J. Alev and F. Dumas
Nagoya Math. J.
Vol. 143 (1996), 119–146

RIGIDITE DES PLONGEMENTS DES QUOTIENTS PRIMITIFS MINIMAUX DE $U_q(sl(2))$ DANS L'ALGEBRE QUANTIQUE DE WEYL–HAYASHI

J. ALEV AND F. DUMAS

0. Introduction

Ce travail est consacré aux groupes d'automorphismes de certaines algèbres quantiques de dimension 2 ou 3. Dans la théorie classique des algèbres enveloppantes, si $\mathfrak{h}$ désigne l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3, $U(\mathfrak{h})$ admet l'algèbre de Weyl A_1 comme seul quotient primitif de dimension 2, avec les propriétés suivantes: d' une part tout automorphisme de A_1 se relève en un automorphisme de $U(\mathfrak{h})$, d'autre part $U(\mathfrak{h})$ admet des automorphismes non modérés (cf. [Al], [Di1], [ML]). On retrouve la même situation pour les quotients primitifs minimaux de $U(sl(2))$ paramétrés par $\mathbf{C}$ (cf. [Di2], [Jo]). En outre, dans ce cas, on dispose des plongements de Conze de ces quotients dans A_1 (cf. [Di2], [Co], [Ro]); bien que les groupes d'automorphismes soient comparables, la restriction correspondant à un tel plongement est seulement définie sur le sous-groupe des automorphismes triangulaires de A_1 (cf. annexe).

Dans la suite, on étudie l'analogue quantique de l'ensemble de cette situation. Il en ressort que la rigidité entraînée par la quantification est telle que, non seulement les algèbres en jeu n'ont que peu d'automorphismes, au point que leurs groupes d'automorphismes ne diffèrent souvent que par des facteurs finis, mais encore que les q-analogues des plongements de Conze s'en trouvent eux-mêmes rigidifiés.

L'article est divisé en quatre parties. La première est consacrée à l'algèbre de Weyl quantique A_1^q engendrée par X et Y avec $XY - qYX = 1$, telle qu'elle est étudiée par Goodearl et Morikawa (cf. [Go] et [Mo]). On note B_1^q le localisé de A_1^q par rapport aux puissances de l'élément normalisant $Z = XY - YX$ (qui possède sur le plan de la théorie des anneaux des propriétés comparables à celle de l'algèbre de Weyl classique), et C_1^q le localisé de B_1^q par rapport à la partie de Ore formée des puissances de Y. On explicite les groupes d'automorphismes des trois

Received August 9, 1994.

algèbres A_1^q, B_1^q et C_1^q. Pour la suite, on suppose que le paramètre q n'est pas racine de l'unité.

Dans la deuxième partie, on calcule d'abord le groupe des automorphismes de l'algèbre de Heisenberg quantique $H_q = U_q^+(sl(3))$, via une caractérisation de ses éléments normalisants, puis celui de l'algèbre de Hayashi A_ν, qui se réalise, d'une part comme un quotient simple de H_q pour $\nu = q^{-2}$, et d'autre part comme une extension quadratique normalisante de $B_1^{q'}$ pour $q' = \nu^{-2}$ cf. [Ha], [KS], [Ma]).

Dans la troisième partie, on considère les quotients $B_{q,\lambda}$ de $U_q(sl(2))$ par les idéaux $(\Omega - \lambda)$, où λ appartient au corps de base $\mathbf{C}$ et où Ω désigne l'élément de Casimir quantique. Tous les $B_{q,\lambda}$ se plongent dans A_ν pour $\nu = q^{-2}$, ce que l'on interprète comme un q-analogue des plongements de Conze. La restriction relative à ces plongements définit un isomorphisme entre un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ et un sous-groupe d'indice 2 ou 4 de $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$.

Enfin, par référence à la locale finitude de l'action adjointe dans la situation classique, on étudie dans la dernière partie la sous-algèbre F_q des éléments ad-localement finis de $U_q(sl(2))$ (cf [JL]), et ses quotients $D_{q,\lambda}$ par $(\Omega - \lambda)$. Les plongements de Conze correspondants se font cette fois dans une algèbre de Weyl de type $A_1^{q'}$ pour $q' = q^4$, et la détermination des groupes $\mathrm{Aut}(F_q)$ et $\mathrm{Aut}(D_{q,\lambda})$ permet d'obtenir des résultats de rigidité de même nature.

Dans tout ce qui suit, on peut prendre pour corps de base un corps commutatif quelconque, sans hypothèse sur la caractéristique, algébriquement clos dans les parties II, III *et* IV. *Pour une commodité de notation, on notera* $\mathbf{C}$ *ce corps de base dans tout l'article.*

I. Algèbre de Weyl quantique et localisations

Dans toute cette section, q est un élément fixé de $\mathbf{C}^*$, différent de 1, *éventuellement racine de l'unité.*

1.1. Définitions et notations. Comme en [Go] et [Mo], on considère l'algèbre A_1^q engendrée sur $\mathbf{C}$ par X et Y soumis à la relation:

$$XY - qYX = 1. \tag{1.1.1}$$

C'est une extension de Ore itérée $A_1^q = \mathbf{C}[Y][X\,;\sigma,\delta]$, où σ est le $\mathbf{C}$-automorphisme de $\mathbf{C}[Y]$ défini par $\sigma(Y) = qY$, et δ la σ-dérivation "de Jackson", définie par $\delta(Y) = 1$. Comme q est supposé distinct de 1, l'algèbre A_1^q n'est pas l'algèbre de Weyl classique A_1. Il est connu qu'alors A_1^q n'est pas simple: l'élément $Z = XY - YX$ est normalisant dans A_1^q, vérifiant:

$$ZY = qYZ \quad \text{et} \quad ZX = q^{-1}XZ. \tag{1.1.2}$$

On note B_1^q le localisé de A_1^q par rapport aux puissances de Z. D'après le lemme 1.4 de [Go], l'ensemble des puissances de Y est une partie de Ore dans A_1^q et B_1^q, ce qui permet d'introduire le localisé C_1^q de B_1^q par rapport aux puissances de Y. Comme, dans C_1^q, on a:

$$X = \frac{1}{q-1} Y^{-1}(Z-1), \tag{1.1.3}$$

C_1^q apparaît comme l'algèbre $\mathbf{C}_q[Z^{\pm}, Y^{\pm}]$ engendrée sur $\mathbf{C}$ par $Z^{\pm}$ et $Y^{\pm}$ soumis à la première relation de (1.1.2). C'est donc un analogue multiplicatif de l'algèbre de Weyl au sens de [Ja], cas particulier d'algèbre de McConnell et Pettit (cf. [MP]). B_1^q et C_1^q sont de "bons" analogues quantiques de l'algèbre de Weyl A_1 au sens où, par exemple, pour q non racine de l'unité, B_1^q et C_1^q sont simples, de centre trivial $\mathbf{C}$, de dimension globale et de Krull égales à 1 (pour ces résultats, cf. [AVV], [Go], [Ja], [J], [MP]). Lorsque q est d'ordre $p \geq 2$ dans le groupe $\mathbf{C}^*$, le centre de $A^q{}_1$ est $\mathbf{C}[X^p, Y^p]$, le centre de C_1^q est $\mathbf{C}[Z^{\pm p}, Y^{\pm p}]$, et C_1^q est une algèbre d'Azumaya sur son centre (cf. [AVV]), ce qui constitue une propriété comparable à la situation classique en caractéristique première (cf. [Re]). Avant de calculer les groupes $\mathrm{Aut}(A_1^q)$, $\mathrm{Aut}(B_1^q)$ et $\mathrm{Aut}(C_1^q)$, montrons que l'on a un énoncé analogue pour l'algèbre B_1^q. On établit tout d'abord un lemme technique général, probablement bien connu, que nous incluons dans le texte pour la commodité du lecteur.

1.2. Lemme. *Soient S un anneau commutatif intègre et R une S-algèbre quelconque; si x et y sont deux éléments de R tels que $xy - qyx = 1$, avec q racine primitive p-ième de l'unité dans S $(p \geq 2)$, et tels que l'élément $z = xy - yx$ soit inversible dans R, alors les eléments $\{x^i y^j\}_{0 \leq i,j \leq p-1}$ sont S-linéairement indépendants.*

Preuve. Pour tout $r \in R$, posons: $\mathrm{ad}_x(r) = xr - rx$ et $\mathrm{ad}_y(r) = yr - ry$. On vérifie que: $\mathrm{ad}_y(x^i y^n) = -[i]_q z x^{i-1} y^n$ et $\mathrm{ad}_x(x^i y^n) = -[n]_q x^i y^{n-1} z$, pour tous $i, n \in \mathbf{N}$, avec la notation $[i]_q = \sum_{0 \leq j \leq i-1} q^j$.
Soit alors $(\alpha_{i,j})_{0 \leq i,j \leq p-1}$ une famille d'éléments de S tels que:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{i,j} x^i y^j = 0. \tag{$*$}$$

Appliquons ad_x et simplifions à droite par z, en itérant n fois $(1 \leq n \leq p-1)$:

$$(*)_n \qquad \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=n}^{p-1} \alpha_{i,j}\Big(\prod_{t=0}^{n-1} [j-t]_q\Big)x^i y^{j-n} = 0.$$

Remarquons que, comme q est d'ordre p, tous les q-entiers $[j-t]_q$ intervenant dans ces sommes sont non-nuls. Supposons montrée la S-indépendance linéaire de la famille $\mathscr{X} = \{x^i\}_{0\leq i\leq p-1}$; on déduit de $(*)_{p-1}$ que $\alpha_{i,p-1} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq p-1$. En reportant dans $(*)_{p-2}$, la S-indépendance linéaire de $\mathscr{X}$, implique de même $\alpha_{i,p-2} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq p-2$. On réitère ainsi jusqu'à $(*)$ pour établir que $\alpha_{i,j} = 0$ pour tous $0 \leq i, j \leq p-1$.

Il suffit donc pour prouver le lemme de vérifier que $\mathscr{X}$ est une famille libre sur S. On se donne $\{\beta_i\}_{0\leq i\leq p-1}$ dans S tels que:

$$(**) \qquad \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i x^i = 0.$$

Appliquons ad_y et simplifions par z à gauche en itérant n fois $(1 \leq n \leq p-1)$:

$$(**)_n \qquad \sum_{i=n}^{p-1} \beta_i\Big(\prod_{t=0}^{n-1} [i-t]_q\Big)x^{i-n} = 0.$$

On tire de $(**)_{p-1}$ que $\beta_{p-1} = 0$, puis en remontant de proche en proche jusqu'à $(**)$, on obtient $\beta_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq p-1$; ce qui achève la preuve. □

1.3. Proposition. *Si q est une racine de l'unité d'ordre $p \geq 2$ dans $\mathbf{C}^*$, le centre $\mathscr{Z}(B_1^q)$ de B_1^q est le localisé de $\mathscr{Z}(A_1^q) = \mathbf{C}[X^p, Y^p]$ par $Z^p \in \mathscr{Z}(A_1^q)$, et B_1^q est une algèbre d'Azumaya sur son centre, avec $[B_1^q : \mathscr{Z}(B_1^q)] = p^2$.*

Preuve. Soit $b = aZ^n \in B_1^q$, avec $a \in A_1^q$ et $n \in \mathbf{Z}$; notons $n = mp + r$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et $0 \leq r \leq p-1$. Comme Z^{mp} est central dans B_1^q (car central dans C_1^q), $b = aZ^r Z^{mp}$ appartient à $\mathscr{Z}(B_1^q)$ si et seulement si $a' = aZ^r$ appartient à $\mathscr{Z}(A_1^q)$. Ainsi $\mathscr{Z}(B_1^q) = \{a'Z^{mp} ; a' \in \mathbf{C}[X^p, Y^p], m \in \mathbf{Z}\}$ est le localisé de $\mathbf{C}[X^p, Y^p]$ par:

$$(1.3.1) \qquad Z^p = q^{p(p-1)/2}[(q-1)^p Y^p X^p - (-1)^p] \in \mathscr{Z}(A_1^q).$$

D'après le lemme 1.2, la famille $\{X^i Y^j\}_{0\leq i,j\leq p-1}$ est une base de B_1^q sur $\mathscr{Z}(B_1^q)$. Par le théorème d'Artin-Procesi (cf. [MR]), il suffit, pour établir que B_1^q est une algèbre d'Azumaya sur $\mathscr{Z}(B_1^q)$, de montrer que ses représentations irréductibles de dimension finie sur $\mathbf{C}$ sont toutes de même dimension. Cette dimension est majorée par la racine p de $[B_1^q : \mathscr{Z}(B_1^q)]$. Par ailleurs, si V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ un homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de B_1^q dans $R =$

$\mathrm{End}_{\mathbf{C}}V$, on a dans R, en posant $x=\rho(X)$ et $y=\rho(Y)$, l'égalité $xy-qyx=\rho(1)=1$. Comme Z est inversible dans le localisé B_1^q, l'élément $z=\rho(Z)$ est inversible dans R. En appliquant le lemme 1.2, on conclut que $\dim_{\mathbf{C}}R\geq p^2$. Ainsi $\dim_{\mathbf{C}}V\geq p$, ce qui achève la démonstration. □

1.4. CERTAINS AUTOMORPHISMES DU CORPS DE WEYL QUANTIQUE. On note $\mathbf{C}_q[Z, Y]$ le plan quantique engendré sur $\mathbf{C}$ par Z et Y soumis à la loi de commutation $ZY=qYZ$. Les trois algèbres $A_1^q\subseteq B_1^q\subseteq C_1^q$ et le plan quantique $\mathbf{C}_q[Z, Y]$ admettent le même corps de fractions. Comme en [AD], on notera D_1^q ce corps gauche:

$$D_1^q=\mathbf{C}(Y)(Z\,;\sigma), \tag{1.4.1}$$

corps de fractions de l'extension de Ore $\mathbf{C}(Y)[Z\,;\sigma]$, avec σ le $\mathbf{C}$-automorphisme de $\mathbf{C}(Y)$ défini par $\sigma(Y)=qY$. On introduit certains sous-groupes du groupe $\mathrm{Aut}(D_1^q)$ des $\mathbf{C}$-automorphismes de D_1^q :

On note $G=\{\phi_{\alpha,\beta}\in\mathrm{Aut}(D_1^q)\,;\alpha\in\mathbf{C}^*,\beta\in\mathbf{C}^*)\simeq(\mathbf{C}^*)^2$ avec:

$$\phi_{\alpha,\beta}(Z)=\alpha Z\quad\text{et}\quad\phi_{\alpha,\beta}(Y)=\beta Y. \tag{1.4.2}$$

D'après la proposition 1.1.4 de [AC], G est (du moins pour $q\neq-1$) le groupe des prolongements des $\mathbf{C}$-automorphismes du plan quantique $\mathbf{C}_q[Z, Y]$ à son corps de fractions D_1^q. Un élément $\phi_{\alpha,\beta}$ tel que $\alpha=1$ sera noté plus simplement ϕ_β, et l'on pose $G_1=\{\phi_\beta\,;\beta\in\mathbf{C}^*\}\simeq\mathbf{C}^*$, avec donc:

$$\phi_\beta(Y)=\beta Y,\ \phi_\beta(Z)=Z,\quad\text{et}\quad\phi_\beta(X)=\beta^{-1}X. \tag{1.4.3}$$

Pour toute matrice $s=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})$ et tout couple (α,β) de $(\mathbf{C}^*)^2$, notons $\psi_{\alpha,\beta,s}$ le $\mathbf{C}$-automorphisme de D_1^q défini par:

$$\psi_{\alpha,\beta,s}(Z)=\alpha Y^bZ^a\,;\psi_{\alpha,\beta,s}(Y)=\beta Y^dZ^c \tag{1.4.4}$$

On pose $H=\{\psi_{\alpha,\beta,s}\,;(\alpha,\beta)\in(\mathbf{C}^*)^2, s\in SL(2,\mathbf{Z})\}$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D_1^q)$ ainsi construit, qui est un produit semi-direct de $(\mathbf{C}^*)^2$ par $SL(2,\mathbf{Z})$. Dans le cas particulier où $\alpha=\beta=1$ et $s=\begin{pmatrix}1 & -m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $m\in\mathbf{Z}$, on note plus simplement ψ_m l'automorphisme $\psi_{\alpha,\beta,s}$ de sorte que:

$$\psi_m(Z)=Z,\ \psi_m(Y)=YZ^{-m}=q^mZ^{-m}Y,\ \psi_m(X)=Z^mX=q^{-m}XZ^m. \tag{1.4.5}$$

On introduit le sous-groupe $H_1=\{\psi_m\,;m\in\mathbf{Z}\}\simeq\mathbf{Z}$ de H.

Enfin, il existe un automorphisme ξ de D_1^q tel que:

(1.4.6) $\xi(Z) = q^{-1}Z^{-1},\ \xi(Y) = X = (q-1)^{-1}(qZ - 1)Y^{-1},\ \xi(X) = -Z^{-1}Y.$

Par définition, on appelle K le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D_1^q)$ engendré par G_1, H_1, et ξ ; K apparaît comme la réunion disjointe $(G_1H_1) \cup (G_1H_1)\xi$, où G_1H_1 désigne le produit direct dans $\mathrm{Aut}(D_1^q)$ des sous-groupes G_1 et H_1, qui est un sous-groupe d'indice 2 de K. Il est clair que A_1^q (resp. B_1^q, resp. C_1^q) est stable sous G_1 (resp. K, resp. H).

1.5. Proposition. *Si $q \neq \pm 1$, alors $\mathrm{Aut}(A_1^q) = G_1 \simeq \mathbf{C}^*$. Si $q = -1$, alors $\mathrm{Aut}(A_1^q)$ est égal au produit semi-direct de G_1 par $\langle \omega \rangle$, avec ω l'involution de A_1^q échangeant X et Y.*

Preuve. Supposons d'abord que q n'est pas racine de l'unité dans $\mathbf{C}^*$. D'après le théorème 8.4 de [Go], l'intersection des idéaux premiers non-nuls de A_1^q est l'idéal principal ZA_1^q engendré par l'élément normalisant Z. Donc, pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}(A_1^q)$, on a: $ZA_1^q = \theta(ZA_1^q) = \theta(Z)A_1^q$, et il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\theta(Z) = \lambda Z$. On a: $\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) = \lambda Z = \lambda(q-1)YX + \lambda$; en appliquant par ailleurs θ à (1.1.1), on déduit que: $\theta(Y)\theta(X) = \lambda YX + (\lambda - 1)/(q-1)$. Le degré total en X et Y dans A_1^q de chaque facteur $\theta(X)$ et $\theta(Y)$ est 1; on écrit: $\theta(X) = \alpha X + \beta Y + \gamma$ et $\theta(Y) = \alpha' X + \beta' Y + \gamma'$, avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ dans $\mathbf{C}$. Par identification dans la relation ci-dessus, on conclut que $\theta(X) = \alpha^{-1}X$ et $\theta(Y) = \alpha Y$ avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$.

On suppose maintenant que q est d'ordre $p \geq 2$ dans $\mathbf{C}^*$. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}(A_1^q)$. Notons $a = \theta(X)$ et $b = \theta(Y)$, que l'on décompose dans A_1^q suivant la base $\cup_{i \geq 0}\{Y^{i-j}X^j ; 0 \leq j \leq i\}$ en: $a = a_n + \cdots + a_1 + a_0$ et $b = b_m + \cdots + b_1 + b_0$, avec $a_n \neq 0 \neq b_m$. Explicitons $a_n = \sum_{0 \leq j \leq r} \alpha_{n,j} Y^{n-j}X^j$ et $b_m = \sum_{0 \leq j \leq s} \beta_{m,j} \cdot Y^{m-j}X^j$, avec $\alpha_{n,r}$ et $\beta_{m,s}$ dans $\mathbf{C}^*$. On a $m > 0$, $n > 0$, et la relation $ab - qba = 1$ implique: $\alpha_{n,r}\beta_{m,s}[q^{r(m-s)} - q^{s(n-r)+1}]Y^{n+m-r-s}X^{r+s} = 0$; donc $q^{ns-mr+1} = 1$. Par ailleurs, $\theta(X^p) = a^p = a'_{np} + a'_{np-1} + \cdots + a'_0$ vérifie:

$$a'_{np} = \alpha_{n,r}^p q^v Y^{(n-r)p} X^{rp} + \sum_{j=0}^{rp-1} \alpha'_{np,j} Y^{np-j} X^j, \tag{1.5.1}$$

avec $v \in \mathbf{Z}$ et $\alpha'_{np,j} \in \mathbf{C}$. De même, $\theta(Y^p) = b^p = b'_{mp} + b'_{mp-1} + \cdots + b'_0$, avec:

$$b'_{mp} = \beta_{m,s}^p q^w Y^{(m-s)p} X^{sp} + \sum_{j=0}^{sp-1} \beta'_{mp,j} Y^{mp-j} X^j. \tag{1.5.2}$$

La restriction de θ au centre $\mathbf{C}[X^p, Y^p]$ de A_1^q déterminant un automorphisme de $\mathbf{C}[X^p, Y^p]$ on a: $a'_i = b'_i = 0$ si $i \not\equiv 0$ modulo p, et dans les formules (1.5.1) et

(1.5.2), $\alpha'_{np,j} = \beta'_{mp,j} = 0$ si $j \not\equiv 0$ modulo p. En appliquant le lemme 2 de [ML], (cf. [AM]), trois cas seulement peuvent se présenter:

Premier cas: il existe $t \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $a'_{np} = \lambda (b'_{mp})^t$; on déduit de (1.5.1) et (1.5.2) que $r = st$ et $n = mt$, d'où $ns = mr$, ce qui, avec la relation $q^{ns-mr+1} = 1$, contredit $q \neq 1$.

Deuxième cas: il existe $t \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $b'_{np} = \lambda (a'_{mp})^t$; on conclut de même à une contradiction. On est donc nécessairement dans le:

Troisième cas: $\theta(X^p) = \zeta X^p + \xi Y^p + \omega$ et $\theta(Y^p) = \zeta' X^p + \xi' Y^p + \omega'$, avec ζ, ξ, ω, ζ', ξ', ω' dans $\mathbf{C}$. En considérant le degré total en X et Y dans A_1^q, on en déduit que: $\theta(X) = \alpha X + \beta Y + \gamma$ et $\theta(Y) = \alpha' X + \beta' Y + \gamma'$ avec α, β, γ, α', β', γ' dans $\mathbf{C}$. On tire de (1.1.1):

$$\begin{cases} \alpha\alpha' = \beta\beta' = 0, \\ \alpha\gamma' + \alpha'\gamma = \beta\gamma' + \beta'\gamma = 0 \\ (1 - q^2)\beta\alpha' = 0 \\ \alpha\beta' - q\alpha'\beta + \gamma\gamma'(1 - q) = 1 \end{cases}$$

Si $p > 2$, on a nécessairement $\beta' = \alpha^{-1}$ et $\alpha' = \beta = \gamma = \gamma' = 0$, et donc $\theta \in G_1$. Si $p = 2$, une autre solution est: $\alpha' = \beta^{-1}$ et $\alpha = \beta' = \gamma = \gamma' = 0$, ce qui achève la preuve. □

1.6. Proposition. *Si $q \neq \pm 1$, alors $\mathrm{Aut}(C_1^q) = H \simeq (\mathbf{C}^*)^2 \times SL(2, \mathbf{Z})$. Si $q = -1$, alors $\mathrm{Aut}(C_1^q)$ est égal au produit semi-direct de H par $\langle \omega' \rangle$, avec ω' l'involution de C_1^q échangeant Z et Y.*

Preuve. Soit θ un $\mathbf{C}$-automorphisme de C_1^q. Les éléments $\theta(Z)$ et $\theta(Y)$ sont des unités de C_1^q, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*$ et $s = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ telle que $\theta(Z) = \alpha Y^b Z^a$ et $\theta(Y) = \beta Y^d Z^c$. L'existence de l'automorphisme réciproque θ^{-1} nécessite: $ad - bc = \pm 1$. Lorsque q n'est pas racine de l'unité, la condition $\theta(Z)\theta(Y) = q\theta(Y)\theta(Z)$ implique après identification que $s \in SL(2, \mathbf{Z})$, et donc $\theta = \psi_{\alpha,\beta,s} \in H$. Si q est d'ordre $p \geq 2$ dans $\mathbf{C}^*$, on obtient $ad - bc \equiv 1$ modulo p. Si $p > 2$, on a nécessairement $ac - bc = 1$, d'où $\theta \in H$. Si $p = 2$ et $ad - bc = -1$, on a: $\theta = \omega' \psi_{\alpha',\beta',s'}$ pour $\alpha' = (-1)^{ab}\alpha$, $\beta' = (-1)^{bc}\beta$ et $s' = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$. □

1.7. THÉORÈME. *Si* $q \neq \pm 1$, *alors* $\mathrm{Aut}(B_1^q) = K$. *Si* $q = -1$, *alors* $\mathrm{Aut}(B_1^q)$ *est égal au produit semi-direct de* K *par* $\langle\omega\rangle$, *avec* ω *l'involution de* B_1^q *échangeant* X *et* Y.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}(B_1^q)$; $\theta(Z)$ étant une unité de B_1^q, il existe $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $\theta(Z) = \varepsilon Z^n$. En utilisant θ^{-1}, il vient $n = \pm 1$. On introduit le sous-groupe $\mathrm{Aut}^+(B_1^q) = \{\theta \in \mathrm{Aut}(B_1^q)\ ;\ \exists\ \ \varepsilon \in \mathbf{C}^*,\ \theta(Z) = \varepsilon Z\}$. D'après la définition (1.4.6), $\mathrm{Aut}(B_1^q)$ apparaît comme la réunion disjointe de $\mathrm{Aut}^+(B_1^q)$ et de son complémentaire $\mathrm{Aut}^+(B_1^q)\xi$, avec $\mathrm{Aut}^+(B_1^q)$ d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}(B_1^q)$. Ainsi, il suffit de vérifier que $\mathrm{Aut}^+(B_1^q)$ est égal au produit direct G_1H_1 si $q \neq \pm 1$, et au produit semi-direct de G_1H_1 par $\langle\omega\rangle$ si $q = -1$.

Fixons $\theta \in \mathrm{Aut}^+(B_1^q)$; notons $\theta(Z) = \varepsilon Z$, $\theta(X) = aZ^{-m}$ et $\theta(Y) = bZ^{-h}$, avec $m \in \mathbf{N}$, $h \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$, $a \in A_1^q$, $b \in A_1^q$. On décompose dans $A_1^q : a = \sum \alpha_{i,j} Y^i X^j$ et $b = \sum \beta_{i,j} Y^i X^j$, avec $\alpha_{i,j} \in \mathbf{C}$ et $\beta_{i,j} \in \mathbf{C}$. Il résulte de (1.1.2) que:

$$Za = q^{-1}aZ \quad \text{et} \quad Zb = qbZ. \tag{1.7.1}$$

On sépare la preuve en deux cas:

Premier cas: si q n'est pas racine de l'unité, on déduit de (1.7.1) que $j = i + 1$ pour tout $\alpha_{i,j} \neq 0$, et a est de la forme: $a = [\sum \alpha_{i,i+1} Y^i X^i]X$. Or pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a:

$$Y^i X^i = (q-1)^{-i} \prod_{k=0}^{i-1} (q^{-k}Z - 1) \in \mathbf{C}[Z]. \tag{1.7.2}$$

On obtient ainsi: $\theta(X) = P(Z)X$, avec $P(Z) \in \mathbf{C}[Z^{\pm}]$. De même: $\theta(Y) = Q(Z)Y$ avec $Q(Z) \in \mathbf{C}[Z^{\pm}]$. En appliquant θ à (1.7.2) pour $i = 1$, on a dans $\mathbf{C}[Z^{\pm}]$:

$$(\varepsilon Z - 1) = (Z-1)Q(Z)P(q^{-1}Z). \tag{1.7.3}$$

En raisonnant sur le degré et la valuation en Z dans $\mathbf{C}[Z^{\pm}]$, on en déduit que: $Q(Z)P(q^{-1}Z) = \varepsilon = 1$. Il existe donc $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que: $P(Z) = \alpha Z^n$ et $Q(Z) = \alpha^{-1}q^n Z^{-n}$. On conclut que $\theta = (\phi_\alpha)^{-1}\psi_n \in G_1H_1$.

Second cas: si q est d'ordre $p \geq 2$ dans $\mathbf{C}^*$, il résulte de (1.7.1) que: $j - i - 1 \equiv 0 \bmod p$ pour tout $\alpha_{i,j} \neq 0$, et $j - i + 1 \equiv 0 \bmod p$ pour tout $\beta_{i,j} \neq 0$. Avec (1.1.3), $\theta(X)$ et $\theta(Y)$ s'écrivent alors dans $C_1^q : \theta(Y) = R(Y^p, Z)Y$ et $\theta(X) = S(Y^p, Z)Y^{-1}$, avec $R(Y^p, Z)$ et $S(Y^p, Z)$ des élements de $\mathbf{C}[Z^{\pm}, Y^{\pm p}]$. Donc:

$$\frac{1}{q-1}(\varepsilon Z - 1) = \theta(YX) = R(Y^p, Z)S(Y^p, q^{-1}Z).$$

En raisonnant sur le degré et la valuation en Y^p dans $\mathbf{C}[Z^{\pm}, Y^{\pm p}] =$

$\mathbf{C}[Z^{\pm}][Y^{\pm p}]$, on vérifie que $R(Y^p, Z)$ est de la forme $Q(Z)Y^{pt}$ et $S(Y^p, Z)$ de la forme $T(Z)Y^{-pt}$ avec $Q(Z)$ et $T(Z)$ dans $\mathbf{C}[Z^{\pm}]$, et $t \in \mathbf{Z}$. Finalement: $\theta(Y) = Q(Z)Y^{pt+1}$ et $\theta(X) = T(Z)Y^{-pt-1}$. De même, pour l'automorphisme θ^{-1}, on a $\theta^{-1}(Y) = V(Z)Y^{ps+1}$ avec $s \in \mathbf{Z}$ et $V(Z) \in \mathbf{C}[Z^{\pm}]$. De l'identité: $Y = V(\varepsilon Z) \cdot [Q(Z)Y^{pt+1}]^{ps+1}$, on déduit que $(ps+1)(pt+1) = 1$.

Dans le cas où $p > 2$, on a nécessairement $t = s = 0$, donc $\theta(Y) = Q(Z)Y$. En se plaçant, non plus dans C_1^q, mais dans la localisation "symétrique" $\mathbf{C}_q[X^{\pm}, Z^{\pm}]$ de B_1^q par rapport aux puissances de X, on montre de même que $\theta(X) = P(Z)X$ pour un certain $P(Z) \in \mathbf{C}[Z^{\pm}]$. On conclut alors comme dans le cas où q n'est pas racine de l'unité, que $\theta \in G_1H_1$.

Dans le cas où $p = 2$. Une autre solution est $s = t = -1$, pour laquelle on a: $\theta(Y) = Q(Z)Y^{-1}$ et $\theta(X) = T(Z)Y$. En notant ω l'involution de B_1^q échangeant X et Y, et $\rho = \theta\omega$, on obtient: $\rho(X) = Q(Z)Y^{-1}$ et $\rho(Y) = T(Z)Y$. Dans le corps de fractions D_1^q, la première égalité se réécrit $\rho(X) = U(Z)X$, en posant $U(Z) = (q-1)Q(Z)/(qZ-1) \in \mathbf{C}(Z)$. Comme $\rho(X) \in B_1^q \subseteq \mathbf{C}_q[X^{\pm}, Z^{\pm}]$, on remarque qu'en fait $U(Z) \in \mathbf{C}[Z^{\pm}]$. On conclut comme dans les cas précédents que $\rho \in G_1H_1$. □

1.8. *Remarque.* Soit $R = \mathbf{C}[Y][X; \sigma, \delta]$ une extension de Ore de $\mathbf{C}[Y]$, avec $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}[Y])$ et δ une σ-dérivation de $\mathbf{C}[Y]$. Il existe $q \in \mathbf{C}^*$ et $r \in \mathbf{C}$ tels que $\sigma(Y) = qY + r$. Si R est de "type quantique" (i.e. $q \neq 1$), il résulte de la classification de [AVV] que R est isomorphe, soit au plan quantique, soit à l'algèbre de Weyl quantique. Le groupe d'automorphismes d'une telle algèbre quantique R est donc entièrement déterminé par la proposition 1.5 ci-dessus et la proposition 1.1.4 de [AC].

II. $U_q^+(sl(3))$ et algèbre de Hayashi

Dans toute cette section, on désigne par q un élément fixé de $\mathbf{C}^*$, non racine de l'unité.

2.1. Algèbre de Heisenberg quantique. On note H_q la $\mathbf{C}$-algèbre $U_q^+(sl(3))$ engendrée sur $\mathbf{C}$ par e_1 et e_2 avec les relations de Serre:

$$e_i^2e_j - (q^2 + q^{-2})e_ie_je_i + e_je_i^2 = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

En posant $X = e_1$, $Y = e_2$, et $Z = qe_1e_2 - q^{-1}e_2e_1$, on peut encore définir (cf. [AD], [KS], [Ma]) H_q comme la $\mathbf{C}$-algèbre engendrée sur $\mathbf{C}$ par X, Y, Z, soumis aux relations:

(2.1.1) $$XZ = q^2 ZX,\ YZ = q^{-2} ZY,\ qXY - q^{-1}YX = Z.$$

On peut considérer H_q comme l'extension de Ore itérée $H_q = \mathbf{C}[Z][Y\,;\sigma][X\,;\tau,\delta]$, avec σ le $\mathbf{C}$-automorphisme de $\mathbf{C}[Z]$, τ le $\mathbf{C}$-automorphisme de $\mathbf{C}[Z][Y\,;\sigma]$, et δ la τ-dérivation de $\mathbf{C}[Z][Y\,;\sigma]$, définis par $\sigma(Z) = q^{-2}Z$, $\tau(Z) = q^2 Z$, $\tau(Y) = q^{-2}Y$, $\delta(Z) = 0$ et $\delta(Y) = q^{-1}Z$. On note $\bar{Z}$ l'élément normalisant:

(2.1.2) $$\bar{Z} = q^{-1}XY - qYX = (q^{-3} - q)\,YX + q^{-2}Z,$$

qui vérifie:

(2.1.3) $$X\bar{Z} = q^{-2}\bar{Z}X \quad \text{et} \quad Y\bar{Z} = q^2 \bar{Z}Y.$$

On montre facilement (cf. [AD]) que le centre de H_q est $\mathbf{C}[\Omega]$, où $\Omega = Z\bar{Z}$. Si on localise H_q par les puissances de l'élément normalisant Z, on obtient une première extension $H_q' = \mathbf{C}[Z^{\pm}][Y\,;\sigma][X\,;\tau,\delta]$ de H_q. Les puissances de Y dans H_q' forment une partie de Ore (cf. [Go], lemme 1.4.) suivant laquelle on localise de nouveau pour obtenir $H_q'' = \mathbf{C}_{q'}[Z^{\pm}, Y^{\pm}][X\,;\tau,\delta]$, où $\mathbf{C}_{q'}[Z^{\pm}, Y^{\pm}]$ est une algèbre du type de [Ja] avec $ZY = q'YZ$ et $q' = q^2$, et où τ et δ désignent les prolongements de τ et δ à $\mathbf{C}_{q'}[Z^{\pm}, Y^{\pm}]$. Mais $\Omega = (q^{-3} - q)ZYX + q^{-2}Z^2$, et donc:

(2.1.4) $$H_q'' = \mathbf{C}_{q'}[Z^{\pm}, Y^{\pm}][\Omega] = \mathbf{C}[\Omega]_{q'}[Z^{\pm}, Y^{\pm}].$$

On trouvera en [KS] et [Ma] une analyse détaillée de H_q du point de vue de la théorie des anneaux. En vue de calculer le groupe d'automorphismes de H_q, on introduit le sous-groupe: $\mathrm{Aut}^+(H_q) = \{\theta \in \mathrm{Aut}(H_q)\,;\ \exists\, \varepsilon \in \mathbf{C}^*,\ \theta(Z) = \varepsilon Z\}$, ainsi que l'involution ω de H_q définie par: $\omega(X) = Y$, $\omega(Y) = X$, $\omega(Z) = -\bar{Z}$. On donne d'abord une caractérisation des éléments normalisants de H_q. Une autre preuve de la proposition 2.3 figure en [Ca].

2.2. Lemme. *L'ensemble des éléments normalisants de H_q est la réunion disjointe*: $\{PZ^n\,;\ P \in \mathbf{C}[\Omega],\ n \in \mathbf{N}^*\} \cup \mathbf{C}[\Omega] \cup \{P\bar{Z}^n\,;\ P \in \mathbf{C}[\Omega],\ n \in \mathbf{N}^*\}$.

Preuve. Soit S un élément normalisant non-nul dans H_q; il existe U et V dans H_q tels que $SX = US$, $SY = VS$ et $SZ = TS$ pour $T = (qUV - q^{-1}VU)$. On déduit en raisonnant sur les degrés en X et en Y naturellement définis dans H_q que $T \in \mathbf{C}[Z]$, $U = aX + b$ et $V = cY + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}[Z]$, $a \neq 0 \neq c$. On obtient

$$T = q^{-1}[a\tau(c) - c\sigma(a)]\,YX + a[q\tau(d) - q^{-1}d]X + c[qb - q^{-1}\sigma(b)]\,Y$$
$$+ [(q - q^{-1})bd + a\tau(c)Z],$$

et donc: $\tau(d) = q^{-2}d$, $\sigma(b) = q^2 b$, $c\sigma(a) = a\tau(c)$. Par définition de τ et σ dans $\mathbf{C}[Z]$, il en résulte que $d = b = 0$, $a \in \mathbf{C}^*$, et $c \in \mathbf{C}^*$. Développons alors S dans H_q'' sous la forme: $S = \sum E_{i,j} Z^j Y^i$, la somme étant prise sur une partie finie I de $\mathbf{Z}^2$, avec $E_{i,j} \in \mathbf{C}[\Omega]$ pour tout $(i, j) \in I$. On a:

$$0 = SY - cYS = \sum_{i,j} E_{i,j}(1 - cq^{-2j}) Z^j Y^{i+1},$$
$$0 = SZ - acZS = \sum_{i,j} E_{i,j}(q^{-2i} - ac) Z^{j+1} Y^i.$$

On en déduit qu'il existe t et r pairs dans $\mathbf{Z}$ tels que $c = q^t$ et $a = q^r$, avec $S = EZ^{t/2} Y^{-(t+r)/2}$, en abrégeant $E = E_{-(t+r)/2, t/2} \neq 0$ dans $\mathbf{C}[\Omega]$. L'égalité $SX = q^r XS$ implique alors: $XY^{(t+r)/2} = q^{r+t} Y^{(t+r)/2} X$. Quitte à multiplier à droite et à gauche par $Y^{-(t+r)/2}$, on peut supposer $t + r \geq 0$ pour utiliser la relation:

$$XY^i = q^{-2i} Y^i X + q^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{i-1} q^{-4j}\Big) Z Y^{i-1} \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}^*,$$

et conclure que $t + r = 0$, d'où $S = EZ^w$, avec $w = t/2 \in \mathbf{Z}$ et $E \in \mathbf{C}[\Omega]$. Si $w \in \mathbf{N}$, on obtient S sous la forme voulue. On suppose donc dans la suite que $w < 0$. Notons $v \in \mathbf{N}$ la valuation de E dans $\mathbf{C}[\Omega]$, et $E = \sum_{v \leq j \leq n} \alpha_j \Omega^j$, avec $n \geq v \geq 0$ et $\alpha_j \in \mathbf{C}$. Si l'entier $-w - v - 1$ appartenait à $\mathbf{N}$, l'anneau H_q contiendrait l'élément $SZ^{-w-v-1} = EZ^{-v-1} = \alpha_v \bar{Z}^v Z^{-1} + \sum_{v+1 \leq i \leq n} \bar{Z}^i Z^{i-v-1}$, d'où $\alpha_v \bar{Z}^v Z^{-1} \in H_q$. L'idéal ZH_q, qui est complètement premier, contiendrait $\bar{Z}^v$ et donc $\bar{Z}$. En appliquant ω, on aurait aussi $Z \in \bar{Z} H_q$, et finalement $\bar{Z} = \alpha Z$ pour un $\alpha \in \mathbf{C}^*$, ce qui est impossible. Ainsi: $v \geq -w$, et donc $S = [\sum_{v \leq i \leq n} \alpha_i \Omega^{i+w}] \bar{Z}^{-w}$ est le produit d'un élément de $\mathbf{C}[\Omega]$ par une puissance de $\bar{Z}$ d'exposant $-w \in \mathbf{N}^*$. □

2.3. Proposition. *Si $\theta \in \mathrm{Aut}^+(H_q)$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*$ tels que $\theta(X) = \alpha X$, $\theta(Y) = \beta Y$ et $\theta(Z) = \alpha\beta Z$, de sorte que $\mathrm{Aut}^+(H_q)$ est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^2$. De plus, $\mathrm{Aut}(H_q)$ est le produit semi direct de $\mathrm{Aut}^+(H_q)$ par $\langle\omega\rangle$.*

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}(H_q)$. La restriction de θ au centre de H_q étant un automorphisme de $\mathbf{C}[\Omega]$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $\eta \in \mathbf{C}$ tels que $\theta(Z)\theta(\bar{Z}) = \lambda\Omega + \eta$. En appliquant le lemme 2.2 à $\theta(Z)$ et $\theta(\bar{Z})$, on en déduit que $\theta(Z) = \varepsilon Z$ et $\theta(\bar{Z}) = \mu\bar{Z}$, ou $\theta(Z) = \varepsilon\bar{Z}$ et $\theta(\bar{Z}) = \mu Z$, avec ε et μ dans $\mathbf{C}^*$; ce qui démontre la seconde assertion de la proposition.

Pour la première, fixons $\theta \in \mathrm{Aut}^+(H_q)$, avec $\theta(Z) = \varepsilon Z$ et $\theta(\bar{Z}) = \mu\bar{Z}$. On a:

$$(q^{-3} - q)\theta(Y)\theta(X) + q^{-2}\varepsilon Z = \theta(\bar{Z}) = \mu(q^{-3} - q)YX + \mu q^{-2} Z,$$

d'où: $\theta(Y)\theta(X) = \mu YX + \gamma Z$, avec la notation $\gamma = (\varepsilon - \mu)/(q^3 - q^{-1}) \in \mathbf{C}$. On en déduit, en utilisant le degré total en X et Y dans H_q, qu'il existe P, Q, M, P', Q', M' dans $\mathbf{C}[Z]$ tels que $\theta(X) = PX + QY + M$ et $\theta(Y) = P'X + Q'Y + M'$. On applique θ aux relations (2.1.1) pour vérifier que $\theta(X) = PX$ et $\theta(Y) = Q'Y$, avec P et Q' dans $\mathbf{C}^*$, et $\varepsilon = PQ'$. $\square$

2.4. Algèbre de Hayashi. Par analogie avec la situation classique, on peut considérer comme q-analogue de l'algèbre de Weyl $A_1(\mathbf{C})$ le quotient de H_q par l'idéal principal $(\Omega - 1)H_q$ de H_q. L'algèbre A_ν obtenue (avec $\nu = q^{-2}$, cf. plus loin en 2.6) est celle introduite par T. Hayashi en [Ha], et étudiée sur le plan de la théorie des anneaux en [KS] et [Ma]. Conformément au lemme 1.3 de [KS], on définira ici A_ν comme l'algèbre engendrée sur $\mathbf{C}$ par x, y, $t^{\pm}$ soumis à:

(2.4.1)
$$\begin{cases} tx = \nu^{-1}xt, & ty = \nu yt; \\ xy = \dfrac{1-\nu^{-2}t^{-2}}{1-\nu^{-2}} & yx = \dfrac{1-t^{-2}}{1-\nu^{-2}}. \end{cases}$$

A_ν est une $\mathbf{C}$-algèbre simple intègre noetherienne, de centre $\mathbf{C}$, de GK-dimension égale à 2 et de K-dimension égale à 1 (cf. [KS]). Les éléments x et y de A_ν vérifiant la relation:

(2.4.2)
$$xy - \nu^{-2}yx = 1,$$

la sous-algèbre S de A_ν engendrée par x et y est une algèbre de Weyl quantique $A_1^{q'}$ du type étudié précedemment en 1.1, pour $q' = \nu^{-2}$. De plus, on a:

(2.4.3)
$$xy - yx = t^{-2},$$

de sorte que A_ν admet aussi pour sous-algèbre le localisé T de S par rapport aux puissances de l'élément normalisant $z = t^{-2}$. Une base de A_ν sur $\mathbf{C}$ est $(t^n x^m)_{n\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{N}} \cup (t^n y^m)_{n\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{N}^*}$, et tout élément de A_ν admet une écriture unique sous la forme: $a = b + ct$, avec b, $c \in T$. L'algèbre T est une algèbre de type $B_1^{q'}$ (cf. plus haut §1.1), et A_ν est une extension quadratique normalisante de T.

Afin de décrire le groupe $\mathrm{Aut}(A_\nu)$, on introduit certains automorphismes évidents de A_ν à partir de ceux des sous-algèbres $S \simeq A_1^{q'}$ et $T \simeq B_1^{q'}$. Un premier sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ est $G_1 = \{\phi_\beta\,;\beta \in \mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{C}^*$, avec:

(2.4.4)
$$\phi_\beta(x) = \beta^{-1}x,\ \phi_\beta(y) = \beta y,\ \phi_\beta(t) = t.$$

Un second sous-groupe est $H_1 = \{\psi_m\,; m \in \mathbf{Z}\} \simeq \mathbf{Z}$, avec:

(2.4.5)
$$\psi_m(x) = t^m x,\ \psi_m(y) = yt^{-m},\ \psi_m(t) = t.$$

On introduit aussi dans $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ les deux involutions ξ et τ définies par:

(2.4.6) $$\xi(x) = yt,\ \xi(y) = -\nu xt,\ \xi(t) = -\nu^{-1}t^{-1};$$

(2.4.7) $$\tau(x) = x,\ \tau(y) = y,\ \tau(t) = -t.$$

On note enfin: $\mathrm{Aut}^+(A_\nu) = \{\theta \in \mathrm{Aut}(A_\nu)\ ;\ \exists\, \varepsilon \in \mathbf{C}^*,\ \theta(t) = \varepsilon t\}$.

2.5. Théorème. *Si $\theta \in \mathrm{Aut}^+(A_\nu)$, il existe $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que $\theta(x) = \alpha^{-1}t^m x$, $\theta(y) = \alpha y t^{-m}$, et $\theta(t) = \pm\, t$, de sorte que $\mathrm{Aut}^+(A_\nu)$ est égal au produit semi-direct par $\langle\tau\rangle$ du produit direct $G_1H_1 \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$. De plus, $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ est égal au produit semi-direct de $\mathrm{Aut}^+(A_\nu)$ par $\langle\xi\rangle$.*

Preuve. Le groupe des unités de A_ν est $\{\alpha t^n\ ;\ \alpha \in \mathbf{C}^*,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Il en résulte que, pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}(A_\nu)$, $\theta(t)$ est de la forme εt ou εt^{-1} pour un ε dans $\mathbf{C}^*$. Donc $\mathrm{Aut}(A_\nu) = \mathrm{Aut}^+(A_\nu) \times \langle\xi\rangle$. Fixons $\theta \in \mathrm{Aut}^+(A_\nu)$, avec $\theta(t) = \varepsilon t$. Décomposons $\theta(x) = b + ct$, où $b, c \in T$. En appliquant θ à la première relation de (2.4.1), Il vient:

$$[\phi_\nu(b) - \nu^{-1}b]t + [\phi_\nu(c) - \nu^{-1}c]t^2 = 0.$$

Comme $t^2 \in T$ on a: $\Phi_\nu(b) = \nu^{-1}b$ et $\phi_\nu(c) = \nu^{-1}c$. On décompose b dans T en: $b = (\sum_{i,j} \alpha_{i,j}x^i y^i)z^{-n}$, avec $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha_{i,j} \in \mathbf{C}$; en appliquant ϕ_ν, on obtient que $j - i = -1$ pour tout $\alpha_{i,j} \neq 0$, d'où: $b = x(\sum_j \alpha_{j+1,j}x^j y^j)z^{-n}$. On rappelle (2.4.2), (2.4.3), et (1.7.2) pour en déduire qu'il existe $P(z) \in \mathbf{C}[z^\pm]$ tel que $b = xP(z)$. De la même façon, $c = xQ(z)$, et il existe donc $U(t) \in \mathbf{C}[t^\pm]$ tel que $\theta(x) = U(t)x$. On établit de même que $\theta(y) = yV(t)$ pour un certain $V(t) \in \mathbf{C}[t^\pm]$. On applique θ à la troisième identité de (2.4,1):

$$1 - \nu^{-2}\varepsilon^{-2}t^{-2} = (1 - \nu^{-2})\theta(xy) = U(t)(1 - \nu^{-2}t^{-2})V(t),$$

ce qui implique en raisonnant sur le degré et la valuation en t dans $\mathbf{C}[t^\pm]$, que $U(t)V(t) = 1 = \varepsilon^{-2}$. On conclut à l'existence de $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que $\theta(x) = \alpha^{-1}t^m x$, $\theta(y) = \alpha y t^{-m}$, et $\theta(t) = \pm\, t$; ce qui achève la preuve. □

2.6. Remarques. Reprenons pour H_q les notations de 2.1. Désignons par x, y et t les images canoniques respectives de X, $q^{-1}YZ$ et $q\bar{Z}$ dans $H_q/(\Omega - 1)H_q$, de sorte que $H_q/(\Omega - 1)H_q \simeq A_\nu$ en prenant $\nu = q^{-2}$. D'après les énoncés 2.3 et 2.5, les automorphismes θ de $\mathrm{Aut}^+(H_q)$ qui induisent par passage au quotient des automorphismes de A_ν sont du type: $\theta(X) = \alpha X$, $\theta(Y) = \pm\,\alpha^{-1}Y$, $\theta(Z) = \pm\, Z$, avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$, et le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ obtenu est le produit direct de G_1 par

$\langle\tau\rangle$ définis en (2.4.4) et (2.4.7). L'involution ω de H_q induit par passage au quotient l'involution ξ de A_ν définie en (2.4.6).

Par ailleurs, en reprenant les notations de 2.4 et avec $q' = \nu^{-2}$, on a:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] S \simeq A_1^{q'} \arrow[r, hook] & T \simeq B_1^{q'} \arrow[r, hook] & A_\nu \arrow[r, hook] & \mathbf{C}_\nu[t^\pm, y^\pm] \\ & C_1^{q'} \arrow[u, hook] \simeq \mathbf{C}_{q'}[z^\pm, y^\pm] = & & \mathbf{C}_{q'}[y^\pm, t^{\pm 2}] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

et les énoncés 1.5, 1.6, 1.7 et 2.5 permettent de préciser les restrictions et les prolongements de tous les automorphismes dans chacun des plongements.

III. Quotients primitifs de $U_q(sl(2))$

Dans toute cette section, on désigne par q un élément fixé de $\mathbf{C}^*$, non racine de l'unité.

3.1. Automorphismes de $U_q(sl(2))$. On note U_q l'algèbre $U_q(sl(2))$, qui est engendrée sur $\mathbf{C}$ par E, F, $K^\pm$, soumis aux relations de commutation:

$$EK = q^{-2}KE, \quad FK = q^2KF, \; EF - FE = \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}}. \tag{3.1.1}$$

On regarde U_q comme l'extension de Ore itérée $\mathbf{C}[K^\pm][F\,;\sigma][E\,;\tau,\delta]$, avec σ le $\mathbf{C}$-automorphisme de $\mathbf{C}[K^\pm]$, τ le $\mathbf{C}$-automorphisme et δ la τ-dérivation de $\mathbf{C}[K^\pm][F\,;\sigma]$ définis par: $\sigma(K) = q^2K$, $\tau(K) = q^{-2}K$, $\tau(F) = F$, $\delta(K) = 0$, et $\delta(F) = (K^2 - K^{-2})/(q^2 - q^{-2})$. Le centre de U_q est $\mathbf{C}[\Omega]$, où:

$$\Omega = FE + \chi \quad \text{en notant } \chi = \frac{q^2K^2 + q^{-2}K^{-2}}{(q^2 - q^{-2})^2} \tag{3.1.2}$$

Rappelons la structure du groupe $\mathrm{Aut}(U_q)$, telle qu'elle est décrite en [AC]. On introduit d'abord l'involution ω de U_q définie par:

$$\omega(E) = F, \; \omega(F) = E, \; \omega(K) = K^{-1}. \tag{3.1.3}$$

Pour toute racine quatrième de l'unité ε, il existe $\tau_\varepsilon \in \mathrm{Aut}(U_q)$ tel que:

$$\tau_\varepsilon(E) = E, \; \tau_\varepsilon(F) = \varepsilon^2F, \; \tau_\varepsilon(K) = \varepsilon K. \tag{3.1.4}$$

Le sous-groupe $\mathrm{Aut}^{++}(U_q)$ de $\mathrm{Aut}(U_q)$ formé des θ fixant K est isomorphe au produit direct $\mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$, tout $\theta \in \mathrm{Aut}^{++}(U_q)$ vérifiant:

$$\theta(E) = \alpha^{-1}K^mE, \; \theta(F) = \alpha FK^{-m}, \; \theta(K) = K, \tag{3.1.5}$$

pour un certain couple $(\alpha, m) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(U_q)$ est le produit semi-direct: $[\mathrm{Aut}^{++}(U_q) \times \langle\tau_i\rangle] \times \langle\omega\rangle$, avec $\langle\tau_i\rangle$ et $\langle\omega\rangle$ cycliques d'ordre 4 et 2 respectivement. Tout $\theta \in \mathrm{Aut}(U_q)$ vérifiant $\theta(\Omega) = \pm\,\Omega$, on introduit le sous-groupe d'indice 2:

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}^+(U_q) &= \{\theta \in \mathrm{Aut}(U_q)\ ;\ \theta(\Omega) = \Omega\}\\ &= \mathrm{Aut}^{++}(U_q) \times \langle\tau_{-1}\rangle \times \langle\omega\rangle\\ &\simeq (\mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}) \times V, \text{ avec } V \text{ le groupe de Klein.}\end{aligned}$$

On aura besoin plus loin du lemme suivant de divisibilité dans U_q.

3.2. LEMME. *Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ fixé, et I l'idéal bilatère de U_q engendré par $(\Omega - \lambda)$. Si $P \in U_q$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $PE^m \in I$ ou $E^mP \in I$, alors $P \in I$.*

Preuve. On peut supposer $m = 1$ et $P \neq 0$. Soit $Q \in U_q$ tel que $(\Omega - \lambda)Q = EP$. En notant $R = \mathbf{C}[K^{\pm}][F\ ;\sigma]$, il en résulte que $\deg_E(P) = \deg_E(Q) > 0$ dans $R[E\ ;\tau, \delta]$. Donc: $P = \sum_{0\le i\le n} u_iE^i$ et $Q = \sum_{0\le i\le n} v_iE^i$, avec u_i et v_i dans R, $n \in \mathbf{N}^*$ et $u_n \neq 0 \neq v_n$. Développons $EP = (FE + \chi - \lambda)Q$ et identifions; il vient:

$$\begin{aligned}&(*)_{n+1} && \tau(u_n) = F\tau(v_n),\\ &(*)_j && \tau(u_{j-1}) + \delta(u_j) = F\tau(v_{j-1}) + (\chi - \lambda)v_j + F\delta(v_j) \quad \text{pour } 1 \le j \le n,\\ &(*)_0 && \delta(u_0) = (\chi - \lambda)v_0 + F\delta(v_0).\end{aligned}$$

D'après $(*)_{n+1}$: $u_n = Fv_n$, d'où $\delta(u_n) = F\delta(v_n) + \delta(F)v_n$. On reporte dans $(*)_n$; on déduit: $u_{n-1} = Fv_{n-1} + \sigma[\chi - \lambda - \delta(F)]\sigma(v_n)$. On réapplique δ en remarquant que $\delta\sigma([\chi - \lambda - \delta(F)]) = 0$ puisque $[\chi - \lambda - \delta(F)] \in \mathbf{C}[K^{\pm1}]$; il vient:

$$\delta(u_{n-1}) = F\delta(v_{n-1}) + \delta(F)v_{n-1} + [\chi - \lambda - \delta(F)]\delta\sigma(v_n).$$

D'où, avec $(*)_{n-1}$:

$$u_{n-2} = Fv_{n-2} - \sigma[\chi - \lambda - \delta(F)]\sigma\delta\sigma(v_n) + \sigma[\chi - \lambda - \delta(F)]\sigma(v_{n-1}).$$

On réitère de proche en proche jusqu'à $(*)_1$ pour obtenir:

$$u_0 = Fv_0 + \sigma[\chi - \lambda - \delta(F)] \sum_{1\le j\le n} (-1)^{j-1}\sigma(\delta\sigma)^{j-1}(v_j),$$

ce qui implique avec $(*)_0$:

$$(**) \qquad v_0 = \sum_{1\le j\le n} (-1)^{j+1}(\delta\sigma)^j(v_j).$$

Définissons une famille $\{t_j\}_{0\leq j\leq n-1}$ d'éléments de R en posant: $t_{n-1}=\sigma(v_n)$, et $t_j=\sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^i(\sigma\delta)^i\sigma(v_{j+i+1})=\sigma[v_{j+1}-\delta(t_{j+1})]$ pour tout $0\leq j\leq n-2$. Ainsi, d'une part: $v_i=\tau(t_{i-1})+\delta(t_i)$ pour tout $1\leq i\leq n-1$, d'autre part $(**)$ implique: $\delta(t_0)=v_0$. Dès lors, l'élément $T=\sum_{i=0}^{n-1}t_iE^i$ de U_q vérifie:

$$ET=\delta(t_0)+\sum_{i=0}^{n-1}[\delta(t_i)+\tau(t_{i-1})]E^i+\tau(t_{n-1})E^n=Q,$$

d'où $P=(\Omega-\lambda)T\in I$. Si $PE\in I$, on se ramène au premier cas par l'antiautomorphisme π tel que $\pi(E)=E$, $\pi(F)=F$, $\pi(K)=K^{-1}$. □

3.3. Définition. Les notations sont celles de 3.1. Pour tout λ de $\mathbf{C}$, on désigne par $B_{q,\lambda}$ l'algèbre quotient de U_q par l'idéal principal $(\Omega-\lambda)U_q$. Si $e, f, k^{\pm}$ sont les images respectives de $E, F, K^{\pm}$ par la surjection canonique de U_q vers $B_{q,\lambda}$, on a les relations suivantes (avec $\nu=q^{-2}$):

$$\text{(3.3.1)}\qquad \begin{cases} ke=\nu^{-1}ek,\ kf=\nu fk\,; \\ ef=\lambda-\dfrac{\nu k^2+\nu^{-1}k^{-2}}{(\nu-\nu^{-1})^2},\quad fe=\lambda-\dfrac{\nu^{-1}k^2+\nu k^{-2}}{(\nu-\nu^{-1})^2}. \end{cases}$$

3.4. Proposition. *Pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, $B_{q,\lambda}$ est intègre.*

Preuve. Notons ici I l'idéal bilatère $(\Omega-\lambda)U_q$ et $S=\{E^n\}_{n\geq 1}$ qui est une partie de Ore dans U_q (cf. [Go] lemme 1.4). D'après (3.1.2), le localisé $(U_q)_S$ est $R[\Omega]$, où R est l'algèbre engendrée par $K^{\pm}$ et $E^{\pm}$ soumis à $EK=q^{-2}KE$. Le lemme 3.2 permet d'appliquer le proposition 3.6.15 de [Di3]: l'image canonique T de S dans $U_q/I=B_{q,\lambda}$ est une partie de Ore dans U_q/I, et $(U_q/I)_T$ est isomorphe à $(U_q)_S/I_S$, avec $I_S=\{is^{-1}\,;\,i\in I,\ s\in S\}$ l'idéal bilatère engendré dans $(U_q)_S$ par $(\Omega-\lambda)$. Le quotient U_q/I se plonge dans $(U_q/I)_T\simeq R[\Omega]/(\Omega-\lambda)\simeq R$, qui est intègre. □

Le point (i) du lemme suivant est un analogue pour U_q des remarques 1.5 et 1.6 de [Di2].

3.5. Lemme.

(i) *Tout élément b de $B_{q,\lambda}$ admet une écriture unique sous la forme:*
$b=\sum_{i=1}^{n}P_i(k)e^i+\sum_{j=0}^{m}Q_j(k)f^j$, *avec: $n\in\mathbf{N}^*$, $m\in\mathbf{N}$, $P_i(k)$ et $Q_j(k)$ dans $\mathbf{C}[k^{\pm}]$.*

(ii) *Le groupe des unités de $B_{q,\lambda}$ est $\{\alpha k^n;\ \alpha\in\mathbf{C}^*,\ n\in\mathbf{Z}\}$.*

Preuve. L'image $(k^m e^i f^j)_{i\in\mathbf{N},j\in\mathbf{N},m\in\mathbf{Z}}$ de la base $(K^m E^i F^j)_{i\in\mathbf{N},j\in\mathbf{N},m\in\mathbf{Z}}$ de U_q est une famille génératrice de $B_{q,\lambda}$. Par ailleurs, d'après (3.3.1), tout monôme $e^i f^j$ avec $i, j \in \mathbf{N}$ est de la forme $P(k)f^{j-i}$ si $j \geq i$, et $Q(k)e^{i-j}$ si $i \geq j$, avec $P(k)$ et $Q(k)$ dans $\mathbf{C}[k^{\pm 1}]$. La famille: $\mathscr{B} = (k^i f^j)_{i\in\mathbf{Z},j\in\mathbf{N}} \cup (k^i e^j)_{i\in\mathbf{Z},j\in\mathbf{N}*}$ engendre donc $B_{q,\lambda}$. Considérons par ailleurs la graduation $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de $B_{q,\lambda}$ définie par $T_n = \{b \in B_{q,\lambda}\,;\, kbk^{-1} = \nu^n b\}$. Comme $k^i f^j \in T_j$ et $k^i e^j \in T_{-j}$ pour tous $i \in \mathbf{Z}$ et $j \in \mathbf{N}$, il suffit, pour montrer que $\mathscr{B}$ est libre, de vérifier que $\mathscr{A}_j = (k^i f^j)_{i\in\mathbf{Z}}$ et $\mathscr{C}_j = (k^i e^j)_{i\in\mathbf{Z}}$ sont libres pour tout $j \in \mathbf{N}$. Or si P est un polynôme non-nul à coefficients dans $\mathbf{C}$ tel que $P(k)e^j = 0$ dans $B_{q,\lambda}$, il existe $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ dans $\mathbf{C}$ tels que $(k-\mu_1)(k-\mu_2)\cdots(k-\mu_n)e^j = 0$. Par intégrité de $B_{q,\lambda}$, l'un des $k-\mu_i$ est nul, c'est-à-dire $K - \mu_i \in (\Omega - \lambda)U_q$, ce qui est absurde en considérant le degré en E dans U_q. L'assertion (i) est ainsi prouvée.

Soient b et c dans $B_{q,\lambda}$ tels que $bc = 1$. En décomposant b et c suivant $(T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $b \in T_{-m}$ et $c \in T_m$. Donc: $b = P(k)e^n$ et $c = Q(k)f^n$ avec $n = \pm\, m \in \mathbf{N}$. L'égalité $P(k)Q(\nu^n k)e^n f^n = 1$ fait apparaître $e^n f^n$ comme une unité de $\mathbf{C}[k^{\pm}]$. Il en résulte par récurrence à partir de (3.3.1) que $n = 0$ et $b = P(k)$ est une unité de $\mathbf{C}[k^{\pm}]$. □

3.6. PROPOSITION.

(i) *Soient λ et λ' deux éléments de $\mathbf{C}$. Si $\lambda' = \pm\,\lambda$, alors $B_{q,\lambda'}$ et $B_{q,\lambda}$ sont $\mathbf{C}$-isomorphes. Si $\lambda' \neq \pm\,\lambda$, alors il n'existe aucun homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $B_{q,\lambda'}$ dans $B_{q,\lambda}$.*

(ii) *Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, il existe un plongement de $\mathbf{C}$-algèbre de $B_{q,\lambda}$ dans A_ν (avec $\nu = q^{-2}$), et $B_{q,\lambda}$ n'est pas isomorphe à A_ν.*

Preuve. Soient e, f, k [resp. e', f', k'] les images canoniques de E, F, K dans $B_{q,\lambda} = U_q/(\Omega-\lambda)U_q$ [resp. dans $B_{q,\lambda'} = U_q/(\Omega-\lambda')U_q$]. Si $\lambda' = -\lambda$, il existe un $\mathbf{C}$-isomorphisme θ de $B_{q,\lambda'}$ dans $B_{q,\lambda}$ défini par: $\theta(e') = e$, $\theta(f') = -f$ et $\theta(k') = ik$. Soit réciproquement θ un homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $B_{q,\lambda'}$ sur $B_{q,\lambda}$. Posons: $e_1 = \theta(e')$, $f_1 = \theta(f')$, $k_1 = \theta(k')$. D'après le lemme 3.5, il existe $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$ et $s \in \mathbf{Z}$ tels que $k_1 = \varepsilon k^s$, et e_1 se décompose en:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{n} P_i(k)e^i + \sum_{j=0}^{m} Q_j(k)f^j, \tag{3.6.1}$$

avec $n \in \mathbf{N}^*$, $m \in \mathbf{N}$, $P_i(k)$ et $Q_j(k)$ dans $\mathbf{C}[k^{\pm}]$. On déduit de $k_1 e_1 = \nu^{-1}e_1 k_1$ que $1 = si = -\,sj$ pour tous i, j tels que $P_i(k) \neq 0 \neq Q_j(k)$. Quitte à composer par le $\mathbf{C}$-automorphisme ω de $B_{q,\lambda}$ tel que $\omega(e) = f$, $\omega(f) = e$, $\omega(k) = k^{-1}$, on peut supposer $s = 1$, et donc $e_1 = P_1(k)e$. On montre en décomposant f_1 qu'alors f_1

$= fR_1(k)$ avec $R_1(k) \in \mathbf{C}[k^{\pm}]$. On a:

$$\lambda' - \frac{\nu\varepsilon^2 k^2 + \nu^{-1}\varepsilon^{-2}k^{-2}}{(\nu - \nu^{-1})^2} = \theta(e'f') = e_1 f_1 = P_1(k)\left(\lambda - \frac{\nu k^2 + \nu^{-1}k^{-2}}{(\nu - \nu^{-1})^2}\right)R_1(k).$$

En considérant le degré et la valuation en k dans $\mathbf{C}[k^{\pm}]$, on en déduit que: $P_1(k)R_1(k)$ est un scalaire $\gamma \in \mathbf{C}^*$ tel que: $\lambda' = \gamma\lambda$ et $\gamma = \varepsilon^2 = \varepsilon^{-2}$; ce qui démontre l'assertion (i).

Posons $\nu = q^{-2}$ et plaçons-nous dans A_ν en reprenant les notations de 2.4. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$, et $\mu \in \mathbf{C}^*$ une solution de l'équation: $\mu^4 - \lambda\nu(\nu - \nu^{-1})^2\mu^2 + \nu^2 = 0$. La sous-algèbre de A_ν engendrée par e, f et $k^{\pm}$ définis par:

$$k = \mu t;\ f = y;\ e = \left(\frac{\mu^{-2} - \mu^2 t^2}{(\nu - \nu^{-1})}\right)x, \tag{3.6.2}$$

est isomorphe à $B_{q,\lambda}$. La non isomorphie de $B_{q,\lambda}$ et A_ν découle alors de (i). □

3.7. Notations. Les automorphismes de U_q qui induisent par passage au quotient un automorphisme de $B_{q,\lambda}$ sont les éléments du sous groupe $\mathrm{Aut}^+(U_q)$ si $\lambda \neq 0$, et tous les éléments de $\mathrm{Aut}(U_q)$ si $\lambda = 0$. Soit:

$$\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda}) = \{\theta \in \mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})\ ;\ \exists\, \varepsilon \in \mathbf{C}^*,\ \theta(k) = \varepsilon k\}.$$

Notons $\mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda})$ formé des automorphismes θ de $B_{q,\lambda}$ induits par passage au quotient par un élément de $\mathrm{Aut}^{++}(U_q) \times \langle\tau_{-1}\rangle$ [cf. (3.1.5)], c'est-à-dire, pour $\alpha \in \mathbf{C}^*$, $m \in \mathbf{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$, de la forme:

$$\theta(e) = \alpha^{-1}k^m e\ ;\ \theta(f) = \alpha f k^{-m}\ ;\ \theta(k) = \varepsilon k. \tag{3.7.1}$$

On considère l'involution ω de $B_{q,\lambda}$ définie [cf. (3.1.3)] par:

$$\omega(e) = f\ ;\ \omega(f) = e\ ;\ \omega(k) = k^{-1}. \tag{3.7.2}$$

3.8. Théorème. *$\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$ est le produit semi-direct de $\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda})$ par $\langle\omega\rangle$. Si $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda}) = \mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$ et $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}^+(U_q)$. Si $\lambda = 0$, $\mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda})$ et $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(U_q)$.*

Preuve. Pour tout $\theta \in B_{q,\lambda}$, il résulte de 3.5 que $\theta(k) = \varepsilon k^{\pm}$ pour un $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$, d'où la première assertion. Fixons $\theta \in \mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda})$ et reprenons la preuve de 3.6 pour $\lambda' = \lambda$, $e' = e$, $f' = f$ et $k' = k$. On obtient: $\theta(e) = P(k)e$ et $\theta(f) = fR(k)$, avec $P(k)$ et $R(k)$ dans $\mathbf{C}[k^{\pm}]$ tels que $P(k)R(k)$ soit un élément γ de $\mathbf{C}^*$ vérifiant $\lambda = \lambda\gamma$ et $\gamma = \varepsilon^2 = \varepsilon^{-2}$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\gamma = 1 = \varepsilon^2$; il existe $\alpha \in$

$\mathbf{C}^*$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que: $\theta(e) = \alpha^{-1}k^m e$, $\theta(f) = \alpha f k^{-m}$, $\theta(k) = \pm k$. D'où: $\mathrm{Aut}^+(B_{q,\lambda}) = \mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda}) \simeq \mathrm{Aut}^{++}(U_q) \times \langle \tau_{-1} \rangle$, et $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda}) \simeq \mathrm{Aut}^+(U_q)$. Si $\lambda = 0$, on obtient: $\theta(e) = \alpha^{-1}k^m e$, $\theta(f) = \alpha\varepsilon^2 f k^{-m}$, $\theta(k) = \varepsilon k$ avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$, $m \in \mathbf{Z}$ et $\varepsilon^4 = 1$. On conclut que $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda}) \simeq \mathrm{Aut}(U_q)$. □

3.9. COROLLAIRE. *Pour tout $\nu \in \mathbf{C}^*$ non racine de l'unité:*

(i) $\mathrm{Aut}^+(A_\nu)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$.

(ii) *Les groupes* $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ *et* $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$ *ne sont pas isomorphes.*

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}^+(A_\nu)$ comme on l'a vu dans la preuve 2.5: il existe $\alpha \in \mathbf{C}^*$, $m \in \mathbf{Z}$, et $\varepsilon = \pm 1$ tels que:

(3.9.1) $$\theta(x) = \alpha^{-1}t^m x\ ;\ \ \theta(y) = \alpha y t^{-m}\ ;\ \ \theta(t) = \varepsilon t.$$

La première assertion s'en déduit. Pour la seconde, remarquons que le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(B_{q,\lambda})$ engendré par ω et les quatre automorphismes définis par (3.7.1) pour $m = 0$, $\alpha = \pm 1$ et $\varepsilon = \pm 1$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. Un tel sous-groupe n'existe pas dans $\mathrm{Aut}(A_\nu)$. En effet, en utilisant la proposition 2.5, les éléments d'ordre ≤ 2 dans $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ sont d'une part les quatre éléments $\theta_{\alpha,\varepsilon}$ définis par (3.9.1) pour $m = 0$, $\alpha = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, et d'autre part toutes les involutions ξ_α définies pour $\alpha \in \mathbf{C}^*$ par: $\xi_\alpha(x) = \alpha y t$, $\xi_\alpha(y) = -\nu\alpha^{-1}xt$, et $\xi_\alpha(t) = -\nu^{-1}t^{-1}$. On vérifie que deux involutions ξ_α et ξ_β ne commutent entre elles que si $\alpha = \pm\beta$, et qu'aucune involution ξ_β ne commute avec les quatre $\theta_{\alpha,\varepsilon}$ à la fois. On déduit qu'il n'existe dans $\mathrm{Aut}(A_\nu)$ aucun sous-groupe abélien d'ordre 8 formé d'éléments d'ordre ≤ 2. □

3.10. THÉORÈME. *Pour $\nu = q^{-2}$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(A_\nu)$, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que la restriction de θ à la sous-algèbre $B_{q,\lambda}$ de A_ν définie par* (3.6.2) *soit un automorphisme de $B_{q,\lambda}$;*

(ii) *pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, la restriction de θ à la sous-algèbre $B_{q,\lambda}$ de A_ν définie par* (3.6.2) *est un automorphisme de $B_{q,\lambda}$;*

(iii) *θ appartient au sous-groupe* $\mathrm{Aut}^+(A_\nu)$.

En outre, la restriction définit alors un isomorphisme de groupes de $\mathrm{Aut}^+(A_\nu)$ *sur* $\mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}^+(A_\nu)$, défini par (3.9.1). Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, les éléments e, f, k définis en (3.6.2) vérifient (3.7.1), ce qui montre que (iii) implique (ii). Donnons-nous maintenant λ vérifiant (i). Si $\theta \notin \mathrm{Aut}^+(A_\nu)$, il existe d'après la proposition 2.5 un automorphisme $\eta \in \mathrm{Aut}^{+}(A_{\nu})$ tel que $\theta = \eta\xi$, avec ξ l'involution de A_{ν} définie en (2.4.6). En utilisant la première partie de la preuve, $\xi = \theta\eta^{-1}$ se restreindrait en un automorphisme de la sous-algèbre $B_{q,\lambda}$ définie par (3.6.2). On aurait en particulier $-\nu xt = \xi(y) = \xi(f) \in B_{q,\lambda}$. Comme $B_{q,\lambda}$ contient déjà $t^{\pm 1} = \mu^{\pm 1}k^{\pm 1}$ et $y = f$, on aboutirait à $B_{q,\lambda} = A_{\nu}$, ce qui contredit 3.6. (ii) et achève la preuve. □

IV. Sous-algèbre des éléments ad-localement finis de $U_q(sl(2))$

Les données et hypothèses sont celles de la partie III, *dont on reprend toutes les notations.*

4.1. ACTION ADJOINTE DANS U_q. Par analogie avec la situation semi-simple classique, on peut ne prendre en compte pour les plongements de Conze que la partie des éléments localement finis sous l'action adjointe déterminée par la structure d'algèbre de Hopf de U_q. Le coproduit $\Delta : U_q \to U_q \otimes U_q$, l'antipode $S : U_q \to U_q$ et la co-unité $\varepsilon : U_q \to \mathbf{C}$ sont définis par:

$$\Delta(E) = E \otimes K^{-1} + K \otimes E,\ \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + K \otimes F,\ \Delta(K^{\pm 1}) = K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1};$$
$$S(E) = -q^{-2}E,\ S(F) = -q^{2}F,\ S(K^{\pm 1}) = (K^{-1})^{\pm 1};$$
$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0,\ \varepsilon(K^{\pm 1}) = 1.$$

Pour tout $u \in U_q$, on note (ad u) le $\mathbf{C}$-endomorphisme de U_q défini par:

$$(\mathrm{ad}\, u)v = \sum u_{(1)} v S(u_{(2)}) \text{ pour tout } v \in U_q,$$

avec la notation habituelle: $\Delta(u) = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)}$. Le centre de U_q est alors: $\{v \in U_q\,;\ \forall u \in U_q,\ (\mathrm{ad}\, u)v = \varepsilon(u)v\}$, et on introduit (cf. [JL]):

$$F_q = \{v \in U_q\,;\ \dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{ad}\, U_q)v < +\infty\}.$$

D'après l'étude de [JL] (en particulier les §2.2, 2.3 et 3.11), F_q apparaît comme la sous-algèbre de U_q engendrée par EK^{-1}, FK^{-1}, K^{-2} et Ω. On a dans F_q:

(4.1.1) $$(FK^{-1})(EK^{-1}) = q^{-2}\Omega K^{-2} - (q^{2} - q^{-2})^{-2}(1 + q^{-4}K^{-4}).$$

Remarquons que le localisé de F_q suivants les puissances de K^{-2} est égal à la sous-algèbre de U_q engendrée par EK, FK et $K^{\pm 2}$. On notera V_q ce localisé, qui est une sous-extension de Ore et une sous-algèbre de Hopf de U_q.

4.2. NOTATIONS. Soit $\mathrm{Aut}^{\circ}(U_q)$ le sous-groupe formé des $\theta \in \mathrm{Aut}^{++}(U_q)$ de la forme: $\theta(E) = \alpha^{-1}E$, $\theta(F) = \alpha F$, $\theta(K) = K$, avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$, et $\mathrm{Aut}^\circ(F_q)$ le groupe des restrictions à F_q des éléments de $\mathrm{Aut}^\circ(U_q)$. Soit enfin $\tau \in \mathrm{Aut}(U_q)$ défini par: $\tau(E) = iE$, $\tau(F) = iF$, $\tau(K) = iK$, de sorte que:

$$\tau(EK^{-1}) = EK^{-1},\ \tau(FK^{-1}) = FK^{-1},\ \tau(K^{-2}) = -K^{-2},\ \tau(\Omega) = -\Omega,$$

détermine une involution de F_q.

4.3. Proposition. *On a la suite exacte*:

$$1 \to \langle \tau^2 \rangle \to \mathrm{Aut}^\circ(U_q) \times \langle \tau \rangle \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Aut}(F_q) \to 1.$$

Preuve. On commence par décrire les éléments normalisants de F_q. Soit $S \in F_q$ un tel élément. Notons U_q' le localisé de U_q suivant les puissances de F (cf. [Go] lemme 1.4). D'aprés (3.1.2):

$$U_q' = \mathbf{C}[\Omega]_{q'}[K^{\pm}, F^{\pm}] = \mathbf{C}_{q'}[K^{\pm}, F^{\pm}][\Omega] \quad \text{avec } q' = q^{-2}.$$

Développons S dans U_q' sous la forme $\sum S_{i,j}(\Omega)K^iF^j$, avec $S_{i,j}(\Omega) \in \mathbf{C}[\Omega]$ pour (i, j) décrivant une partie finie de $\mathbf{Z}^2$. Il existe $T \in F_q$ tel que $SK^{-2} = TS$. En considérant le degré et la valuation en K et F des deux membres dans U_q', on a T de la forme $R(\Omega)K^{-2}$ avec $R \in \mathbf{C}[\Omega]$. En considérant ensuite le degré en Ω, on peut préciser: $R \in \mathbf{C}^*$; on note $R = \gamma$. Par ailleurs, il existe $V \in F_q$ tel que $SFK^{-1} = VS$, et le même type de raisonnement montre que $V = \beta FK^{-1}$ avec $\beta \in \mathbf{C}^*$. En développant les deux membres de: $SK^{-2} - \gamma K^{-2}S = 0 = SFK^{-1} - \beta FK^{-1}S$ dans U_q' on obtient $S = P(\Omega)K^aF^b$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $\gamma = q^{-4b}$ et $\beta = q^{-2b-2a}$, et $P \in \mathbf{C}[\Omega]$. En plongeant U_q dans sa localisation suivant les puissances de E, on établit de façon parallèle que $S = Q(\Omega)K^cE^d$. Le calcul de KSK^{-1} prouve que $b = -d$. Supposons $b \geq 0$; donc $Q(\Omega)K^{c-a} = P(\Omega)F^bE^b$. D'aprés (3.1.2), F^bE^b est dans $\mathbf{C}[\Omega][K^{\pm}]$ de valuation $-2b$ et de degré $2b$ en K ; donc $b = 0$ et $c = a$. On conclut de la même façon si $d \geq 0$, que $S = P(\Omega)K^a$. Comme de plus $S \in F_q$, $a = -2m$ pour un $m \in \mathbf{N}$.

Ceci étant, soit $\theta \in \mathrm{Aut}(F_q)$. D'après ce qui précède, $\theta(K^{-2}) = P(\Omega)K^{-2m}$; de même $\theta^{-1}(K^{-2}) = Q(\Omega)K^{-2n}$. Le centre de F_q étant $\mathbf{C}[\Omega]$, $\theta^{-1}(\Omega) = \eta\Omega + \mu$ avec $\eta \in \mathbf{C}^*$ et $\mu \in \mathbf{C}$. On tire de $K^{-2} = P(\eta\Omega + \mu)Q(\Omega)^mK^{-2mn}$ que $m = n = 1$ et que P et Q sont des scalaires. Ainsi $\theta(K^{-2}) = \lambda K^{-2}$, où $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Il en résulte que θ se prolonge en un automorphisme θ' du localisé V_q de F_q par $\theta(K^2) = \lambda^{-1}K^2$. Comme U_q est une extension quadratique normalisante de V_q avec $\{1, K\}$ base de U_q sur V_q, θ' se prolonge en un automorphisme θ'' de U_q par $\theta''(K) = \varepsilon K$, avec $\varepsilon \in \mathbf{C}$ tel que $\varepsilon^2 = \lambda$. En utilisant la description de $\mathrm{Aut}(U_q)$

rappelée en 3.1 et le fait que θ stabilise F_q, on a $\varepsilon^4 = 1$, et il existe $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que: $\theta''(E) = \alpha^{-1}E$, $\theta''(F) = \varepsilon^2\alpha F$ et $\theta''(K) = \varepsilon K$. D'où le résultat. $\square$

4.4. Quotients de F_q. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a: $(\Omega - \lambda)U_q \cap F_q = (\Omega - \lambda)F_q$, par définition de l'action adjointe. Désignons donc par $D_{q,\lambda}$ la sous-algèbre $F_q/(\Omega - \lambda)$ de $B_{q,\lambda}$. En reprenant les notations du §3.3 et avec (4.1.1), $D_{q,\lambda}$ est engendrée par: $u = (1 - q^{-4})ek^{-1}$, $v = fk^{-1}$ et $w = k^{-2}$ avec les relations:

$$(4.4.1)\qquad \begin{cases} uw = q^4wu,\ vw = q^{-4}wv\,; \\ uv = -\dfrac{q^4}{q^4-1}w^2 + \lambda\dfrac{q^4-1}{q^2}w - \dfrac{1}{q^4-1}\,; \\ vu = -\dfrac{q^{-4}}{q^4-1}w^2 + q^{-4}\lambda\dfrac{q^4-1}{q^2}w - \dfrac{1}{q^4-1}. \end{cases}$$

Tout élément de $\mathrm{Aut}^\circ(F_q)$ induit par passage au quotient un automorphisme θ de $D_{q,\lambda}$ de la forme $\theta(u) = \alpha^{-1}u$, $\theta(v) = \alpha v$ et $\theta(w) = w$. Désignons par $\mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D_{q,\lambda})$ ainsi défini; $\mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$ est encore le groupe des restrictions à $D_{q,\lambda}$ des éléments de $\mathrm{Aut}^\circ(B_{q,\lambda})$ définis en (3.7.1) pour $m = 0$. Dans le cas où $\lambda = 0$, l'involution τ de F_q introduite en 4.2 induit aussi une involution de $D_{q,\lambda}$ vérifiant $\tau(u) = u$, $\tau(v) = v$, $\tau(w) = -w$. En vue de décrire $\mathrm{Aut}(D_{q,\lambda})$, on établit d'abord un lemme.

4.5. Lemme. (i) *Tout élément de $D_{q,\lambda}$ admet une écriture unique sous la forme*:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(w)u^i + \sum_{j=1}^{m} Q_j(w)v^j, \quad \text{avec } m, n \in \mathbf{N}, \quad P_i,\ Q_j \in \mathbf{C}[w].$$

(ii) *Les éléments normalisants de $D_{q,\lambda}$ sont ceux de la forme αw^n avec $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{C}$.*

Preuve. Il résulte des relations (4.4.1) que tout monôme en u, v, w, est de la forme $P(w)u^i$, $P(w)v^i$ ou $P(w)$, avec $P \in \mathbf{C}[w]$ et $i \in \mathbf{N}^*$. Donc tout élément d de $D_{q,\lambda}$ s'écrit: $\sum_{i=0}^{n} P_i(w)u^i + \sum_{j=1}^{m} Q_j(w)v^j$. Notons: $d_{-i} = P_i(w)u^i$ si $0 \le i \le n$, et $d_i = Q_i(w)v^i$ si $1 \le i \le m$. On a ainsi décomposé d en $\sum_{-n \le i \le m} d_i$ dans $D_{q,\lambda} \subseteq B_{q,\lambda}$ suivant la graduation $(T_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de $B_{q,\lambda}$ introduite précédemment en 3.5, ce qui assure l'unicité.

Considérons maintenant d non-nul normalisant dans $D_{q,\lambda}$. Décomposons d en:

$$d = \sum_{i=a}^{b} d_i \quad \text{avec } a, b \in \mathbf{Z},\ a \le b,\ d_i \in T_i,\ d_a \neq 0 \neq d_b.$$

Il existe $s \in D_{q,\lambda}$ tel que $wd = ds$; en écrivant de même que:

$$s = \sum_{i=c}^{e} s_i \quad \text{avec } c,\ e \in \mathbf{Z},\ c \leq e,\ s_i \in T_i,\ s_c \neq 0 \neq s_e,$$

on en déduit que $c = e = 0$, $wd_a = d_a s_0$ et $wd_b = d_b s_0$. Mais comme $d_a \in T_a$, on a: $wd_a = k^{-2} d_a = q^{-2a} d_a w$. En raisonnant de même avec $d_b \in T_b$, on conclut que $a = b$, et donc $d = d_a \in T_a$. Il existe $t \in D_{q,\lambda}$ tel que $ud = dt$ et donc $t \in T_{-1}$; notons $t = Q(w)u$ où $Q \in \mathbf{C}[w]$. Supposons d'abord $a > 0$, et posons: $d = P(w)v^a$. On obtient:

$$P(q^4 w)(uv)v^{a-1} = uP(w)v^a = P(w)v^a Q(w)u = P(w)Q(q^{-4a}w)R(w)v^{a-1},$$

où R désigne le polynôme de degré 2 dans $\mathbf{C}[w]$ défini par: $v^{a-1}(vu) = R(w)v^{a-1}$. On déduit que le degré de Q dans $\mathbf{C}[w]$ est nul; on note $Q = \gamma \in \mathbf{C}^*$ et il vient:

$$P(q^4 w)\left[-\frac{q^4}{q^4 - 1} w^2 + \lambda \frac{(q^4 - 1)}{q^2} w - \frac{1}{q^4 - 1}\right]$$
$$= \gamma P(w)\left[-\frac{q^{4-8a}}{q^4 - 1} w^2 + \lambda q^{-4a} \frac{(q^4 - 1)}{q^2} w - \frac{1}{q^4 - 1}\right].$$

En désignant par n le degré de $P \in \mathbf{C}[w]$ et par m sa valuation, on obtient par identification: $8a + 4(n - m) = 0$, ce qui est impossible. En utilisant l'antiisomorphisme $u \to v$, $v \to u$, $w \to w$, on déduit que de même, on ne peut pas avoir $a < 0$. On conclut que: $d = P(w) \in \mathbf{C}[w]$. L'égalité $ud = dt$ s'écrit alors: $P(q^4 w)u = P(w)Q(w)u$, d'où $Q \in \mathbf{C}^*$ et P monôme de $\mathbf{C}[w]$. □

4.6. THÉORÈME. *Si* $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Aut}(D_{q,\lambda}) = \mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$ *est isomorphe à* $\mathrm{Aut}^\circ(F_q)$, *qui est d'indice* 2 *dans* $\mathrm{Aut}(F_q)$. *Si* $\lambda = 0$, $\mathrm{Aut}(D_{q,\lambda})$ *est le produit direct de* $\mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$ *par* $\langle\tau\rangle$, *et est isomorphe à* $\mathrm{Aut}(F_q)$.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$. D'après l'assertion (ii) du lemme 4.5, $\theta(w)$ est de la forme εw avec $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$. En utilisant l'assertion (i) de 4.5, on déduit alors de l'égalité $\theta(u)\theta(w) = q^4\theta(w)\theta(u)$ que $\theta(u) = P(w)u$ pour un $P \in \mathbf{C}[w]$. De la même façon, $\theta(v) = Q(w)v$ avec $Q \in \mathbf{C}[w]$. On applique θ aux deux membres de la troisième relation de (4.5.1):

$$P(w)Q(q^4 w)\left[-\frac{q^4}{q^4 - 1} w^2 + \lambda \frac{(q^4 - 1)}{q^2} w - \frac{1}{q^4 - 1}\right]$$
$$= -\frac{q^4}{q^4 - 1}\varepsilon^2 w^2 + \lambda \frac{(q^4 - 1)}{q^2}\varepsilon w - \frac{1}{q^4 - 1}$$

d'où par identification: $1 = P(w)Q(q^4 w) = \varepsilon^2$ et $\lambda P(w)Q(q^4 w) = \lambda\varepsilon$. Ainsi Q est un scalaire $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $P = \alpha^{-1}$; si $\lambda \neq 0$, $\varepsilon = 1$ de sorte que: $\theta(u) = \alpha^{-1}u$, $\theta(v) = \alpha v$ et $\theta(w) = w$. Si $\lambda = 0$ une autre solution est $\varepsilon = -1$. $\square$

On a enfin:

4.7. Théorème. *Soit $\lambda \in \mathbf{C}$; on considère le plongement de $B_{q,\lambda}$ dans l'algèbre de Hayashi A_ν pour $\nu = q^{-2}$ défini précédemment en* (3.6.2).

(i) *L'image par ce plongement de la sous-algèbre $D_{q,\lambda}$ de $B_{q,\lambda}$ est incluse dans une algèbre de Weyl quantique $A_1^{q'}$ au sens du* §1.1 *avec $q' = \nu^{-2} = q^4$.*

(ii) *Dans ce plongement, la restriction définit un isomorphisme de* $\mathrm{Aut}(A_1^{q'})$ *sur* $\mathrm{Aut}^\circ(D_{q,\lambda})$.

Preuve. On reprend les notations de 3.6: dans A_ν engendrée par x, y, $t^{\pm 1}$ avec les relations (2.4.1), les éléments $e, f, k^{\pm 1}$ définis par (3.6.2) engendrent une sous-algèbre $B_{q,\lambda}$, contenant elle-même une sous-algèbre $D_{q,\lambda}$ engendrée par: $u = (1 - q^{-4})ek^{-1}$, $v = fk^{-1}$ et $w = k^{-2}$. On calcule dans A_ν:

$$w = \mu^{-2}t^{-2}\,;\ v = \mu^{-1}yt^{-1}\,;\ u = (\mu - \mu^{-3}t^{-2})\nu^{-1}xt.$$

Les éléments $x' = \nu^{-1}xt$ et $y' = yt^{-1}$ vérifient les relations $x'y' - \nu^{-2}y'x' = 1$, et $x'y' - y'x' = t^{-2}$. La sous-algèbre qu'ils engendrent dans A_ν est une algèbre de Weyl quantique $A_1^{q'}$ pour $q' = \nu^{-2} = q^4$, qui contient $D_{q,\lambda}$. Le point (ii) du théorème découle alors de la proposition 1.5. $\square$

4.8. Remarques. (i) Le plongement des quotients $D_{q,\lambda}$ dans des algèbres de Weyl quantiques était déja observé en remarque au §3.11 de [JL].

(ii) Le localisé V_q de F_q suivant les puissances de K^{-2} est égal à la sous-algèbre de U_q engendrée par EK, FK et $K^{\pm 2}$ (qui est une sous-algèbre de Hopf de U_q). Notons W_q (resp. W_q°) la sous-algèbre de V_q engendrée par EK, FK et $K^{\pm 4}$ (resp. K^4). L'algèbre W_q° est celle introduite dans un autre contexte par S.L. Woronowicz (cf. [MS], [Wo]). On a les plongements suivants (où les flèches verticales désignent des localisations et les horizontales des extensions quadratiques):

$$\begin{array}{ccccc} W_q & \hookrightarrow & V_q & \hookrightarrow & U_q \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ W_q^\circ & & F_q & & \end{array}$$

On peut, par des méthodes comparables à celles utilisées dans les paragraphes précédents, expliciter les groupes $\mathrm{Aut}(V_q)$, $\mathrm{Aut}(W_q)$, $\mathrm{Aut}(W_q^\circ)$, et tous les résultats de restriction et de prolongement qui s'en déduisent. Sans donner ici les preuves, énonçons pour mémoire: (i) $\mathrm{Aut}(V_q)$ *est isomorphe à un produit semi-direct par* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *du produit direct* $\mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$; (ii) $\mathrm{Aut}(W_q)$ *est isomorphe au produit direct* $\mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$, (iii) $\mathrm{Aut}(W_q^\circ)$ *est isomorphe à* $\mathbf{C}^*$.

Annexe. Automorphismes de A_1 dans les plongements de Conze classiques

Le but de cette annexe est de justifier que, comme cela est affirmé dans l'introduction, seuls certains automorphismes triangulaires de l'algèbre de Weyl classique $A_1(\mathbf{C})$ se restreignent dans les plongements de Conze en des automorphismes des quotients $B_\lambda = U(sl(2))/(\Omega - \lambda)$.

A.1. Notations. A_1 est l'algèbre engendrée sur $\mathbf{C}$ par p et q soumis à la relation $pq - qp = 1$. Un premier sous-groupe S de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)$ est constitué des automorphismes θ de la forme:

$$\theta(p) = ap + bq + c,\ \theta(q) = a'p + b'q + c',$$

avec a, b, c, a', b', c' dans $\mathbf{C}$ tels que $ab' - a'b = 1$. Un second sous-groupe J est formé des $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)$ du type:

$$\sigma(p) = ap + c,\ \sigma(q) = a^{-1}q + F(p),\ \text{avec } a \in \mathbf{C}^*,\ c \in \mathbf{C} \text{ et } F \in \mathbf{C}[p].$$

Notons J^* le sous-groupe des σ de J tels que $c = 0$. Le théorème 1.7 de [Al] décrit $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)$ comme somme amalgamée des sous-groupes S et J suivant leur intersection. Désignons enfin par τ l'automorphisme $\tau(p) = -q$ et $\tau(q) = p$.

A.2. Lemme. *Pour tout* $\theta \in S \setminus J$, *il existe* $\varepsilon, \eta \in J^* \cap S$ *tels que* $\theta = \eta\tau\varepsilon$.

Preuve. Avec les notations ci-dessus, $b \neq 0$ car $\theta \notin J$. On définit alors ε et ν par: $\begin{cases} \varepsilon(p) = p \\ \varepsilon(q) = q + (b'/b)p + c' - cb/b \end{cases}$ $\begin{cases} \eta(p) = -b^{-1}p \\ \eta(q) = -bq - ap - c \end{cases}$ $\square$

A.3. Notations. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et μ une racine dans $\mathbf{C}$ de: $\mu^2 + 2\mu - \lambda = 0$. La sous-algèbre B_λ de A_1 engendrée par: $e = -\mu q - pq^2$, $f = p$, et $h = \mu + 2pq$, est isomorphe à $U(sl(2))/(\Omega - \lambda)$, (cf. [Di2]). Notons G le sous-groupe:

$$G = \{\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)\ ;\ \gamma(B_\lambda) \subseteq B_\lambda\}.$$

Par ailleurs, désignons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)$ tels que le degré en q

de $\gamma(p)$ soit un entier $m \geq 1$, et tels que le coefficient de q^m dans le développement de $\gamma(p)$ comme polynôme en q à coefficients dans $\mathbf{C}[p]$ appartienne à $\mathbf{C}^*$. On a:

A.4. LEMME.
(i) *Tout* $\gamma \in \mathscr{E}$ *vérifie* $\gamma \notin G$; *de plus*: $J \cap G = J^*$.
(ii) *Pour tout* $\gamma \in \mathscr{E}$ *et tout* $\sigma \in J$, *on a*: $\sigma\gamma \in \mathscr{E}$.
(iii) *Si* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ *désignent* n *éléments de* $J \setminus S$, *alors les produits* $\tau\sigma_1\tau\sigma_2\tau \cdots \sigma_{n-1}\tau\sigma_n\tau$ *et* $\tau\sigma_1\tau\sigma_2\tau \cdots \sigma_{n-1}\tau\sigma_n$ *appartiennent à* $\mathscr{E}$.

Preuve. Soit $\gamma \in \mathscr{E}$, notons $\gamma(p) = \sum_{i=0}^{m} u_i q^i$ avec $m \geq 1$, $u_i \in \mathbf{C}[q]$, $u_m \in \mathbf{C}^*$. Supposons $\gamma(p) \in B_\lambda$; comme $p = f \in B_\lambda$, on a: $\mathrm{ad}_p^{m-1}(\gamma(p)) = (m!)u_m q \in B_\lambda$, et donc $q \in B_\lambda$ On aurait alors $B_\lambda = A_1$ ce qui n'est pas le cas (cf. [Di2]). En conclusion, $\gamma \notin G$. Soit ensuite $\sigma \in J$, où $\sigma(p) = ap + c$ et $\sigma(q) = a^{-1}q + F(p)$. Il est clair que $\sigma(p) = \sigma(f) \in B_\lambda$, On calcule:

$$\sigma(h) = \mu + 2pq + 2apF(p) + 2cF(p) + 2a^{-1}cq.$$

Or: $p \in B_\lambda$, $q \notin B_\lambda$, et $pq \in B_\lambda$, donc: $\sigma(h) \in B_\lambda$ si et seulement si $c = 0$, c'est-à-dire $\sigma \in J^*$. Enfin, si $c = 0$, on vérifie par le calcul que $\sigma(e) \in B_\lambda$.

Les points (ii) et (iii) sont de simples vérifications techniques basées sur le fait que si $\sigma_i \in J \setminus S$, $\sigma_i(q)$ est de la forme $\sigma_i(q) = a_i^{-1}q + F_i(p)$ avec $a_i \in \mathbf{C}^*$ et $F_i \in \mathbf{C}[p]$ de degré ≥ 2. □

On peut maintenant énoncer:

A.5. PROPOSITION. *G est égal à J^**

Preuve. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A_1)$ tel que $\psi \notin J$. D'après le théorème 1.7 de [Al] rappelé ci-dessus en A.1, on a une décomposition de ψ sous la forme:

$$(*)\ \psi = \omega\theta_1\phi_1\theta_2\phi_2\ldots\theta_n\phi_n \text{ ou } (**)\ \psi = \omega\theta_1\phi_1\theta_2\phi_2\ldots\theta_{n-1}\phi_{n-1}\theta_n,$$

avec $n \geq 1$, $\omega \in J$, $\theta_i \in S \setminus J$ et $\phi_i \in J \setminus S$. Utilisons le lemme A.2 pour écrire chaque θ_i sous la forme $\theta_i = \eta_i\tau\varepsilon_i$ avec η_i et ε_i dans $J^* \cap S$. Posons:

$\sigma_0 = \omega\eta_1 \in J$,
$\sigma_i = \varepsilon_i\phi_i\eta_{i+1} \in J \setminus S$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$,
$\sigma_n = \varepsilon_n\phi_n \in J \setminus S$ dans le cas $(*)$, et $\sigma_n = \varepsilon_n \in G$ dans le cas $(**)$,

de sorte que: $\psi = \sigma_0\tau\sigma_1\tau\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}\tau\sigma_n$. On déduit alors du lemme A.4 que $\psi \notin G$.

On a ainsi établi que $G \subseteq J$, d'où le résultat voulu d'après le (i) de A.4. $\square$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Al] J. Alev, Un automorphisme non modéré de $U(g_3)$, Commun. Algebra, **14** (1986) 1365–1378.

[AC] J. Alev, M. Chamarie, Dérivations et automorphismes de certaines algèbres quantiques, Commun. Algebra, **20** (1992), 1787–1802.

[AD] J. Alev, F. Dumas, Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques, J. Algebra, **170** (1994), 229–265.

[AM] S. Abhyankar, T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math., **276** (1975), 148–166.

[AVV] M. Awami, M. Van Den Bergh, F. Van Oystaeyen, Note on derivations of graded rings and classification of differential polynomial rings, Bull. Soc. Math. Belg., **40** (1988), 175–183.

[Ca] P. Caldero, Etude des q-commutations dans l'algèbre $U(\mathfrak{N}^+)$, J. Algebra, **178** (1995), 444–457.

[Co] N. Conze, Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 379–415.

[Di1] J. Dixmier, Sur les algèbres de Weyl, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 209–242.

[Di2] J. Dixmier, Quotients simples de l'algèbre enveloppante de sl_2, J. Algebra, **24** (1973), 551–564.

[Di3] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, éd. Gauthier-Villars (1974).

[Go] K. R. Goodearl, Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras, J. Algebra, **150** (1992), 324–377.

[GW] K. R. Goodearl, R. B. Warfield, "An introduction to Noncommutative Noetherian Rings", London Math. Soc. Student Text Series, Vol. 16, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1989.

[Ha] T. Hayashi, Q-analogs of Clifford and Weyl algebras — Spinor and oscillator representation of quantum enveloping algebras, Commun. Math. phys., **127** (1990), 129–144.

[Ja] V. A. Jategaonkar, A multiplicative analogue of the Weyl algebra, Commun. Algebra, **12** (1984), 1669–1688.

[J] D. Jordan, A simple localization of the quantized Weyl algebra, J. Algebra, **174** (1995), 267–281.

[Jo] A. Joseph, A wild automorphism of $U(sl(2))$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **80** (1976), 61–65.

[JL] A. Joseph. G. Letzter, Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras, J. Algebra, **153** (1992), 289–318.

[KS] E. E. Klrkman, L. W. Small, q-analogs of harmonic oscillators and related rings, Israël J. Math., **81** (1993), 111–127.

[Ma] M. P. Malliavin, L'algèbre d'Heisenberg quantique, C. R. Acad. Sci. Paris, **317** (1993), 1099–1102.

[ML] L. Makar-Limanov, On automorphisms of Weyl algebra, Bull. Soc. Math. France, **112** (1984), 359–363.

[Mo] H. Morikawa, On ζ_n-Weyl algebra $W(\zeta_n, Z)$, Nagoya Math. J. **113** (1989), 153–159.

[MP] J. C. Mac Connell, J. J. Pettit, Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras, J. London Math. Soc. **38** (1988), 47–55.

[MR] J. C. Mac Connell, J. C. Robson, "Noncommutative Noetherian Rings", Wiley-Interscience, Chichester/New York, 1987.

[MS] S. Montgomery, S. P. Smith, Skew derivations and $U_q(sl(2))$, Israel J. Math., **72** (1990), 158–166.

[Re] P. Revoy, Algèbres de Weyl en caractéristique p, C. R. Acad. Sci. Paris, **276** (1973), 225–228.

[Ro] J. R. Roos, Compléments à l'étude des quotients primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples, C. R. Acad. Sci. Paris, **276** (1973), 447–450.

[Wo] S. L. Woronowicz, Twisted $SU(2)$-group. An example of a non-commutative differential calculus, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **23** (1987), 117–181.

J. Alev
Université de Reims CNRS URA 1870
Département de Mathématiques
B. P. 347, 51062 Reims Cedex

F. Dumas
Université Blaise Pascal (Clermont 2)
Département de Mathématiques
63177 Aubière Cedex