Commun. Math. Phys. 172, 461 – 466 (1995)

Communications in Mathematical Physics

Quelques Nouvelles Propriétés de Régularité de l'Opérateur de Gribov

Marie-Thérèse Aimar[1], Abdelkader Intissar[2], Jean-Martin Paoli[2]

[1] Département de Mathématiques, Université de Provence, Place V. Hugo, F-13331 Marseille cedex 3, France

[2] Equipe d'analyse spectrale U.R.A. CNRS, n° 2053, Département de Mathématiques Université de Corte, Quartier Grossetti, F-20250 Corte, France

Received: 28 March 1994 / in revised form: 6 December 1994

Abstract: In this work, we establish new regularity properties for Gribov's operator: $H = \mu A^* A_+ i\lambda A^*(A + A^*)A; (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, where A^* and A are the creation and annihilation operators. Particularly, we prove that for all $\varepsilon > 0$, H^{-1} is in the class of Carleman's operator $l_{1+\varepsilon}$.

1. Introduction

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et de la norme $\| \ \|$ et K un opérateur linéaire compact.

Définition 1. *Un opérateur compact K est dit de classe l_p de Carleman si la série: $\sum_{n=1}^{\infty} [s_n(\sqrt{K^*K})]^p$ converge où $s_n(\sqrt{K^*K}), n = 1, 2, \ldots$ désigne la suite des valeurs propres de l'opérateur compact hermitien positif $\sqrt{K^*K}$.*

Remarque 1.

1) Pour une étude des espaces l_p, on pourra consulter le livre de Gohberg–Krein [6].

2) La théorie des champs de reggeons a été inventée par Gribov [5] en 1967 afin de décrire le comportement à haute énergie des sections efficaces de collisions de particules élémentaires. Elle est caractérisée par l'opérateur de Gribov H'_λ s'exprimant en fonction des opérateurs de création et d'annihilation usuels et agissant sur l'espace de Bargmann [4]:

$$E = \{\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ analytiques } ; \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z|^2} |\varphi(z)|^2 dz d\bar{z} < \infty \text{ et } \varphi(0) = 0\} .$$

L'opérateur non auto-adjoint H'_λ est défini par:

$$H'_\lambda = \lambda' \sum_{j=1}^{n} A_j^{*2} A_j^2 + \mu \sum_{j=1}^{n} A_j^* A_j + i\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j^*(A_j + A_j^*)A_j + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} (A_{j+1}A_j^* + A_{j+1}^* A_j) ,$$

où A_j^* et A_j désignent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation, $(\lambda', \mu, \lambda, \alpha)$ sont des paramètres réels et $i^2 = -1$.

Une étude spectrale complète de H'_λ est donnée dans [3, 7, 8 et 9] et pour $\lambda' \neq 0$, la densité du système de ses vecteurs propres généralisés est donnée dans [1 ou 2]. Pour $\lambda' = 0$, la question de la densité du système des vecteurs propres généralisés de H'_λ dans l'espace de Bargmann est encore ouverte. On donne néanmoins dans ce travail quelques propriétés de régularité ($n = 1$) de cet opérateur limite.

A un site, l'opérateur de Gribov se présente sous la forme $H = \mu H_0 + i\lambda H_1$; $i^2 = -1$, où:

$H_0 = A^*A$ est l'oscillateur harmonique.
$H_1 = A^*(A + A^*)A$ est l'opérateur cubique de la théorie des champs de reggeons
μ est l'intercept de Pomeron.
λ est le triple coupling de Pomeron.

Dans la représentation de Bargmann les opérateurs A^* et A ne sont autres que la multiplication par z et la dérivation par rapport à z. H s'écrit ainsi:

$$H = H(\mu, \lambda) = i\lambda z \frac{d^2}{dz^2} + (i\lambda z^2 + \mu z)\frac{d}{dz} .$$

L'adjoint formel de H est donné par:

$$H^T = H(\mu, \lambda)^T = H(\mu, -\lambda) \text{ et } (H^T)^T = H .$$

Remarque 2.
i) $e_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k!}}; k = 1, 2, \ldots$ est une base orthonormée de E.
ii) $D(A) = \{\varphi \in E; A\varphi \in E\}$ s'injecte de façon compacte dans E.
iii) Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes qui s'annulent à l'origine, $\mathscr{P}$ est dense dans E.
iv) L'opérateur H de domaine les polynômes $\mathscr{P}$ est fermable.

Lemme 1 (A. Intissar [7]).
i) $\|\varphi\| \leqq \|A\varphi\|$ *pour tout* φ *dans* $D(A)$.
ii) φ *appartient à* E *si et seulement si l'application* $z \to \frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z}$ *appartient à* E.
iii) *Si* $\varphi \in E$, *l'intégrale* $\int_{\mathbb{C}} \frac{e^{-|z|^2}}{1+|z|^2} |\varphi'(z)|^2 dx dy$ *est convergente.*
iv) *Si* $\varphi \in E$, *les intégrales* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |\varphi(x + iy)|^2 dy$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{1+y^2} |\varphi'(x + iy)|^2 dy$ *sont convergentes pour tout* x.

Dans toute la suite, on pose $H_{\max}(\mu, \lambda)\varphi = H\varphi$ pour $\varphi \in D_{\max} = D(H) = \{\varphi \in E; H\varphi \in E\}$ et on définit:

$*$ L'extension minimale de H par:

$$H_{\min} = H_{\min}(\mu, \lambda) = \mu A^*A + i\lambda A^*(A + A^*)A \text{ de domaine:}$$

$$D_{\min} = \{\varphi \in E; \exists p_n \in \mathscr{P} \text{ et } \exists \psi \in E;\ \lim p_n = \varphi \text{ et}$$
$$\lim Hp_n = \psi = H_{\min}\varphi \text{ quand } n \to \infty\} ,$$

$H_{\min}$ ainsi défini, est la fermeture de la restriction de H à $\mathscr{P}$. Par conséquent $\mathscr{P}$ est le "coeur" de $H_{\min}$ c'est-à-dire: l'ensemble des éléments $(p, H_{\min}p)$ avec $p \in \mathscr{P}$ est dense dans $G(H_{\min})$ où $G(H_{\min})$ désigne le graphe de $H_{\min}$.

$*$ $H_{\max} = H_{\max}(\mu, \lambda)$, $\quad (H^T)_{\min} = H_{\min}(\mu, -\lambda)$ et $(H^T)_{\max} = H_{\max}(\mu, -\lambda)$.

Alors on a:

$\langle H_{\max}(\mu, \lambda)\varphi, p\rangle = \langle H\varphi, p\rangle = \langle \varphi, H^T p\rangle$ pour tout $p \in P$ (ensemble des polynômes), ce qui est équivalent à $\langle H_{\max}(\mu, \pm\lambda)\varphi, q\rangle = \langle \varphi, H_{\min}(\mu, \mp\lambda)q\rangle$ pour tout $q \in D_{\min}$ et $\varphi \in D_{\max}$,
Il en résulte que

$$H_{\min}(\mu, \pm\lambda)^* = H_{\max}(\mu, \mp\lambda) \text{ où } H_{\min}(\mu, \pm\lambda)^* \text{ est l'adjoint de } H_{\min}(\mu, \pm\lambda).$$

Théorème 1. *Pour $\mu > 0$. Alors*

1) *L'opérateur $H_{\max}(\mu, \lambda)$ est injectif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2) *L'opérateur $H_{\min}(\mu, \lambda)$ est bijectif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3) *$H_{\max}(\mu, \lambda) = H_{\min}(\mu, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

1) Soit $\varphi \in D(H)$ vérifiant $H\varphi = 0$ alors $i\lambda z\varphi''(z) + (i\lambda z^2 + \mu z)\varphi'(z) = 0$ et $\varphi'(z) = c \operatorname{Exp}(\frac{-z^2}{2} + i\frac{\mu}{\lambda}z)$ où c est une constante. En appliquant par exemple la propriété (iv) du Lemme 1, on vérifie que φ n'appartient pas à l'espace de Bargmann E.

2) La démonstration de cette propriété repose sur le lemme précédent. En effet, pour $\mu > 0$, $\operatorname{Re}\langle H_{\min}\varphi, \varphi\rangle = \mu\|A\varphi\|^2$ d'où l'on déduit, en appliquant (i) du lemme, que $\|\varphi\| \leqq \frac{1}{\mu}\|H_{\min}\varphi\|$ pour tout $\varphi \in D_{\min}$. Il en résulte que $H_{\min}$ est injectif et d'image fermée. D'autre part, l'orthogonal de l'image de $H_{\min}$ est $\{0\}$. En effet $\langle \psi, H_{\min}(\mu, \lambda)\varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in D_{\min}$ est équivalent à $\langle \psi, Hp\rangle = 0$ pour tout $p \in \mathscr{P}$ donc $H_{\max}(\mu, -\lambda)\psi = H_{\min}(\mu, \lambda)^*\psi = 0$, il résulte de la propriété (1) que $\psi = 0$.

3) Soit $\varphi \in D_{\max}$, comme $H_{\min}$ est bijectif, alors il existe $q \in D_{\min}$ tel que $H_{\max}\varphi = H_{\min}q$. Comme $D_{\min} \subset D_{\max}$, on en déduit que $H_{\max}(\varphi - q) = 0$. Il en résulte (en appliquant l'injectivité de $H_{\max}$) que $\varphi = q \in D_{\min}$.

Corollaire.

1) *L'inverse de H est compact.*
2) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ on a : $\|H^{-1}\psi\| \leqq \frac{1}{\mu}\|\psi\|$ pour tout $\psi \in E$.*

Démonstration.

1) Il suffit de remarquer d'une part que l'ensemble résolvant de $H_{\min}$ est non vide et d'autre part que $D(H)$ s'injecte dans $D(A)$ de façon continue or ce dernier s'injecte dans E de façon compacte.

2) Comme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ on a $\mu\|\varphi\| \leqq \|H\varphi\|$ pour tout $\varphi \in D(H)$, il en résulte que $\|H^{-1}\psi\| \leqq \frac{1}{\mu}\|\psi\|$ pour tout $\psi \in E$.

2. La Subordination de l'Oscillateur Harmonique à l'Opérateur de Gribov

Définition 2. *Soit S et B deux opérateurs linéaires de domaine respectif $D(S)$ et $D(B)$. On dit que B est p-subordonné ($0 \leqq p \leqq 1$) à S si:*

a) *$D(S) \subset D(B)$.*

b) *Il existe $C > 0$ tel que $\|B\varphi\| \leqq C\|S\varphi\|^p\|\varphi\|^{1-p}$ pour tout φ dans $D(S)$.*
Pour $p = 1$, on dit que B est subordonné à S.

Soit $H_0 = A^*A$ *l'oscillateur harmonique de domaine* $D(H_0) = \{\varphi \in E; A^* A\varphi \in E\}$

Lemme 2 (Quelques inégalités a priori).

1) *Pour* $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, $|\mathrm{Re}\langle HH_0^{-1}p, p\rangle| \geqq \mu\|p\|^2 - |\lambda| \cdot |\mathrm{Im}\langle AH_0^{-1}p, p\rangle| \quad \forall p \in \mathscr{P}$.

2) $\|AH_0^{-1}p\| \leqq \|p\| \quad \forall p \in \mathscr{P}$.

3) $\|A\varphi\| \leqq \|H_0\varphi\|^{1/2}\|\varphi\|^{1/2} \quad \forall \varphi \in D(H_0)$.

4) *Pour* $\mu > 0, \varepsilon > 0$ *et* $\lambda \neq 0$ *on a*:

a) $(\mu - \varepsilon)\|H_0\varphi\| \leqq \|H\varphi\| + \frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon}\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in D(H)$,

b) $(\mu - \varepsilon)\|H_0H^{-1}\psi\| \leqq (1 + \frac{|\lambda|^2}{4\mu\varepsilon})\|\psi\| \quad \forall \psi \in E$.

Démonstration.

1) Soit $p \in \mathscr{P}$, en remarquant que $H_0^{-1}\mathscr{P} = \mathscr{P} = H_0\mathscr{P}$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} HH_0^{-1}p &= \mu p + i\lambda A^*(A + A^*)AH_0^{-1}p \\ &= \mu p + i\lambda A^*A^2H_0^{-1}p + i\lambda A^{*2}AH_0^{-1}p \\ &= \mu p + i\lambda[AA^* - I]AH_0^{-1}p + i\lambda A^*p \\ &= \mu p + i\lambda(A + A^*)p - i\lambda AH_0^{-1}p\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que Re $\langle HH_0^{-1}p, p\rangle = \mu\|p\|^2 - \lambda\,\mathrm{Im}\|p\|^2 - \lambda\,\mathrm{Im}\langle AH_0^{-1}p, p\rangle$ et donc $|\mathrm{Re}\langle HH_0^{-1}p, p\rangle| \geqq \mu\|p\|^2 - |\lambda| \cdot |\,\mathrm{Im}\langle AH_0^{-1}p, p\rangle|$.

2) Comme $AH_0^{-1}p = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k AH_0^{-1}\left(\frac{z^k}{\sqrt{k!}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\sqrt{k}}\left(\frac{z^{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}}\right)$, on en déduit que:

$$\|AH_0^{-1}p\|^2 \leqq \|p\|^2\,.$$

3) Comme $\|A\varphi\|^2 = \langle A^*A\varphi, \varphi\rangle = \langle H_0\varphi, \varphi\rangle \leqq \|H_0\varphi\| \cdot \|\varphi\|$, on a:

$$\|A\varphi\| \leqq \|H_0\varphi\|^{1/2}\|\varphi\|^{1/2} \quad \forall \varphi \in D(H_0)\,.$$

4) a) En appliquant (1) de ce lemme on déduit que:

$$\|HH_0^{-1}q\|\|q\| \geqq \mu\|q\|^2 - |\lambda| \cdot \|AH_0^{-1}q\| \cdot \|q\|\,.$$

Et d'aprés (3) de ce lemme on a:

$$\|AH_0^{-1}q\| \leqq \|q\|^{1/2}\|H_0^{-1}q\|^{1/2} \leqq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\|q\| + \frac{|\lambda|}{4\varepsilon}\|H_0^{-1}q\|, \text{ alors}$$

$\|HH_0^{-1}q\| \geqq (\mu - \varepsilon)\|q\| - \frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon}\|H_0^{-1}q\|$ c'est-à-dire:

$$(\mu - \varepsilon)\|q\| \leqq \|HH_0^{-1}q\| + \frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon}\|H_0^{-1}q\| \quad \forall q \in \mathscr{P}\,.$$

Comme $H_0^{-1}\mathscr{P} = \mathscr{P}$, on obtient:

$$(\mu - \varepsilon)\|H_0p\| \leqq \|Hp\| + \frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon}\|p\| \quad \forall p \in \mathscr{P}\,.$$

De la densité des polynômes $\mathscr{P}$ dans l'espace de Bargmann E et de l'égalité du domaine minimal de H et de son domaine maximal, on déduit que:

$$(\mu-\varepsilon)\|H_0\varphi\| \leqq \|H\varphi\| + \frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon}\|\varphi\| \quad \forall\varphi \in D(H)\,.$$

b) Il suffit de combiner cette dernière inégalité et l'inégalité du corollaire pour obtenir:

$$(\mu-\varepsilon)\|H_0H^{-1}\psi\| \leqq \left(1+\frac{|\lambda|^2}{4\mu\varepsilon}\right)\|\psi\| \quad \forall\psi \in E\,.$$

Ces inégalités a priori nous permettent d'obtenir:

Théorème 2.
1) *A est $\frac{1}{2}$-subordonné à H_0.*
2) *Le domaine de H est inclus dans celui de H_0 : $D(H) \subset D(H_0)$.*
3) *H_0 est subordonné à H.*

3. Régularité de l'Opérateur de Gribov

Théorème 3. $\forall\varepsilon > 0$, *on a* $H^{-1} \in l_{1+\varepsilon}$.

Démonstration. De l'inégalité a priori $\frac{\mu}{2}\|H_0\varphi\| \leqq \|H\varphi\| + \frac{|\lambda|^2}{2\mu}\|\varphi\| \quad \forall\varphi \in D(H)$ (Lemme 2 avec $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$), on déduit que l'opérateur $B = H_0H^{-1} \in L(E)$ où $L(E)$ désigne l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans lui même. Par conséquent:

$H^{-1} = H_0^{-1}B$ et comme $H_0^{-1} \in l_{1+\varepsilon}$ on en déduit que $H^{-1} \in l_{1+\varepsilon}$.

Continuité de H^{-1} par rapport au paramètre λ

Proposition. *Posons* $f(\lambda) = H^{-1} = (\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow L(E)$ *est continue.*

Démonstration. Pour $\lambda_0 \neq 0$, on a:

$$(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1} - (\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1} = i(\lambda_0-\lambda)(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1} \times H_1(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1},$$

en appliquant le corollaire on en déduit que:

$$\|(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1} - (\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\mu}\|H_1(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\|\cdot|\lambda_0-\lambda| \text{ et comme}$$

$$\|H_1(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_0|}\|(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1 - \mu H_0)(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\|$$
$$\leqq \frac{1}{|\lambda_0|}(1 + \mu\|H_0(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\|)\,.$$

En appliquant l'inégalité $\frac{\mu}{2}\|H_0\varphi\| \leqq \|H\varphi\| + \frac{|\lambda|^2}{2\mu}\|\varphi\|\ \forall\varphi \in D(H)$ (Lemme 2 avec $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$), on obtient:

$$\frac{1}{|\lambda_0|}(1 + \mu\|H_0(\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\|) \leqq \frac{1}{|\lambda_0|}\left(3 + \frac{|\lambda_0|^2}{\mu}\right).$$

Par conséquent, on a:

$$\|(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1} - (\mu H_0 + i\lambda_0 H_1)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\mu}\frac{1}{|\lambda_0|}\left(3 + \frac{|\lambda_0|^2}{\mu}\right)|\lambda_0 - \lambda|.$$

Pour $\lambda_0 = 0$, on a:

$$\left\|(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1}\Psi - \frac{1}{\mu}H_0^{-1}\Psi\right\| \leqq \|(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1}\| \left\|\Psi - \frac{1}{\mu}(\mu H_0 + i\lambda H_1)H_0^{-1}\Psi\right\|$$

pour tout $H_0^{-1}\Psi \in D(H)$, c'est-à-dire pour tout $\Psi \in H_0[D(H)]$. En appliquant à nouveau le corollaire on en déduit que:

$$\|(\mu H_0 + i\lambda H_1)^{-1}\Psi - \frac{1}{\mu}H_0^{-1}\Psi\| \leqq \frac{|\lambda|}{\mu^2}\|H_1 H_0^{-1}\Psi\|$$

qui tend vers 0 lorsque λ tend vers 0 pour tout $\Psi \in H_0[D(H)]$. Comme $H_0[D(H)]$ est dense dans E on en déduit la continuité de la fonction $f(\lambda)$ à l'origine.

Remerciements. L'un des auteurs, le professeur A. Intissar, remercie le professeur H. Araki pour l'intérêt constant qu'il a porté à l'étude de cet opérateur de Gribov.

Bibliographie

1. Aimar, M.T., Intissar, A., Paoli, J.M.: Densité des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs non auto-adjoints à résolvante compacte. C.R. Acad. Sci. Paris, t. **315**, Série I (1992)
2. Aimar, M.T., Intissar, A., Paoli, J.M.: Densité des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérataurs compacts non auto-adjoints et applications. Commun. Math. Phys. **156**, 169–177 (1993)
3. Ando, T., Zerner, M.: Sur une valeur propre d'un opérateur. Commun. Math. Phys. **93**, 123–139 (1984)
4. Bargmann, V.: On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I. Commun. Pure App. Math. **14** (1962)
5. Gribov, V.: J.E.T.P. (Sov. Phys.) **26** (1968)
6. Gohberg, I.C., Krein, M.: Introduction to the theory of linear non-self adjoint operators. **18** Providence R.I: A.M.S., 1969
7. Intissar, A.: Etude spectrale d'une famille d'opérateurs non-symétriques intervenant dans la théorie des champs de reggeons. Commun. Math. Phys. **113**, 263–297 (1987)
8. Intissar, A.: Quelques nouvelles propriétés spectrales de l'hamiltonien de la théorie des champs de reggeons. C.R. Acad. Sci. Paris, t. **308**, Série I (1989)
9. Intissar, A.: Théorie spectrale dans l'espace de Bargmann. Cours de D.E.A., Université de Besançon (1989)

Communicated by H. Araki