compact à base dénombrable.

Lorsque une noyau-fonction continue G sur X est de la forme

$$G(x, y) = k(x - y) ,$$

où k est une fonction continue sur X à valeurs dans $[0, \infty]$ et vérifiant $k(x) < +\infty$ pour tout $x \in X$ $(\neq 0)$, on dit que G est un noyau de convolution continu sur X. Dans ce cas, k s'appelle la fonction associée à G.

Remarque 7. Pour que tout ouvert non-vide dans X n'est pas G-négligeable il faut et il suffit que k est localement sommable (cf. par exemple, [6]).

En vertu du théorème 4, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soient G un noyau de convolution continu sur X et k la fonction associée à G. Supposons que k est localement sommable, $k(0) > 0$ et que k n'est pas pseudo-périodique, c'est-à-dire, pour tout $x \in X$ $(\neq 0)$, les fonctions $k(y)$ et $k(y - x)$ de y ne sont pas proportionnelles. Alors G est balayable au sens fort si et seulement si G vérifie le principe* *de domination et est régulier.*

Démonstration. On voit évidemment que G est non-dégénéré si et seulement si k n'est pas pseudo-périodique. D'après le théorème 4, il suffit de montrer que G est balayable au sens fort si et seulement si $\check{G}$ l'est aussi et que G est régulier si et seulement si $\check{G}$ l'est aussi.

Supposons que G est balayable au sens fort. On a $S(\check{G}) = \{\check{u};\ u \in S(G)\}$, où $\check{u}(x) = u(-x)$, et pour $\mu \in D(G)$ quelconque, $\widecheck{G\mu} = \check{G}\check{\mu}$, où $\check{\mu} \in M$ et $\int f d\check{\mu} = \int \check{f} d\mu$ pour toute fonction finie et continue f sur X à support compact. Soient u un $\check{G}$-pseudo-potentiel et F un fermé dans X. Comme $\check{u}$ est un G-pseudo-potentiel, il existe $\lambda \in D(G)$ vérifiant $\check{u}(x) = G\lambda(x)$ G-p.p.p. sur X. Alors on a $u(x) = \check{G}\check{\lambda}(x)$ G-p.p.p. sur X. Soit λ' une mesure balayée de λ sur $\check{F}$ relativement à G, où $\check{F} = \{-x \in X;\ x \in F\}$. Alors $\check{\lambda}'$ est une mesure balayée de $\check{\lambda}$ sur F relativement à $\check{G}$. Donc $\check{G}$ est balayable au sens fort.

De la même manière que ci-dessus, on peut montrer que la régularité de G entraîne celle de $\check{G}$.

La proposition 2 est ainsi démontré.

Pour un noyau de convolution non-pseudo-périodique vérifiant le principe de domination, il est connu que sa balayabilité et sa régularité sont équivalentes (cf. par exemple, [1] et [7]). La proposition 2 est au cas spécial et important de ce résultat. Mais la démonstration est beaucoup plus simple.

Bibliographie

[1] G. Choquet et J. Deny, Noyaux de convolution et balayage sur tout ouvert, Lecture Notes in Math., **404** (1971), 60–112, Springer-Verlag.

[2] R. Durier, Sur les noyaux-fonctions en théorie du potentiel, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), **18** (1969), 113–189.

[3] I. Higuchi, Duality of domination principle for non-symmetric lower semi-continuous function-kernels, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 551–559.

[4] ——, Régularité et propriété de convergence dominée des potentiels d'un noyau-fonction non-symétrique, Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 6, Lecture Notes in Math., **906** (1982), 158–202, Springer-Verlag.

[5] ——, Existence de résolvantes associées à un noyau vérifiant le principe de domination, ibid., No. **6** (1982), 203–224.

[6] I. Higuchi et M. Itô, On the theorems of Kishi for a continuous function-kernel, Nagoya Math. J., **53** (1974), 127–135.

[7] M. Itô, Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 293–350.

[8] ——, Positive eigen elements for an infinitesimal generator of a diffusion semi-

group and their integral representations, Potential Theory Copenhagen 1979, Lecture Notes in Math., **787** (1979), 163–184.
[9] ——, On weakly regular Hunt diffusion kernels, Hokkaido Math. J., **23** (1981), Sp., 303–335.
[10] M. Kishi, Inferior limit of a sequence of potentials, Proc. Japan Acad., **33** (1957), 314–319.
[11] ——, Unicity principles in the potential theory, Osaka Math. J., **13** (1961), 41–74.
[12] ——, Maximum principles in the potential theory, Nagoya Math. J., **23** (1963), 165–187.
[13] H. Watanabe, A decomposition of continuous function-kernels, à paraître.

Département de Mathématiques
Institut de Technologie d'Aichi
Yakusa-Cho, Toyota 470-03
Japon