INTUITIONISTISCHE UNTERSUCHUNGEN DER FORMALISTISCHEN LOGIK

SIGEKATU KURODA

Einleitung[1]

Der Umschwung, welchen die mathematischen Grundlagenforschungen in diesem Jahrhundert erfuhren, teilte früher einmal die Untersuchungen in drei Hauptrichtungen ab, nämlich in die intuitionistische, logistische und formalistische Auffassung der Mathematik, wonach die lebhafte Polemik über das Wesen der Mathematik sowie das Verhältnis der Logik zur Mathematik aufblütete, und zwar am heftigsten in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts. Nicht in den prinzipiellen Einsichten, sondern in der Methode der Forschungen hatten doch diese drei Standpunkte viele Berührungspunkte. Erstens entlehnt der Hilbertsche Formalismus dem Logizismus das Hilfsmittel zur Formalisierung der Mathematik. Zweitens ragt die Beweisführung in der Metamathematik, welche die formalisierte Mathematik als ihren eigenen Gegenstand der Untersuchungen betrachtet, insofern nicht aus der intuitionistischen Mathematik hervor, als man die formalisierte Mathematik nur als Zeichenkombinationen ansieht. Ferner sind die formalen Regeln, welche in der intuitionistischen Denktätigkeit erfindlich sind, zuerst von Herrn Heyting formalisiert, danach von Herren Gödel, Gentzen u. a. der logistischen Untersuchungen unterworfen worden.[2] Überdies haben diese drei Richtungen der Grundlagenforschungen heutzutage, wozu gemeinsam der erste Anstoss durch die Cantorsche Mengenlehre gegeben worden ist, auch ihre Absicht in Gemeinschaft, welche darin besteht, die *Logik* in bezug auf das *Unendliche* zu verdeutlichen und damit der Mathematik sichere Stellung zu liefern. Deshalb ist es doch kaum möglich, dass diese drei Standpunkte fortdauernd gegenüberstehen, ob zwar der Angriff gegeneinander auch so heftig gewesen war. Und zwar die Bestrebungen, gegenseitige Beziehung zu suchen, sind allmälich erschienen. Ein bemerkenswertes Beispiel davon wurde z. B. von Herrn Gentzen dargeboten, als er bewies, dass die intuitionistische Logik durch Identifizierung der doppelten Verneinung mit Bejahung oder aber durch Hin-

---

Received Oct. 9, 1950.

[1] Ein Verzeichnis der zitierten Literatur befindet sich am Schluss der Einleitung.
Der Inhalt dieses Aufsatzes ist eine verkürzte Wiedergabe meiner auf Japanisch veröffentlichten Aufsätze [8], [9], nur dass Nr. 9 in [10] enthalten ist.

[2] Vgl. dazu das Literaturverzeichnis des Referats von Heyting [6].

zufügung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in die formalistische Logik verwandelt wird. Ich möchte in diesem Aufsatze zeigen, dass die doppelte Verneinung viel wichtiger ist, als sie bisher erkannt worden ist.

Ich halte, Brouwersche grosse Leistungen verfolgend, an der Ansicht fest, dass die Mathematik eine Denktätigkeit ist, von der Logik unabhängig, und zwar sich unmittelbar auf intuitiv klare Evidenz stützt. Mathematiker können also ihre Denktätigkeit durchführen, ohne dass sie sich um die logische Gesetze kümmern. Wenn man doch über die mathematische Denktätigkeit selbst nachdenkt, so kann man natürlich entdecken, dass hierin allgemeine, auch intuitiv klare Regeln vorhanden sind, durch welche das mathematische Denken durchgeführt wird. Diese Regeln heissen Gesetze der Formallogik. In dieser Weise wird die mathematische Denktätigkeit nicht durch die Formallogik *von aussen heraus* gezwungen, sondern sie verbürgt derselben die Wahrheit *von innen heraus*. In den folgenden Zeilen führe ich die Betrachtungen über Formallogik in diesem Sinne aus.

In Nr. 1. führe ich den „intuitiven und formalen Modus" für jede logische Operation ausser Verneinung ein. Aus Prüfung jedes logischen Schlusses ergibt sich, dass die doppelte Verneinung mit Widerspruchsfreiheit identifiziert werden dürfte, und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten mit Brouwerschem Satz der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Damit können wir die unzufriedene Beschaffenheit, dass die Formallogik in die intuitionistische und formalistische (klassische) Logik abgespaltet wird, beseitigen. Es gibt nur *eine* Formallogik, die nach der historischen Sprachweise gleichwohl die intuitionistische genannt werden möge, wenn sie auch die formalistische Logik enthält (Nr. 5.).

In der Mathematik ist auch solch eine Ausdehnung der intuitionistischen Mathematik möglich. Wenn nämlich all die Modi der Wörter für formal angesehen werden, so können Zahlentheorie und Infinitesimalrechung in der intuitionistischen Mathematik konstruiert werden, *ohne dass* man die übliche Schlussverfahren nicht ändert. Ferner ist es sehr wahrscheinlich, dass viele axiomatische Theorien, wie Gruppentheorie, Körpertheorie, Theorie des topologischen Raumes usw. *in der gegenwärtigen Form* eventuell mit geringerem Verzicht auf die mengentheoretischen Schlüsse als intuitionistische Theorie gerechtfertigt werden können. In dieser Weise möchte wohl die intuitionistische Mathematik den grössten Teil der klassischen Mathematik umfassen, wozu man sich allerdings noch näherer Untersuchungen unterziehen muss.

Letztens wird mir erlaubt sein, noch eine Bemerkung über Hilbertsche Beweistheorie hinzufügen. Wie schon oben erwähnt, ist die Beweistheorie ja intuitionistisch berechtigt, wenn nur deren formalisiertes System *einen Teil* der intuitionistischen Mathematik widerspiegelt, weil sie dabei aufhört, bloss ein Schachspiel zu sein. Dies kann wohl in vielen Fällen geschehen, wenn man alle Modi der darin enthaltenen logischen Zeichen für formal hält. In diesem Falle ist es ein intuitionistisch wohlformuliertes Problem, die Widerspruchsfreiheit dieses Systems metamathematisch zu beweisen.

Die Unterscheidung der Modi der Wörter ist also Bindeglied der intuitionistischen Logik und Mathematik mit der formalistischen. Und zwar viele Polemiken zwischen Intuitionisten und Formalisten sind auch verursacht worden durch Verwechselung der Modi des Wortes.

In den folgenden Zeilen werde ich diesen Gedankengang innerhalb der Prädikatenlogik ausführen. Und das Problem, welches am Schluss dieses Aufsatzes vorgelegt worden ist, ist für die Fortsetzung dieser Untersuchungen in den Bereich der Mathematik wichtig.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Becker, O.: Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. Jahrb. für Philos. 8 (1927).

[2] Brouwer, L. E. J.: De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschr. voor wijsbegeerde, 2 (1908).

[3] ——: Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresb, D. M. V. 33 (1924).

[4] ——: Intuitionistische Betrachtungen über das Formalismus. Sitzb. Berlin (1927).

[5] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schliessen I. II., Math. Zeitschr. 39 (1935).

[6] Heyting, A.: Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Erg. d. Math. Berlin (1934).

[7] ——: On weakened quantification, J. Symb. Logic, 11 (1946).

[8] Kuroda, S.: Intuition und Widerspruchsfreiheit in der Mathematik (Japanisch), Kisokagaku 2 (1947).

[9] ——: Über Aristotelische und Brouwersche Logik (Japanisch), Kagaku 18 (1948).

[10] ——: Eine Betrachtung über Grundlagen der mathematischen Analysis (Japanisch), Kisokagaku 12 (1949).

1. Im Folgenden verwenden wir die logischen Zeichen immer im intuitionistischen Sinne. Dies sind die Zeichen $\urcorner$ (Verneinung), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\vdash$ (wenn—so), $\vdash\!\dashv$ (gleichwertig), $\exists$ (es gibt) und $\forall$ (alle).[3] Auf Grund des

[3] Wir übernehmen die Zeichen $\vee$, $\exists$ von Russell, $\wedge$ von Heyting und $\urcorner$, $\forall$ von Gentzen. Die Zeichen für Implikation und Gleichwertigkeit, welche in verschiedenen Literaturen bisher vorgekommen sind, sind alle unzutreffend, sei es für Praxis, sei es für Schönheit. Wir verwenden deshalb das Zeichen $\vdash$ für Implikation, welches eine Abänderung des Russellschen Zeichen für Behauptung ist. Wenn man die Behauptung einer Aussage a mit $\vdash a$ bezeichnet, so ist das gerade recht, weil es die Gültigkeit von a ohne Annahme bedeutet.

logischen Satzes, dass die doppelte Verneinung einer Aussage nicht gleichwertig ist mit der ursprünglichen Aussage selbst, definieren wir die logischen Zeichen mit Minusindizes folgendermassen:

$$a\lambda^{-}b \leftrightarrow \neg\neg\,(a\lambda b)\,,$$
$$\mu^{-}x\,a(x) \leftrightarrow \neg\neg\,(\mu x\,a(x))\,.$$

Dabei sei die Buchstabe a, b oder $a(x)$, ebenso wie unten, beliebige Aussage, die irgendeinen Sachverhalt intuitionistisch behauptet; λ bedeute eins der Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\vdash$ oder $\leftrightarrow$; μ einen der Quantoren $\forall$ oder $\exists$. Die intuitionistischen Zeichen λ und μ werden wir auch schreiben mit Plusindizes λ^{+} bzw. μ^{+}, wenn es nötig ist, den Unterschied der Zeichen λ, μ von λ^{-}, μ^{-} hervorzuheben. Auf diese Weise erhalten wir zwei Systeme von logischen Zeichen, die durch den Index $(+)$ oder $(-)$ voneinander unterschieden werden.

Die logischen Zeichen mit Plus- oder Minusindizes mögen wir auf dem unten klarzumachenden Grund Zeichen *vom intuitiven bzw. formalen Modus* heissen. Die logischen Zeichen vom formalen Modus gehen hervor, indem wir die doppelte Verneinung zum entsprechenden Zeichen vom intuitiven Modus operieren. Dabei ist es wichtig zu bemerken, dass die Verneinung $\neg$ eine einzige logische Operation ist, die der Einführung der Modi nicht bedarf, oder vielmehr diese logisch versagt. Der Grund dieser Tatsache liegt darin, dass die dreifache Verneinung einer Aussage mit der einfachen Verneinung derselben gleichwertig ist.[4] Wenn wir nämlich die Verneinung $\neg^{-}$ mit Minusindex als doppelte Verneinung von $\neg^{+}$ definieren:

$$\neg^{-}\,a \leftrightarrow \neg^{+}\neg^{+}\,(\neg^{+}\,a)\,,$$

so ergibt sich des eben erwähnten Satzes wegen

$$\neg^{-}\,a \leftrightarrow \neg^{+}\,a\,.$$

Also ist es in der Tat überflüssig, betreffs der Verneinung $\neg$ zwei Modi einzuführen.

2. Die doppelte Verneinung $\neg\neg a$ einer Aussage a möge, um mit der obigen Bezeichnungsweise übereinzustimmen, mit a^{-} bezeichnet werden und a selbst auch mit a^{+}. Um das Wesen der doppelten Verneinung klarzumachen, und sogar auch an und für sich ist es ein wichtigstes Problem, den Sinn der Verneinung besser zu verstehen.

Ein einfaches Urteil ist wahr, wenn ihm ein Sachverhalt, den es behauptet, entspricht, dagegen ist es falsch, wenn ihm ein Sachverhalt widerspricht. In diesem letzten Falle widerspricht das Urteil einem gegenwärtigen Akt der

[4] Dieser Satz ist von Brouwer zuerst als logischer Satz in [3] formuliert und bewiesen worden.

Wahrnehmung. Dann wird das Urteil verneint. In bezug auf ein einfaches Urteil erkennen wir in solcher Weise seine Wahrheit und Falschheit schlechthin in Rücksicht auf Tatsache. Wenn es falsch ist, so ist es falsch schlechthin; nämlich da vorliegt ein Widerspruch.

Ähnlicherweise wird im logischen Schliessen eine neue Verneinung dann und nur dann eingeführt, wenn wir gegen das dem vorher hergeleiteten Satze oder der Annahme des Schliessens widersprechende Urteil stossen. *Der Widerspruch geht also immer der Verneinung voran.*

Wenn nun wir aus der Annahme, ein Beweis davon vorliege, aus einem Urteil a einen Widerspruch zu erschliessen, wieder einen Widerspruch herleiten können, so bekommen wir die Erkenntnis der Unmöglichkeit des Widerspruchs von a, nämlich die der Widerspruchsfreiheit von a. Also *ist die Widerspruchsfreiheit von a nichts andres als die doppelte Verneinung von a.* Die Methode der Hilbertschen Beweistheorie ist auch nichts andres als die Theorie, die im formal klar formulierten Rahmen die Absicht verfolgt, das Axiomensystem a der Mathematik doppelt zu verneinen, einmal in der formalisierten Mathematik, und abermals intuitionistisch in der Metamathematik. Ich habe hier nur deshalb die Beweistheorie berührt, weil ich das betonen will, dass jederman, der die Widerspruchsfreiheit von etwas beweisen will, sich dazu bekennen muss, die doppelte Verneinung nicht entbehren zu können.

3. Der sogonannte Satz vom ausgeschlossenen Dritten

(1) $$a \vee \urcorner a$$

ist, wie Herr Brouwer seit 1907 behauptet, weder das logische Grundprinzip noch ein Satz, welcher aus demselben hergeleitet wird. Wir können nämlich nur dann wohl richtig behaupten, dass entweder ein Urteil a gilt oder es nicht gilt, wenn wir die Methode sicher im Besitz haben, die Richtigkeit des Urteils a zu beweisen oder aber aus der Annahme a wirklich einen Widerspruch herzuleiten. Die gedankenlose Anwendung des genannten logischen Satzes muss deshalb verworfen werden, weil solcheine Entscheidungsmethode für jede Aussage a nicht vorhanden ist. Hingegen ist (1) widerspruchsfrei, nämlich gilt

(2) $$a \vee^{-} \urcorner a\,.$$

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten im Aristotelischen Sinne behauptet aber nicht die Entscheidbarkeit der Gültigkeit von einer Aussage a oder ihrer Verneinung $\urcorner a$ im Falle, wo a konkret gegeben ist, sondern die Möglichkeit der Gültigkeit mindestens einer der Aussagen a und $\urcorner a$. Also *ist der Satz* (2), welcher von Brouwer der Satz der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten genannt wird, *gerade der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.*[5] Hingegen *ist die von Brouwer verzichtete Aussage* (*1*) *nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten im Aristotelischen Sinne.* Wir müssen in der Mathematik die zwei Modi des Wortes „oder“ streng unterscheiden: Während “*a oder*$^-$ nicht *a*“ eine Tautologie ist, doch ist „*a oder*$^+$ nicht *a*“ nicht immer richtig.

Dieselbe Beschaffenheit ist auch vorhanden in der Behauptung über mathematische Existenz. Solches Urteil, wie „es gibt eine natürliche Zahl x, die die Eigenschaft $P(x)$ besitzt,“ nimmt entweder auf die Konstruierbarkeit der Zahl x mit $P(x)$ in Anspruch, oder aber auf die Möglichkeit d. h. die Widerspruchsfreiheit der Existenz solcher Zahl x. Im ersten Falle ist das Wort „*es gibt*$^+$“ im intuitiven Modus gabraucht, und im letzten Falle das Wort „*es gibt*$^-$“ im formalen Modus.[6]

Mit Hilfe des Logikkalküls wollen wir im folgenden Paragraphen diese Beschaffenheit für jedes logische Zeichen ausführlich diskutieren.

4. Wir ziehen hier das Gentzensche System des logischen Schliessens heran.[7] Seine natürlich-intuitionistische Herleitung besteht aus der baumförmigen Aufhäufung folgender Schlussfiguren-Schemata:

$$(\wedge_1)\quad \frac{a \quad b}{a \wedge b} \qquad\qquad (\wedge_2)\quad \frac{a \wedge b}{a} \quad \frac{a \wedge b}{b}$$

$$(\vee_1)\quad \frac{a}{a \vee b} \quad \frac{b}{a \vee b} \qquad\qquad (\vee_2)\quad \frac{a \vee b \quad \begin{matrix}[a]\\ c\end{matrix} \quad \begin{matrix}[b]\\ c\end{matrix}}{c}$$

$$(\vdash_1)\quad \frac{\begin{matrix}[a]\\ b\end{matrix}}{a \vdash b} \qquad\qquad (\vdash_2)\quad \frac{a \quad a \vdash b}{b}$$

$$(\forall_1)\quad \frac{a(\xi)}{\forall x\, a(x)} \qquad\qquad (\forall_2)\quad \frac{\forall x\, a(x)}{a(\xi)}$$

$$(\exists_1)\quad \frac{a(\xi)}{\exists x\, a(x)} \qquad\qquad (\exists_2)\quad \frac{\exists x\, a(x) \quad \begin{matrix}[a(\xi)]\\ c\end{matrix}}{c}$$

$$(\neg_1)\quad \frac{\begin{matrix}[a]\\ \text{人}\end{matrix}}{\neg a} \qquad\qquad (\neg_2)\quad \frac{a \quad \neg a}{\text{人}} \qquad\qquad (\text{人})\quad \frac{\text{人}}{d}$$

[5] Brouwer behauptete, dass der Satz vom ausgeschlossenen Dritten widerspruchsfrei ist, schon im Jahre 1908 [2]. Aber das ist m. E. nie in den bisherigen Literaturen mit (2) idenzifitiert worden.

[6] Von dem philosophischen Gesichtspunkte aus ist diese zwei Arten von mathematischer Existenz manchmal diskutiert worden. Vgl. z. B. [1].

[7] Das logische System von Gentzen wird hier nur knapp skiziert. Um Einzelheiten vergleiche man [5].

In den obigen Schlussfiguren-Schemata sind die Formeln mit eckigen Klammern die Annahmeformeln der Herleitung, von denen die Formel, welche unter der horizontalen Linie steht, unabhängig wird. Das Zeichen $\curlywedge$ bedeutet inhaltlich den Widerspruch. In $(\forall_1)$ und $(\exists_2)$ muss die Variabel, welche mit ξ bezeichnet wird, noch einer Bedingung genügen, nämlich der, dass die Variabel ξ weder in der Unterformel des betreffenden Schemas noch in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, vorkommen darf, bis auf die mit $a(\xi)$ bezeichnete Annahmeformel von $(\exists_2)$.

Gentzen hat bewiesen, dass die obigen Regeln des Schlusses von Brouwerschen Logik sich in diejenigen der Aristotelischen Logik verwandeln, wenn nur noch das Schlussfiguren-Schema

$$(3) \qquad \frac{\neg\neg a}{a}$$

hinzugefügt wird.

Nun jede Aussage und jedes logische Zeichen in obigen Schlussfiguren-Schemata sind alle vom intuitiven Modus. Wenn alle diese intuitiven Modi in die formalen verwandelt werden, so erhalten wir eine Reihe von Schemata. Z. B. aus $(\vdash_2)$ entsteht das Schema

$$\frac{a^- \quad a^- \vdash^- b^-}{b^-}$$

Dieses Schema ist nicht das Schlussfiguren-Schema des intuitionistischen Logik. Aber, wie man es leicht ersieht, kann jenes aus diesen folgendermassen zusammengesetzt werden:

$$\begin{array}{l}[^1]\\ [^2]\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{a^- \quad a^- \overset{1}{\vdash} b^-}{b^-} \qquad \neg \overset{2}{b}}{\neg (a^- \vdash b^-)} \qquad a^- \vdash^- b^-}{b^-}$$

Solche Verwandlung der andern, durch Übergang vom intuitiven zum formalen Modus entstehenden „Schlussfiguren-Schemata“ bietet keine Schwierigkeiten. Also wird jeder Schluss mit formalem Modus intuitionistisch gerechtfertigt. Überdies ist auch das aus (3) entstehende Schema

$$\frac{\neg\neg a^-}{a^-}$$

ein intuitionistisch richtiger Schluss. Wenn also die Modi aller Aussagen und aller logischen Zeichen formal genommen werden, so lässt sich der Schluss der Aristotelischen Logik in der Brouwerschen Logik rechtfertigen. Und zwar hierin liegt der formale Grund der Behauptung, dass (2) gerade der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist.

5. *Die Aristotelische Logik ist* also *im Brouwerschen Logik als ein Extremalfall enthalten.* Wir sprechen die Mathematik gewöhnlich mit Wörtern vom formalen Modus. Aber *jede Aussage und jeder Begriff in der Mathematik haben multimorphe Sinne, wenn die Modi der darin enthaltenen logischen Zeichen und Aussagen teils intuitiv, teils formal genommen werden.* Zwischen diesen Aussagen und Begriffen, welche nur in der Modi der Wörter verschieden sind, besteht eine logische Beziehung. Wegen der Verschiedenheit der Modi bestehen z. B. die folgenden Relationen für die elementaren Verknüpfungen $a \wedge b$, $a \vee b$ bzw. $a \vdash b$:

$$
\begin{aligned}
&(a \wedge b) \vdash (a \wedge^{-} b) \dashv\vdash (a^{-} \wedge b^{-}) \dashv\vdash (a^{-} \wedge^{-} b^{-}), \\
(4) \qquad &(a \vee b) \vdash (a^{-} \vee b^{-}) \vdash (a \vee^{-} b) \dashv\vdash (a^{-} \vee^{-} b^{-}), \\
&(a^{-} \vdash b) \vdash (a \vdash b) \vdash (a \vdash^{-} b) \dashv\vdash (a^{-} \vdash^{-} b) \dashv\vdash (a^{\pm} \vdash^{\pm} b^{-}).
\end{aligned}
$$

Dieselbe Beziehung zwischen der Aussagen a, a^{-} und ihrer Verneinung $\neg a$ möge schematisch in Fig. 1. dargestellt werden. Die intuitionistische Logik ist auf der unteren mit $(+)$ bezeichneten Seite schematisiert, die formalistische auf der oberen mit $(-)$ bezeichneten Seite. Der schraffierte Teil zeigt das Verhältnis mit dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten. Auf der oberen $(-)$ Seite verschwindet der schraffierte Teil, da hier a und $\neg a$ den kontradiktorischen Gegenteil ausmachen.

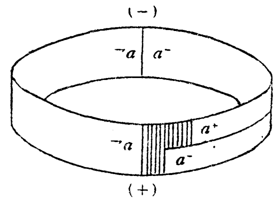

Fig. 1

Ähnlicherweise ist das Schema in Bezug auf die Aussagen $\forall x\ x(x)$, $\exists x\ a(x)$, $\forall x\ \neg a(x)$ $\exists x\ \neg a(x)$ und ihre Verneinungen in Fig. 2.-4. gegeben. Die im derselben Rahmen von Fig. 2.-4. dargestellten Aussagen sind alle gleichwertig.

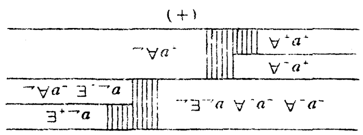

Fig. 2.

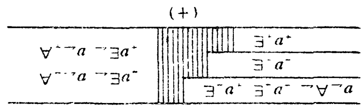

Fig. 3.

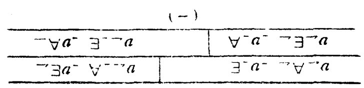

Fig. 4

Bemerkenswert ist, dass *die Aussagen* $\neg \forall x\ a(x)$ *und* $\neg \exists x\ \neg a(x)$ *intuitionistisch beide gleichzeitig bestehen können, welche dennoch formalistisch gegeneinander kontradiktorisch sind.* Den übrigen in diesen Figuren dargestellten Inhalt zu verstehen ist nicht so schwierig.[8)]

6. Der Modi der Aussagen und Begriffe entsprechend, ist es nützlich und sogar natürlich

[8)] Der Beweis davon befindet sich in [7], [9].

für logisches Schliessen, die zwei Modi des Schlusses, das intuitive und formale, einzuführen. Wir sondern die logischen Schliessen in zwei Teile ab, nämlich in *die Schlüsse vom intuitiven* (+) *Modus* und *die vom formalen* (−) *Modus*. Jene werden immer auf der linken und diese auf der rechten Seite der in der Mitte beschriebenen Vertikallinie gestellt. (Siehe das unten stehenden Beispiel.) Wir fügen dann noch folgendes Schlussfiguren-Schema hinzu:

(5)
$$\frac{(+) \mid (-)}{a^- \mid a^+} .$$

Durch dieses Schema wird der Übergang von der einen Seite zur andern erlaubt; d. h. jede Aussage a, die auf der (−) Seite steht, kann auf die (+) Seite übergeführt werden, wenn nur der Modus von a in den formalen (−) verwandelt wird, und jede Aussage a^- vom formalen Modus, die auf der (+) Seite steht, kann auf die (−) Seite übergeführt werden durch Wegnahme des Minusindex von a^-. Der inhaltliche Sinn des Schlusses (5) ist folgendermassen erklärt. Von links nach rechts: Es ist a^-; dann ist a^+ widerspruchsfrei. Von rechts nach links: Es ist a^+ widerspruchsfrei; dann gilt a^-. In dieser Weise trägt jede Formel, die auf der (−) Seite steht, immer den Sinn der Widerspruchsfreiheit. Auf jeder Seite der Vertikallinie verwenden wir die oben aufgezählten, intuitionistischen Schlussfiguren-Schemata von Gentzen. Dabei lässt es vorläufig dahingestellt sein, ob die Annahmeformeln der Herleitung auf der (+) oder (−) Seite liegen. In solcher Weise erhalten wir die Herleitung einer Formel, die ebenfalls baumförmig ist, nur dadurch von der Gentzenschen abweicht, dass ein Zweig des Baumes eventuell bei Anwendung von (5) horizontal wächst.

Es ist nun klar, dass *die Endformel, welche lediglich* (von den Annahmeformeln zur Endformel) *auf der* (+) *Seite* ohne Benutzung der (−) Seite *hergeleitet wird, eine intuitionistisch richtige Formel ist*. Dagegen *kann jede formalistisch richtige Formel lediglich auf der* (−) *Seite hergeleitet werden, ausgenommen wenn der Schluss* (3) *verwendet wird*. Denselben können wir vollziehen wie folgt. Man habe a^- auf der (−) Seite. Nach (5) haben wir dann $(a^-)^-$ auf der (+) Seite. Daraus lässt sich a^- intuitionistish erschliessen. Indem dies wieder gespiegelt wird, haben wir a^+ auf der (−) Seite.

Wir geben hier ein Beispiel der Herleitung, die die beiden Seiten benutzen.
Beispiel: $(a^- \vdash^- b^-) \vdash (a \vdash^- b)$

$$\begin{array}{c|c}
(+) & (-) \\ \hline
\begin{array}{l}
\dfrac{\overset{1}{a}}{(a^-)^-} \qquad a^- \overset{2}{\vdash}{}^- b^- \\
\qquad\qquad\qquad \dfrac{(b^-)^-}{b^-} \\
\qquad\qquad\qquad a \vdash^- b \\
[^2]\ \overline{(a^- \vdash^- b^-) \vdash (a \vdash^- b)}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\dfrac{a^- \quad a^- \vdash b^-}{b^-} \\
\dfrac{b}{a \vdash b}\ [^1]
\end{array}
\end{array}$$

7. Wir müssen nun beweisen, dass solcher Beweis, wie im obigen Beispiele ausgeführt wird, intuitionistisch richtig ist. Nämlich wollen wir behaupten, dass *die Endformel*, welche von jeder Annahmeformel des Schliessens unabhängig geworden ist, ***intuitionistisch richtig ist, wenn nur sie auf der*** (+) ***Seite steht und in deren Herleitung der Schluss*** ($\forall_{\text{I}}$) ***auf der*** (−) ***Seite nie gebraucht wird.*** Dabei dürfen die Annahmeformeln sowohl auf der (+) als auch auf der (−) Seite stehen. Um dies zu beweisen, führen wir jede Formel der Herleitung, welche auf der (−) Seite steht, auf die (+) Seite über, indem wir diese oder deren äusserstes logisches Zeichen mit Minusindex versehen. Dabei sollen wir dafür sorgfältig sein, erstens die relative Lage der Formeln der (−) Seite nicht zu zerstören und zweitens in der Lage, wo das Schlussfiguren-Schema (5) gebraucht ist, die übergeführte Formel genau auf dieselbe Formel zu legen, welche sicher auf der (+) Seite wegen (5) vorhanden ist. Durch dieses Verfahren erhalten wir auf der (+) Seite eine baumförmige Anordnung von Formeln, die wie folgt zu einer intuitionistisch richtigen Herleitung umgewandelt werden kann.

Keiner Umwandlung bedarf der Schluss, welcher von vornherein auf der (+) Seite liegt. Unter den Schlüssen, welche bei obigem Verfahren aus der (−) Seite herbeigebracht werden, wählen wir einen aus, welcher möglichst entfernt von der Endformel liegt d. h. worüber kein davon existiert. Wenn dieser Schluss aus der intuitionistisch erlaubten Schlussfiguren-Schemata zusammengesetzt werden kann, so ist unsre Behauptung nach Induktion bezüglich der Anzahl solcher Schlüsse erledigt.

Nun ist der in Frage stehende Schluss ersichtlich von der Art, dass er aus einem der Gentzenschen Schlussfiguren-Schemata ausser ($\forall_{\text{I}}$) dadurch entspringt, dass man jede darin enthaltene Ober- und Unterformel mit (−) Index versieht. Z. B. der aus ($\vdash_{\text{I}}$) in dieser Weise entsprungene Schluss ist

(6) $$[{}^{1}]\ \dfrac{\dfrac{\overset{1}{[a^{\pm}]}}{b^{-}}}{a \vdash^{-} b}$$

Der Modus der Annahmeformel $a^{\pm}$ ist intuitiv oder formal, je nachdem die Annahme a von vornherein auf der (+) oder (−) Seite liegt. Wegen unsrer Voraussetzung besteht der mit gestrichelter Linie bezeichnete Teil der Herleitung lauter aus der Aufhäufung der intuitionistischen Schlussfiguren-Schemata. Die Umwandlung von (6) ist erledigt folgendermassen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{a}}{a^{\pm}}}{b^-} \quad b^- \overset{2}{\vdash} b}{b}}{a \vdash b}\,[^1][^2] \qquad \neg(a \overset{3}{\vdash} b)}{\neg(b^- \vdash b)}\,[^3] \qquad \dfrac{\text{Beweis von}}{b^- \vdash^- b}}{a \vdash^- b}$$

Dabei ist der oberste Schluss nur dann nötig, wenn die Annahmeformel a^- vom formalen Modus ist. Ferner lautet der Schluss von $a^\pm$ zu b^- genau in derselben Weise wie in (6). Der Beweis der richtigen Formel $b^- \vdash^- b$ ist weggelassen worden. Die Umwandlung andrer Schlüsse können wir ähnlich ausführen, wie z. B. der aus ($\exists_2$) entstandene Schluss

$$\dfrac{\exists^- x\ a(x) \qquad \dfrac{[a^\pm(\xi)]}{c^-}}{c^-}$$

durch

(7)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\ \overset{2}{a}(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{a}(\xi)}{a^\pm(\xi)}}{c^-}}{c^-}\,[^1] \qquad \overset{3}{\neg c}}{\neg \exists x\ a(x)}\,[^2] \qquad \exists^- x\ a(x)}{c^-}\,[^3]$$

umgewandelt wird. Damit ist unsre Behauptung erledigt.

8. Der einzige Ausnahmefall im obigen Satze ist der Schluss ($\forall_1$), wovon die Umwandlung von

(8)
$$\frac{a^-(\xi)}{\forall^- x\ a(x)}$$

wie in (7) unmöglich ist wegen der in Nr. 4. erwähnten Bedingung bezüglich der Variabel ξ. Der Schluss (8) ist intuitionistisch nicht erlaubt. Aus der Oberformel $a^-(\xi)$, die der Variabelnbedingung genügen, wissen wir nur die Formel $\forall x\ a^-(x)$ zu erschliessen.

Wie in Nr. 6. erwähnt, erhalten wir jede formalistisch richtige Formel durch die Schlüsse auf der $(-)$ Seite. Durch Spezialisierung des Ergebnisses von Nr. 7. ergeben sich also die folgenden Sätze, die eine Verallegemeinerung des Satzes von Glivenko in der Aussagenlogik sind.

Jede formalistisch beweisbare Formel der Prädikatenlogik, welche kein Allzeichen enthält, ist widerspruchsfrei, d. h. sie wird eine intuitionistisch richtige Formel, wenn uur sie doppolt verneint wird.

Aus jeder formalistisch beweisbare Formel der Prädikatenlogik entsteht eine intuitionistisch richtige, wenn nur die ganze Formel und auch deren jede Teilformel $a(x)$, welche von einem Allzeichen $\forall x$ operiert wird, doppelt verneint werden.

Das Allzeichen ist höchst vom singulären Charakter, was schon von Brouwer[9] gezeigt worden ist, wenn er die Einsicht ausspricht, der mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$$\forall x\ (a(x) \vee \neg a(x)) \tag{9}$$

für geeignete Aussage $a(x)$ kontradiktorisch sei. Hingegen ist die Aussage

$$\forall x\ (a(x) \vee^{-} \neg a(x)) \tag{10}$$

ein richtiger logische Satz, der vielmehr der mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten genannt werden möge. Die Formeln (9) und (10) zeigen, dass die Verwechselung der Modi zuweilen in der Mathematik Paradoxien verursacht.

Das in Nr. 6. geschilderte Beweisverfahren ist dafür nützlich, etwa die Formeln (4) zu beweisen. Dessentwegen wissen wir auch z. B. den Schluss

$$\frac{a \vdash^{-} b \qquad b \vdash^{-} c}{a \vdash^{-} c}$$

zu berechtigen.

9. Obgleich die Formel

$$\neg(\neg \forall x\ a(x) \wedge \neg \exists x \neg a(x)), \tag{11}$$

wie schon am Ende von Nr. 5. erwähnt, vom formal-logischen Standpunkt aus nicht richtig ist, ist es ein interessantes und wichtiges Problem, die mathematische Bedingung zu bestimmen, welcher die Aussage $a(x)$ Genüge leisten soll, um die Formel (11) gülltig zu sein. Es liegt mir nahe, dass der Kernpunkt der Bedingung bestehe darin, dass das am inneren Aufbau der Aussage $a(x)$ teilnehmende Unendliche lauter abzählbar sei.

Die Formel (11) ist gleichwertig mit

$$\forall x\ a^{-}(x) \vdash \forall^{-} x\ a(x), \tag{12}$$

oder, da die Umkehrung von (12) richtig ist, mit

$$\forall x\ a^{-}(x) \vdash\!\dashv \forall^{-} x\ a(x),$$

so dass für diese $a(x)$ die Figur 2. sich in die mit nur vier Rahmen reduziert, nähmlich deren oberster linker und unterster rechter Rahmen sich in die mittleren zusammenziehen.

[9] Vgl. insbesondere [4].

Da für die Aussage $a(x)$, wovon (12) gilt, der Schluss (8) offenbar intuitionistisch erlaubt wird, die umständliche Beschränkung des Satzes in Nr. 8. weggelassen werden kann. Mithin gilt der Satz:

Jede formalistisch beweisbare Formel derjenigen axiomatischen Theorie, in der für jede Aussage $a(x)$ die Formel (12) gilt und überdies deren Axiome intuitionistisch richtig sind, ist widerspruchsfrei.

Wenn die obengenannte Bedingung dafür hinreichend ist, das betreffende Problem zu lösen, so könnte daraus ein Ergebniss über die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie erhalten werden.

Mathematisches Institut,
Universität zu Nagoya