

Effet d’Aharonov Bohm sur un état borné de l’équation de Schrödinger

B. Helffer

Département de Mathématiques, Université de Nantes, UA CNRS 758,
F-44072 Nantes Cédex 03, France

Abstract. Cet article est consacré à l’étude de l’influence du champ magnétique sur la première valeur propre de l’équation de Schrödinger. On se propose d’exploiter quantitativement une remarque d’un article de Lavine O’Carroll par des méthodes semi-classiques. La comparaison de la distance d’Agmon du puits au support du champ magnétique et de la longueur minimale (d’Agmon) des chemins contournant le support joue un rôle essentiel dans les phénomènes mis en évidence.

1. Introduction

Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ un potentiel électrique $t \cdot q$

$$V \geq C \quad \text{et} \quad V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty \quad (1.1)$$

et soit $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ un potentiel magnétique dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On notera

$$\omega_A = \sum_j A_j dx_j \quad \text{la 1-forme associée et} \quad (1.2)$$

$$\sigma_B = d\omega_A = \sum_{j < k} B_{jk} dx_j \wedge dx_k \quad (1.3)$$

la 2-forme champ magnétique.

L’opérateur de Schrödinger avec champ magnétique est alors défini par:

$$P_{A,V}(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} (hD_{x_j} - A_j)^2 + V, \quad (1.4)$$

et on désignera dans la suite par $P_{A,V}^\Omega(h)$ la réalisation de Dirichlet dans un ouvert Ω , connexe, éventuellement non borné, mais de frontière $\partial\Omega$ régulière et bornée (cf. [RE-SI]). L’hypothèse (1.1) assure que $P_{A,V}^\Omega(h)$ est à résolvante compacte et le point de départ de notre travail était d’exploiter *quantitativement* une remarque heuristique d’un article de Lavine-O’Carroll.

Rappelons d’abord qu’il est maintenant classique, comme conséquence de l’inégalité de Kato, (cf. [C-F-K-S]), que:

$$\lambda_{0,A,V}^\Omega(h) \geq \lambda_{0,0,V}^\Omega(h),$$

où $\lambda_{0,A,V}^\Omega(h)$ est la première valeur propre de $P_{A,V}^\Omega(h)$.

On montrera dans la Sect. 2, la proposition suivante (due essentiellement à Lavine-O’Carroll):

Proposition 1.1. *Soit $h > 0$ fixé.*

Soit Ω un ouvert connexe, régulier à frontière (éventuellement vide) bornée. Alors sous les hypothèses précédentes (1.1), (1.2), les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $\lambda_{0,A,V}^\Omega(h) = \lambda_{0,0,V}^\Omega(h)$,
- (ii) $P_{A,V}^\Omega(h)$ et $P_{0,V}^\Omega(h)$ sont unitairement équivalents (par changement de jauge)
- (iii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \sigma_B = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{(b) pour tout chemin fermé } \gamma \text{ dans } \Omega, (2\pi h)^{-1} \int_\gamma \omega_A \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$

On s’intéresse donc dans cet article à mesurer, par des méthodes semi-classiques (développées dans [HE-SJ]₃), la différence $\lambda_{0,A,V}^\Omega(h) - \lambda_{0,0,V}^\Omega(h)$ lorsque la condition (iii) n’est pas satisfaite. Au Sect. 3, on montrera que, sous des hypothèses convenable sur V [V a un minimum non dégénéré en dehors de Ω et V fait barrière autour de $\partial\Omega$ où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus$ (disque de rayon δ)], un potentiel magnétique ω_A tel que:

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_{2\delta}} \omega_A \notin \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad t. q \sigma_B = 0, \quad (\text{où } \gamma_{2\delta} \text{ désigne le cercle de rayon } 2\delta)$$

crée un écart ($\lambda_{0,A,V}^\Omega(h) - \lambda_{0,0,V}^\Omega(h)$) que l’on peut mesurer asymptotiquement et où apparait explicitement le terme

$$\left(1 - \cos \left(\frac{1}{h} \int_{\gamma_{2\delta}} \omega_A \right) \right).$$

Ceci nous semble donner un éclairage nouveau, sur un problème différent, des discussions concernant l’effet d’Aharonov-Bohm [AH-BO], (cf. [PE, BE] et les références de cet article).

Les résultats présentés ici sont en partie annoncés dans [HE] (avec quelques erreurs mineures corrigées ici).

Enfin dans la Sect. 5, nous donnons comme corollaire de notre étude une variante du contre-exemple du à Avron et Simon [AV-SI] d’une conjecture de Hogleve-Schrader-Seiler [H-S-S] appelée conjecture paramagnétique.

2. Démonstration de la proposition 1.1

Tout s’appuie sur l’identité suivante où u_0 est la première fonction propre de $P_0^\Omega(h)$ attachée à la valeur propre $\lambda_0^\Omega(h)$:

$$\left\| \left(h\nabla - iA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) \varphi \right\|^2 = \langle (P_A^\Omega(h) - \lambda_0^\Omega) \varphi / \varphi \rangle \quad (2.1)$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$

Une première conséquence, grâce au principe du minimax, est que:

$$\lambda_A^\Omega(h) \geq \lambda_0^\Omega(h). \tag{2.2}$$

Montrons maintenant que: (i) \Rightarrow (iii).

De $\lambda_A^\Omega = \lambda_0^\Omega$, on déduit de (2.1) l'existence d'une suite minimisante $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ pour la forme $q_{A,V}^\Omega$ associée à la réalisation de Dirichlet telle que:

$$\left. \begin{aligned} q_{A,V}^\Omega(\varphi_n, \varphi_n) &\rightarrow \lambda_{0,A,V}^\Omega = \lambda_{0,0,V}^\Omega \\ \left(h\nabla - iA - h\frac{\nabla u_0}{u_0} \right) \varphi_n &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \varphi_n &\rightarrow u_A \quad \text{dans } L^2(\Omega) \end{aligned} \right\}, \tag{2.3}$$

où u_A est une première fonction propre normalisée de $P_A^\Omega(h)$. On obtient alors:

$$h\nabla u_A - iA u_A - h\frac{\nabla u_0}{u_0} \cdot u_A = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.4}$$

On réécrit (2.4) en utilisant la notation: $\varphi_A = \begin{pmatrix} u_A \\ u_0 \end{pmatrix}$ sous la forme:

$$h d\varphi_A = i\varphi_A \cdot \omega_A. \tag{2.5}$$

Remarquons maintenant que:

$$\varphi_A \neq 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.6}$$

Supposons en effet que $\varphi_A(y_0) = 0$ pour un $y_0 \in \Omega$. On déduit de (2.5) dans une boule contenue ($B(y_0, r_0)$) contenu dans Ω que:

$$|\nabla \varphi_A| \leq C|\varphi_A|. \tag{2.7}$$

Dans cette boule, on peut écrire:

$$\varphi_A(x) = \varphi_A(y_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} [\varphi(y_0 + t(x - y_0))] dt. \tag{2.8}$$

On déduit alors de (2.7) et (2.8) que pour tout $0 < r \leq r_0$,

$$\sup_{x \in B(y_0, r)} |\varphi_A| \leq Cr \sup_{x \in B(y_0, r)} |\varphi_A|.$$

On en déduit que φ_A serait nulle dans $B(y_0, 1/C)$. $\varphi_A^{-1}(0)$ est donc ouvert et fermé; Ω étant connexe, on obtient que si φ_A s'annule en un point, on a $\varphi_A \equiv 0$ ce qui est une contradiction avec $\|u_A\| = 1$. On a donc bien démontré (2.6).

Différentiant (2.5), on obtient immédiatement: $\varphi_A \cdot d\omega_A = 0$ et donc, compte tenu de (2.6), $d\omega_A = \sigma_B = 0$ [soit (iii)_a]. Dans le cas simplement connexe, on en déduit que $\omega_A = d\theta$ pour une fonction C^∞ dans $\bar{\Omega}$ et on a bien entendu (iii)_b avec

$$\int_\gamma \omega_A = \int_\gamma d\theta = 0.$$

Pour obtenir (iii)_b dans un cas non nécessairement simplement connexe, on repart de (2.5) qu'on peut écrire localement:

$$h d(\text{Log } \varphi_A) = i\omega_A \quad \text{pour une détermination du logarithme.} \tag{2.9}$$

On déduit de (2.9) que $|\varphi_A|$ est localement constant (donc constant) φ_A étant univalué, on en déduit bien la condition (iii)_b, (iii) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (i) se montrent facilement.

3. Calculs semi-classiques pour le modèle sur $R^2 \setminus B(0, \delta)$

Considérons donc: $\Omega = R^2 \setminus B(0, \delta)$, où δ vérifie $0 < \delta < 1$ et $B(0, \delta)$ est le disque de centre 0 et de rayon δ . On fait sur V et A les hypothèses suivantes:

$$A \in C^\infty(\bar{\Omega}; R^2), V \in C^\infty(\bar{\Omega}), \tag{3.1}$$

$$B = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \equiv 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \tag{3.2}$$

$$V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty, \tag{3.3}$$

V a un unique minimum non dégénéré dans $\bar{\Omega}$
 un point $y = (1, 0)$ et $V(y) = 0$,

$$\tag{3.4}$$

$$V(x_1, x_2) = V(x_1, -x_2). \tag{3.5}$$

On s'intéresse donc à estimer $\lambda_{0,tA,V}^\Omega(h) - \lambda_{0,0,V}^\Omega(h)$ pour $t \in [0, 1]$, lorsque $h \rightarrow 0$. On notera plus simplement $\lambda_t(h) - \lambda_0(h)$. On définit Φ par:

$$\Phi = \int_{\gamma_\delta} \omega_A \tag{3.6}$$

où $\gamma_\delta = \partial B(0, \delta)$.

La proposition (1.1) nous a dit que $\lambda_t(h) - \lambda_0(h) > 0$ si et seulement si: $\frac{t\Phi}{2\pi h} \notin 2\Pi Z$.

Soit d_V la distance d'Agmon sur $\bar{\Omega}$ associée à la métrique $V \cdot dx^2$; on introduit

$$S_0 = d_V(y, \partial\Omega). \tag{3.7}$$

Soit maintenant Γ l'ensemble des chemins fermés dans Ω passant par y qui ne sont pas homotopes dans Ω au chemin réduit à y . On note pour un chemin γ , $l(\gamma)$ la longueur pour la métrique d'Agmon du chemin γ . On introduit alors:

$$S_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma). \tag{3.8}$$

L'hypothèse fondamentale est:

$$S_1 < 2S_0. \tag{3.9}$$

C'est cette hypothèse qui assure l'existence de l'effet Bohm-Aharonov. Elle dit en fait que V crée une barrière entre y et $\partial\Omega$.

On fait de plus, cette fois-ci pour simplifier, l'hypothèse que:

$$\text{Le minimum } S_1 \text{ est atteint le long d'un unique chemin } \gamma. \tag{3.10}$$

$$\text{Le minimum est non-dégénéré.} \tag{3.11}$$

Les hypothèses (3.10) et (3.11) sont des hypothèses apparaissant dans [HE-SJ]₁.

Pour bien les comprendre, on va se placer dans le revêtement Ω^R de Ω qu'on va décrire en coordonnées polaires.

$$\Omega^R = \{(\varrho, \theta), \varrho \in]\delta, \infty[, \theta \in R\}.$$

$\Omega \setminus (\{x_2 = 0\})$ est alors identifié aux points x t. q

$$x = \varrho \cos \theta \quad \text{avec} \quad \theta \in]-\pi, \pi[, \varrho > \delta.$$

On identifie $y \in \Omega$ avec le point $y^{(0)}$ dans Ω^R avec $\varrho = 1, \theta = 0$. On note pour $j \in Z, y^{(j)}$ le point de coordonnées $\varrho = 1, \theta = 2\pi j$. Sur Ω^R , on a une distance d'Agmon associée au potentiel $V^R(\dot{x}) = V(\pi(\dot{x}))$ où π est la projection canonique de Ω^R sur Ω . (3.10) dit alors que:

Il existe une unique géodésique minimale $\dot{\gamma}$ entre $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$
 dans Ω^R pour la distance d_{V^R} [on a bien entendu $\pi(\dot{\gamma}) = \gamma$], (3.10)'

et dans cette correspondance (3.11) dit que:

$\dot{\gamma}$ est un géodésique minimale non dégénéré au sens
 de [HE-SJ]₁. (3.11)'

Si on note $z^{(1)}$ le point de Ω^R défini comme le point de $\dot{\gamma}$ tel que $z = \pi(z^{(1)})$ a comme coordonnées $x_2 = 0, x_1 < 0$, la condition (3.11)' dit que:

La fonction $d_{V^R}(\dot{x}, y^{(0)}) + d_{V^R}(\dot{x}, y^{(1)})$
 restreinte à $(\varrho = 1, \theta = \pi)$ s'annule exactement } (3.11)''
 à l'ordre 2 en $z^{(1)}$.

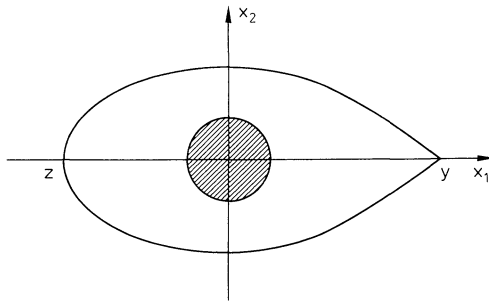


Fig. 1

On va démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses (3.1) à (3.11), on a:*

$$\lambda_{iA,V}^\Omega(h) - \lambda_{0,V}^\Omega(h) = h^{1/2} \left(1 - \cos \frac{t\Phi}{h} \right) a(h) (\exp(-S_1/h)) + O(\exp(-(S_1 + \varepsilon_0)/h)), \quad (3.12)$$

où $\varepsilon_0 > 0, 0$ est uniforme par rapport à $t \in [0, 1]$, $a(h)$ est une réalisation du symbole $(\sum_j a_j h^j)$ avec $a_0 > 0$.

Démonstration. Elle est très voisine de celle de Outassourt [OU], elle-même inspirée de celle de [HE-SJ]₁. On va comparer pour tout $t\lambda_t(h)$ à la première valeur propre d'un problème de référence $\tilde{\lambda}_0(h)$. Ce problème de référence est un problème de Dirichlet dans Ω^R . Profitant de (3.5), on peut définir pour tout $\varepsilon_1 > 0$, Ω_{ε_1} par :

$$\Omega_{\varepsilon_1} = \{ \dot{x} \in \Omega^R, \dot{x} = \varrho e^{i\theta} \text{ avec } \varrho \in]\delta, +\infty[, \theta \in]-2\pi + \varepsilon_1, 2\pi - \varepsilon_1[\}. \quad (3.13)$$

Le problème de référence est alors la réalisation de Dirichlet $P_{0,VR}^{\Omega_{\varepsilon_1}}(h)$ associée à l'opérateur :

$$P_{0,VR}(h) = \sum_j (hD_{\dot{x}_j})^2 + V^R(\dot{x}) \quad (3.14)$$

qu'on notera dans la suite $\tilde{P}_0(h)$.

On définit alors $\tilde{\lambda}_0(h)$ par :

$$\tilde{\lambda}_0(h) \text{ est la première valeur propre de } \tilde{P}_0^{\Omega_{\varepsilon_1}}(h). \quad (3.15)$$

Ce problème était l'objet de l'étude faite dans [HE-SJ]₁ pour le problème à un puit. Rappelons sans démonstration les propriétés qui vont nous servir :

Si $\tilde{u}_0(h)$ désigne la première fonction propre normalisée, positive associée $\tilde{\lambda}_0(h)$, on a :

$$\tilde{u}_0(\dot{x}) = O_\varepsilon(\exp(-(1-\varepsilon)d_{VR}(\dot{x}, y^{(0)}) + \varepsilon|h)), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.16)$$

Dans un voisinage de $\pi^{-1}(\gamma) \cap \Omega^R \tilde{u}_0$ admet une approximation BKW de la forme :

$$\tilde{u}_0^{\text{BKW}}(\dot{x}) = h^{-1/2} a[\dot{x}, h] e^{-(d_{VR}(\dot{x}, y^{(0)})/h)}, \quad \text{où } a(\dot{x}, h) \sim \left(\sum_{j \geq 0} a_j(\dot{x}) h^j \right)$$

avec $a_0(\dot{x}) > 0$ c'est à dire que :

$$\tilde{u}_0(\dot{x}, h) - \tilde{u}_0^{\text{BKW}}(\dot{x}, h) = O(h^\infty) e^{-(d_{VR}(\dot{x}, y^{(0)})/h)} \quad \text{près de } \pi^{-1}(\gamma) \cap \Omega^R. \quad (3.17)$$

Ici intervient le fait qu'on est au voisinage d'une géodésique minimale entre $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$ ou d'une géodésique minimale entre $y^{(0)}$ et $y^{(-1)}$ et que la distance d'Agmon à $y^{(0)}$ est C^∞ dans un voisinage de $\gamma \setminus (\{y^{(1)}\})$ (ou l'analogue entre $y^{(0)}$ et $y^{(-1)}$). On notera dans la suite $\gamma^{(1)}$ (resp. $\gamma^{(-1)}$) cette géodésique minimale entre $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$ (resp. $y^{(-1)}$). On remarque maintenant que, si $\varphi^R(\dot{x})$ est la solution dans Ω^R de

$$\varphi^R(y^{(0)}) = 0, \quad \nabla \varphi^R = \mathbf{A}(\pi(\dot{x})) \quad \text{dans } \Omega^R, \quad (3.18)$$

l'opérateur $P_{tA^R, VR}^{\Omega_{\varepsilon_1}}(h)$ est unitairement équivalent à $P_{0,VR}^{\Omega_{\varepsilon_1}}(h)$ par le changement de jauge: $u \rightarrow e^{i\frac{t\varphi^R}{h}} u$.

En particulier $\tilde{u}_{tA}(\dot{x}, h) = e^{i\frac{t\varphi^R}{h}} \tilde{u}_0(\dot{x}, h)$ est une fonction propre associée à la première valeur propre $\tilde{\lambda}_{tA} = \tilde{\lambda}_0(h)$ de $P_{tA^R, VR}^{\Omega_{\varepsilon_1}}(h)$.

L'idée est maintenant de construire à partir de \tilde{u}_{tA} une fonction propre approchée du problème de Dirichlet dans Ω .

Si $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}^R)$, on définit $(\pi_* u)$ dans $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ par

$$(\pi_* u)(x) = \sum_{\pi(\dot{x})=x} u(\dot{x}). \quad (3.19)$$

Soit maintenant χ^R une fonction C^∞ à support dans $\bar{\Omega}_{3\varepsilon_1/2}$ et égale à 1 sur $\Omega_{2\varepsilon_1} \cap B(y^{(0)}, S_1)$.

La fonction propre approchée du problème de Dirichlet est alors donnée par

$$\check{u}_{t_A}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*(\chi^R \tilde{u}_{t_A}). \quad (3.20)$$

Il est clair que $\check{u}_{t_A}(h)$ est C^∞ et dans le domaine de $P_{t_A, v}^\Omega(h)$.

Calculons maintenant: $P_{t_A, v}^\Omega \check{u}_{t_A}$.

On a:

$$\begin{aligned} P_{t_A} \check{u}_{t_A} &= P_{t_A} \circ \pi_*(\chi^R \tilde{u}_{t_A}) \\ &= \pi_* \circ \tilde{P}_{t_A}(\chi^R \tilde{u}_{t_A}) \\ &= \pi_* \circ \exp(it\varphi^R/h) \tilde{P}_0(\chi^R \tilde{u}_0). \end{aligned}$$

Soit:

$$P_{t_A} \check{u}_{t_A} = \tilde{\lambda}_0 \check{u}_{t_A} + \pi_*(\exp(it\varphi^R/h) [\tilde{P}_0, \chi^R] \tilde{u}_0). \quad (3.21)$$

On déduit d'abord de (3.16) et du choix de χ^R que pour tout $\eta > 0$ ($\eta < S_1$) on peut trouver $\varepsilon_1 > 0$ assez petit de telle sorte que:

$$(P_{t_A} - \tilde{\lambda}_0) \check{u}_{t_A} = O(\exp(-[S_1 + \eta]/2h)). \quad (3.22)$$

On déduit alors de (3.22) l'existence d'une valeur propre $\lambda_{t_A, v}^\Omega = \lambda_t(h)$ pour $P_{t_A, v}^\Omega$ t.q:

$$\lambda_t(h) - \tilde{\lambda}_0^{\varepsilon_1} = O_\eta(\exp(-[S_1 + \eta]/2h), \forall \eta < S_1) \quad (3.23)$$

pour ε_1 assez petit fonction de η et $h \in]0, h_0]$.

Une étude fond de puits du type faite dans [HE-SJ]₁, montre que c'est la seule dans $B(\tilde{\lambda}_0^{\varepsilon_1}(h), Ch)$ pour $C > 0$ assez petit et qu'elle est simple. Remarquons cependant que (3.23) donne seulement:

$$\lambda_t(h) - \lambda_0(h) = O_\varepsilon(\exp(-(S_1 - \varepsilon)/h), \forall \varepsilon > 0). \quad (3.24)$$

Pour obtenir un résultat plus précis, on doit repartir de la formule (3.21). Comme dans [HE-SJ]₁ (théorème 1.1) (cf. aussi Outassourt [OU]), on montre, en utilisant (3.16) et la même inégalité pour une fonction propre u_{t_A} normalisée associée à $\lambda_t(h)$:

$$u_{t_A}(x) = O_\varepsilon(\exp(-(1 - \varepsilon)d_V(x, y) + \varepsilon)/h) \quad (3.25)$$

dont la démonstration est donnée dans [HE-SJ]₃, que:

$$\lambda_t(h) - \tilde{\lambda}_0(h) = \frac{((P_{t_A} - \tilde{\lambda}_0)\check{u}_{t_A}/\check{u}_{t_A})}{(\check{u}_{t_A}/\check{u}_{t_A})} + O(\exp(-(2S_1 - \eta)/h)) \quad (3.26)$$

pour un choix de ε_1 convenable.

Calcul de $(\check{u}_{t_A}/\check{u}_{t_A})$.

$$(\check{u}_{t_A}/\check{u}_{t_A}) = \int_{\Omega} (\pi_*(\chi^R \tilde{u}_{t_A})/\pi_*(\chi^R \tilde{u}_{t_A})) dx.$$

On note r_j l'application de relèvement défini de $\Omega \setminus \{x_1 < -\delta, x_2 = 0\}$ dans Ω^R défini par

$$r_j(qe^{i\theta}) = qe^{i(\theta + 2\pi j)} \quad \text{pour } \theta \in]-\pi, \pi[.$$

On a alors

$$\pi_*(\chi^R \tilde{u}_{tA}) = \sum_{j=-1}^{\tilde{a}+1} (\chi^R \tilde{u}_{tA}) \circ r_j$$

et:

$$\begin{aligned} (\check{u}_{tA}/\check{u}_{tA}) &= \int_{\Omega} |\chi^R \tilde{u}_0 \circ r_0|^2 dx + O_\varepsilon(e^{-(S_1-\varepsilon)/h}) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &= \int_{\Omega^{\varepsilon_1}} |\tilde{u}_0|^2 d\dot{x} + O_\varepsilon(e^{-(S_1-\varepsilon)/h}) \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

soit

$$(\check{u}_{tA}/\check{u}_{tA}) = 1 + O_\varepsilon(e^{-(S_1-\varepsilon)/h}) \quad (3.27)$$

compte-tenu du choix de χ^R et des propriétés de décroissance de \tilde{u}_0 .

Calcul de $((P_{tA} - \tilde{\lambda}_0)\check{u}_{tA}/\check{u}_{tA})$.

Compte-tenu de (3.21), et de la propriété:

$$\varphi^R \circ r_j(x) - \varphi^R \circ r_0(x) = (-1)^j \Phi, \quad j=1, -1, \quad (3.28)$$

pour

$$x = \varrho e^{i\theta} \begin{cases} \theta \in (-\pi j, 0) \\ \varrho > \delta \end{cases}.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} ((P_{tA} - \tilde{\lambda}_0)\check{u}_{tA}/\check{u}_{tA}) &= e^{i\frac{t\Phi}{h}} \int_{\Omega} ([\tilde{P}_0, \chi^R] \tilde{u}_0(r_1(x))) (\chi^R \tilde{u}_0)(r_0(x)) dx \\ &\quad + e^{-i\frac{t\Phi}{h}} \int_{\Omega} ([\tilde{P}_0, \chi^R] \tilde{u}_0 \circ r_{-1}(x)) \chi^R \tilde{u}_0(r_0(x)) dx \\ &\quad + O(e^{-(S_1+\eta)/h}) \\ ((P_{tA} - \tilde{\lambda}_0)\check{u}_{tA}/\check{u}_{tA}) &= 2 \cos \frac{t\Phi}{h} \varrho(h) + O(e^{-(S_1+\eta)/h}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

où

$$\varrho(h) = \left. \begin{aligned} &\int_{\Omega} ([\tilde{P}_0, \chi^R] \tilde{u}_0(r_1(x))) (\chi^R \tilde{u}_0)(r_0(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} ([\tilde{P}_0, \chi^R] \tilde{u}_0(r_{-1}(x))) (\chi^R \tilde{u}_0)(r_0(x)) dx. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

La dernière égalité est évidente si on choisit χ^R symétrique par rapport à $x_2 = 0$. L'intégrale définissant $\varrho(h)$ est du type de celle étudiée dans $[\text{HE-SJ}]_1$ (Sect. 2 et Sect. 6) et en appliquant une formule de Stokes et (3.17), on voit que modulo $O(e^{-(S_1+\varepsilon_0)/h})$ avec $\varepsilon_0 > 0$, elle peut s'estimer comme une intégrale sur $x_2 = 0$ au voisinage du point z et la condition (3.11)" permet alors d'appliquer le théorème de la phase stationnaire qui donne:

$$\lambda_t(h) = h^{1/2} \cos t \frac{\Phi}{h} \cdot a(h) e^{-S_1/h} + O(e^{-(S_1+\varepsilon_0)/h})$$

avec 0 uniforme par rapport à t . On obtient ainsi le théorème 3.1.

4. Effet d'une puce magnétique sur le spectre de l'équation de Schrödinger

4.0. Introduction

On se place dans R^2 et on prend les hypothèses suivantes:

$$\mathbf{A} \in C^\infty(R^2; R^2), V \in C^\infty(R^2), \quad (4.0.1)$$

$$\text{supp } B \subset \overline{B(0, \delta)}, \quad (4.0.2)$$

$$V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty, \quad (4.0.3)$$

V a un unique minimum non dégénéré dans R^2 au point

$$y = (1, 0), \quad (4.0.4)$$

$$= (3.5) \text{ (pour simplifier)}. \quad (4.0.5)$$

On introduit S_0 et S_1 comme dans la Sect. 3. On distinguera dans ce paragraphe deux cas de nature opposée:

Cas 1: effet d'Aharonov-Bohm pour un état borné.

On suppose

$$S_1 < 2S_0. \quad (4.0.6)$$

On montrera qu'on a le même phénomène qu'au Sect. 3.

Cas 2: effet direct de B .

On suppose au contraire en posant $\tilde{S}_0 = d_V[y, \text{supp } B]$ que:

$$B_{a_V}(y, \tilde{S}_0) \text{ est simplement connexe.} \quad (4.0.7)$$

Dans le cas où $\text{supp } B = B(0, \delta)$, (4.0.7) correspond à la condition: $S_1 > 2S_0$. On montrera dans ce cas qu'il y a un effet quantique de l'ordre de $O(\exp(-2\tilde{S}_0/h))$ qui n'est pas du à un effet d'Aharonov-Bohm mais à l'interaction directe de la particule avec le champ magnétique.

4.1. Effet d'Aharonov-Bohm pour un état borné

On se place donc sous les hypothèses (4.0.1) à (4.0.6). On désigne par $\lambda_t(h)$ la première valeur propre de $P_{tA, V}(h)$ réalisé comme opérateur non borné autoadjoint dans $L^2(R^n)$. On va montrer le:

Théorème 4.1.1. *Sous les hypothèses (4.0.1) à (4.0.6), (3.6)–(3.11), ou*

$$\begin{aligned} \lambda_t(h) - \lambda_0(h) &= h^{1/2}(1 - \cos t\Phi/h) a(h) \exp(-S_1/h) \\ &+ O(\exp(-S_1/h - \varepsilon_0/h)), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

où $\varepsilon_0 > 0$, 0 est uniforme par rapport à $t \in [0, 1]$, $a(h)$ est celui introduit au théorème 3.2.1.

Démonstration. On se réfère aux résultats du théorème 3.2.1. Il s'agit donc juste de comparer $\lambda_t(h)$ et $\lambda_t^0(h)$ avec les techniques de [HE-SJ]₁ et [HE-SJ]₃. Pour

appliquer les résultats de [HE-SJ]₁, on rappelle que la distance d'Agmon d_V^Ω ou $d_V^{R^n}$ permet de contrôler la décroissance des fonctions propres normalisées relative à la première valeur propre $\lambda_t(h)$ ou $\lambda_t^\Omega(h)$ uniformément en t et pour $h \in]0, h_0]$ c'est à dire qu'on a le contrôle suivant:

$$u_{tA}^\Omega, (h\nabla + itA)u_{tA}^\Omega = O_\varepsilon(\exp(-(1-\varepsilon)d_V^\Omega(x, y)/h + \varepsilon/h)) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (4.1.2)$$

et la même chose pour $u_{tA}^{R^n}$.

Ceci est démontré dans [HE-SJ]₃ (lemme 1.4). Les techniques de [HE-SJ]₁ (corollaire 2.1.4) montrent alors que:

$$\lambda_t^{R^n}(h) - \lambda_t^\Omega(h) = O_\varepsilon(\exp(-2(S_0 - \varepsilon)/h)) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.1.3)$$

La perturbation est en effet de l'ordre du carré de la taille de la fonction propre là où on perturbe (cf. également [HE-SJ]₂). Sous la condition $2S_0 > S_1$, on voit que cette variation est strictement plus petite (asymptotiquement) que celle observée entre $\lambda_t^\Omega(h)$ et $\lambda_0^\Omega(h)$ d'où le résultat grâce au théorème (3.1).

4.2. Effet direct de B – La puce magnétique

Le terme «puce magnétique» est en référence à l'effet appelé «The flea of the elephant» par B. Simon [SI]₄. Cet effet du à une petite perturbation de V dans un problème de double puits a été observé pour la première fois dans l'article de Jona-Lasinio, Scoppola, Martinelli [J-M-S] puis étudié plus systématiquement dans [HE-SJ]₂ (cf. également [SI]₃).

On se place sous les hypothèses (4.0.1) à (4.0.5) et (4.0.7), on travaille dans R^n et on va montrer dans un premier temps la:

Proposition 4.2.1. *Sous les hypothèses (4.0.1) à (4.0.5) et (4.0.7), on a:*

$$0 \leq \lambda_t(h) - \lambda_0(h) \leq O_\varepsilon(e^{-(2(\tilde{S}_0 - \varepsilon)/h)}). \quad (4.2.1)$$

Notre résultat (4.2.1) étant invariant par changement de jauge et $\varepsilon > 0$ étant donné, il résulte de l'hypothèse (4.0.7) que l'on peut supposer après changement de jauge que:

$$\text{Supp } A \cap B_{d_V}(0, \tilde{S}_0 - \varepsilon/2) = \emptyset. \quad (4.2.2)$$

On remarque alors que $P_{tA}(h)$ et $P_0(h)$ coïncide sur $B_{d_V}(0, \tilde{S}_0 - \varepsilon/2)$ ce qui conduit comme dans la démonstration de la Sect. 4.1 à (4.2.1).

On s'intéresse maintenant à démontrer que l'effet observé est effectivement de cet ordre, c'est à dire qu'on cherche à voir sous quelles conditions on a effectivement:

$$\begin{aligned} \lambda_t(h) - \lambda_0(h) &\geq C_{\varepsilon,t}(\exp(-2[\tilde{S}_0 + \varepsilon]/h)) \\ &\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ avec } C_{\varepsilon,t} > 0 \text{ pour } t > 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Les effets d'Aharonov-Bohm (dans le cas 2) liés au flux de B étant de l'ordre de $O(\exp(-2(\tilde{S}_1 - \varepsilon)/h))$ où \tilde{S}_1 est introduit en (4.1.2), ils apparaîtront comme plus petits car l'hypothèse (4.0.7) dit que $2\tilde{S}_0 < \tilde{S}_1$.

Pour obtenir la minoration (4.2.3) (sous des hypothèses techniques sans doute trop fortes), on part de l'identité de Lavine-O'Carroll [LA-O'CA] utilisée en (2.1).

$$\left\| \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) \varphi \right\|^2 = q_{tA, \nu}(\varphi, \varphi) - \lambda_0(h). \quad (4.2.4)$$

Si u_{tA} désigne une fonction propre normalisée correspondant à $\lambda_{tA}(h)$ [qu'on peut choisir telle que $u_{tA}(h) - u_0(h)$ est très petit], on déduit de (4.2.4) l'estimation suivante pour tout ouvert ω dans $B_{d\nu}(y, S)$

$$\lambda_t(h) - \lambda_0(h) \geq \left\| \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) u_{tA} \right\|_{L^2(\omega)}^2 + O(e^{-2S/h}). \quad (4.2.5)$$

On est donc amené à trouver un ouvert ω dans lequel on a une bonne minoration de:

$$\left\| \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) u_{tA} \right\|_{L^2(\omega)}^2. \quad (4.2.6)$$

Si x est un point tel que $d_\nu(x, y) = \tilde{S}_0$, $x \in \text{Supp } B$, on cherchera ω dans une boule $\omega_0 = B_{d\nu}(x, \varepsilon_0)$. On sait que u_{tA} y est $O(\exp(-(S_0 - \varepsilon_0)/h))$ et la difficulté est d'obtenir une minoration.

On est donc naturellement conduit à essayer d'approcher u_{tA} par une approximation BKW u_{tA}^{BKW} dans un ouvert $\omega \subset \omega_0$. Ce problème a été étudié dans [HE-SJ]₃. On y démontre l'existence de solutions BKW pour $|t| < t_0$ dans des voisinages ouverts de géodésiques mais sous des hypothèses d'analyticité sur A ou B qui sont exclues dans notre cas puisque B est à support compact. Toutefois quand on se restreint à des t vérifiant:

$$|t| \leq C(-h \text{Log } h)^{1/2} \quad (4.2.7)$$

on a montré l'existence d'une solution BKW de la forme:

$$u_{tA}^{\text{BKW}} = h^{-n/4} a_t(x, h) \exp - \Psi_t(x)/h \quad (4.2.8)$$

telle que:

$$u_{tA} - u_{tA}^{\text{BKW}} = O(h^\infty) \exp - \text{Re } \Psi_t(x)/h \quad (4.2.9)$$

dans des ouverts ω tels que tout point de ω est relié à y par une unique géodésique minimale pour la métrique d'Agmon. Comme dans [HE-SJ]₂ (Sect. 5.4), on montre que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dans toute boule } \omega_\varepsilon^0 = B_{d\nu}(x, \varepsilon) \text{ avec } \varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ \text{un ouvert } \omega_\varepsilon \text{ tel que (4.2.9) soit vérifiée et } B \neq 0. \end{array} \right\} \quad (4.2.10)$$

Rappelons que $\Psi_t(x)$ est définie dans [HE-SJ]₃ comme la réalisation d'une série formelle en t :

$$\Psi_t(x) = d_\nu(x, y) + it\Psi^1(x) + O(t^2), \quad (4.2.11)$$

où Ψ_1 vérifie (cf. [HE-SJ]₃, (2.26))

$$2(\nabla d + A)\nabla \Psi^1 = 0. \quad (4.2.12)$$

Le symbole principal $a_t^0(x)$ est également défini comme la réalisation d'une série formelle:

$$a_t^0(x) = a_0^0(x) + O(t)$$

où $a_0^0(x)$ est l'amplitude trouvée dans le cas sans champ magnétique. Compte-tenu de (4.2.9), on commence par calculer:

$$g(t, x, h) = \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0^{\text{BKW}}}{u_0^{\text{BKW}}} \right) u_{tA}^{\text{BKW}}$$

dans $L^2(\omega)$.

On trouve

$$g(t, x, h) = h^{-n/4} \exp(-\Psi_t(x)/h) a^t(x, h) \left((\nabla \Psi_t - itA - \nabla \Psi_0) + h \left(\frac{\nabla a^t}{a^t} - \frac{\nabla a^0}{a^0} \right) \right)$$

$$g(t, x, h) = th^{-n/4} \exp(-\Psi_t(x)/h) a^t(x, h) [i(\nabla \Psi_1 - A) + O(h) + O(t)].$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} & \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) u_{tA} \\ &= h^{-n/4} e^{-\Psi_t(x)/h} a^t(x, h) [t[i(\nabla \Psi_1 - A) + O(h) + O(t)] + O(h^\infty)] \end{aligned}$$

dans ω_ε donné en (4.2.10).

Quitte à restreindre ω_ε en ω'_ε , on peut supposer que $(\nabla \Psi^1 - A)$ est différent de zéro, car sinon on aurait $A = \nabla \Psi^1$ dans ω_ε et donc $B = 0$ dans ω_ε . On sait que pour h assez petit $a^t(x, h) \neq 0$ et on a montré finalement l'existence dans toute boule $B_{d_V}(x, \varepsilon)$ d'une boule ω'_ε telle que

$$\left\| \left(h\nabla - itA - h \frac{\nabla u_0}{u_0} \right) u_{tA} \right\|_{L^2(\omega'_\varepsilon)}^2 \geq C(|t| + O(h^\infty))^2 \exp(-2(\tilde{S}_0 + \eta(\varepsilon))/h)$$

où $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et pour $|t|$ satisfaisant (4.2.7) et $h \in]0, h_0]$ h_0 assez petit.

On a donc finalement démontré compte tenu de (4.2.5) le:

Théorème 4.2.2. *Sous les hypothèses (4.0.1) à (4.0.7), on a: $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \forall C_0, \exists h_0 > 0, \exists C_1$ tel que si*

$$h^N \leq |t| \leq C_0(-h \log h)^{1/2}, h \in]0, h_0] \tag{4.2.13}$$

on a:

$$\lambda_t(h) - \lambda_0(h) \geq C_1 |t|^2 \exp \left[-\frac{2(\tilde{S}_0 + \varepsilon)}{h} \right]. \tag{4.2.14}$$

Remarque 4.2.3. L'hypothèse (4.2.13) semble technique. On pourrait l'affaiblir si on avait par exemple un résultat a priori de monotonie par rapport à t .

5. Remarques sur le paramagnétisme

5.0. Introduction

Comme application de la Sect. 4, on va étudier la non validité ou la validité de la conjecture paramagnétique formulée par Høegreave-Schrader-Seiler dans [HO-SCH-SE]. On se limitera à une discussion du cas $n = 2$ et on donnera un éclairage nouveau au contre-exemple de Avron et Simon [A-SI] en prenant le point de vue semi-classique.

Considérons l'opérateur de Dirac dans R^2 (avec champ magnétique):

$$D(A)(h) = \sum_{j=1}^2 \sigma_j (hD_{x_j} - A_j), \quad (5.1)$$

où σ_j sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

qui est un opérateur autoadjoint dans $L^2(R^2) \otimes C^2$.

Classiquement, on a:

$$(D(A)(h))^2 = \left(\sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2 \right) I + h \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

où $B(x) = (\partial_{x_2} A_1 - \partial_{x_1} A_2)$.

On prend un potentiel V vérifiant (1.1) et on s'interroge sur la validité de l'inégalité paramagnétique:

$$\inf \text{Spectre}((D(A)(h))^2 + V \cdot I) \leq \inf \text{Spectre}(-h^2 \Delta^2 + V). \quad (5.3)$$

Compte-tenu de (5.2), il s'agit de montrer que si on désigne par $\lambda^0(h)$ la première valeur propre de $(-h^2 \Delta^2 + V)$ et si on désigne par $\lambda_{A,V}^0, \pm(h)$ la première valeur propre de $(\sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2 \pm hB + V)$, on a

$$\inf(\lambda_{A,V}^0, \pm(h), \lambda_{0,V}^0) \leq \lambda_{0,V}^0(h). \quad (5.4)$$

Cette inégalité est dans le sens opposé de celle observée dans les paragraphes précédents à savoir:

$$\lambda_{A,V}^0(h) \geq \lambda_{0,V}^0(h) \quad (\text{cf. 2.3}). \quad (5.5)$$

On va donner 2 exemples opposés. Le premier, dans l'esprit d'un théorème de Lieb (dont la démonstration est donnée dans [A-H-S]₁), est un cas où cette inégalité est vérifiée pour h assez petit. Mentionnons également d'autres exemples donnés dans [A-SE].

Le deuxième, dans l'esprit du contre-exemple de Avron-Simon [A-SI], va mettre en jeu l'effet d'Aharonov-Bohm, comme l'avaient d'ailleurs souligné ces auteurs.

5.1. Une inégalité paramagnétique: le théorème de Lieb revisité

On va démontrer le théorème suivant:

Théorème 5.1.1. *On suppose que, dans R^2 , on a:*

$$V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty, \quad |B(x)| \leq C(|V(x) - C|), \quad (5.1.1)$$

$$V \text{ admet un unique minimum non dégénéré en } 0, \quad (5.1.2)$$

$$B(0) > 0. \quad (5.1.3)$$

Alors il existe h_0 tel que pour $h \in]0, h_0]$, on a :

$$\lambda_{A, \bar{v}}^0(h) \leq \lambda_V^0(h). \tag{5.1.4}$$

Démonstration. Elle est immédiate en utilisant l'approximation par un oscillateur harmonique avec champ magnétique constant égal à $B(0)$ (cf. [SI]₁, [HE-SJ]₁, [HE-SJ]₃).

5.2. Inégalité paramagnétique et effet d'Aharonov-Bohm

On se place maintenant dans le cadre des hypothèses de la Sect. 4.1 où on a montré en (4.1.1) que :

$$\begin{aligned} \lambda_{tA, v}^0(h) - \lambda_{0, v}(h) &= h^{1/2} \left(1 - \cos \frac{t\Phi}{h} \right) a(h) \exp(-S_1/h) \\ &+ O(\exp(-S_1/h - \varepsilon_0/h)). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

On remarque alors que les opérateurs

$$\sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2 + V(x) \pm hB(x)$$

diffèrent de

$$\sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2 + V(x)$$

par une perturbation $hB(x)$ à support dans $B(0, \delta)$ ce qui conduit à une modification de la première valeur propre de l'ordre de

$$O_\varepsilon(\exp(-2d_V(y, \text{supp } B)/h + \varepsilon/h)) \quad \text{c'est à dire} \quad O_\varepsilon(\exp(-2(S_0 - \varepsilon)/h)).$$

Compte-tenu de l'inégalité $S_1 < 2S_0$, on a donc le

Théorème 5.2.1. *Sous les hypothèses du théorème (4.1.1), on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{tA, v}^\pm(h) - \lambda_{0, v}(h) &= h^{1/2} \left(1 - \cos \frac{t\Phi}{h} \right) a(h) \exp(-S_1/h) \\ &+ O_\pm(\exp - ((S_1 + \varepsilon_0)(h))) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

avec $a(h) = a_0 + O(h)$, $a_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, 0 uniforme par rapport à t .

Il est clair que (5.2.2) contredit l'inégalité paramagnétique dès que $(1 - \cos t\Phi/h) > \varepsilon_1 > 0$.

Bibliographie

[AH-BO] Aharonov, Y., Bohm, D.: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. Phys. Rev. **115**, 485–491 (1959)

[A-H-S] Avron, J., Herbst, I., Simon, B.: [1] Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. Duke Math. J. **45**, 847–884 (1978)

[2] Schrödinger operators with magnetic fields. II. Separation of the center of mass in homogeneous magnetic fields. Ann. Phys. **114**, 431–451 (1978)

[3] Schrödinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic fields. Commun. Math. Phys. **79**, 529–572 (1981)

- [A-SE] Avron, J., Seiler, R.: Paramagnetism for non-relativistic electrons and euclidean massless Dirac particles. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 931–934 (1979)
- [A-SI] Avron, J., Simon, B.: A counter-example to the paramagnetic conjecture. *Phys. Lett.* **75 A**, 41–42 (1979)
- [BE] Berry, M.: The Aharonov-Bohm effect is real physics not ideal physics. In: *Fundamental aspects of quantum theory*. New York: Plenum Press 1986, Nato ASI Series **144**: 319–320
- [C-F-K-S] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W., Simon, B.: Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry. *Texts and monographs in Physics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1987
- [G-G-J] Graffi, S., Grecchi, V., Jona-Lasinio, G.: Tunneling instability vis perturbation theory. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 2935–2944 (1984)
- [HE] Helffer, B.: Sur l'équation de Schrödinger avec champ magnétique. Exposé n° 10 au séminaire EDP de l'école Polytechnique, pp. 86–87
- [HE-SJ] Helffer, B., Sjostrand, J.: [1] Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Commun. PDE* **9**(4), 337–408 (1984) (annoncé aux actes du colloque de saint Jean de Monts en Juin 1983)
[2] Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire-Symétries-Perturbations, *Ann. de l'Inst. Henr. Poincaré (section Physique théorique)* **42**, 127–212 (1985)
[3] Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique. A paraître *Annales de l'ENS de Pise* 88
- [H-S-S] Høegreave, H., Schrader, R., Seiler, R.: A conjecture on the spinor functional determinant. *Nucl. Phys. B* **142**, 525 (1978)
- [HU] Hunziker, W.: Schrödinger operators with electric or magnetic fields. *Proc. Int. Conf. in Math. Phys., Lausanne, Lecture Notes in Physics*, Vol. 116. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
- [J-M-S] Jona-Lasinio, G., Martinelli, F., Scoppola, E.: New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics. I. Multiple tunneling in one dimension. *Commun. Math. Phys.* **80**, 223 (1981)
- [KA] Kato, T.: *Israel J. Math.* **13**, 125–174 (1972)
- [LA-O'CA] Lavine, R., O'Carroll, M.: Ground state properties and lower bounds on energy levels of a particle in a uniform magnetic field and external potential. *J. Math. Phys.* **18**, 1908–1912 (1977)
- [OU] Outassourt, A.: Analyse semiclassique pour des opérateurs de Schrödinger avec potential périodique. *J. Funct. Anal.* **72**, 65–94 (1987)
- [PE] Peshkin, M.: Aharonov-Bohm effect in bound states. *Phys. Rev. A* **23**, 360 (1981)
- [RE-SI] Reed, M., Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics*, Vol. IV. New York: Academic Press 1978
- [SI] Simon, B.: [1] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. I. Non-degenerate minima: asymptotic expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré* **38**, 295–307 (1983)
[2] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. II. Tunneling. *Ann. Math.* **120**, 89–118 (1984)
[3] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. III. Width of the ground state band in strongly coupled solids. *Ann. Phys.* **158**, 415–420 (1984)
[4] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. IV. The flea of the elephant. *J. Funct. Anal.* **63**, 123–136 (1985)

Communicated by B. Simon

Reçu le 8 mars 1988; révisé le 3 mai 1988

