Commun. math. Phys. 30, 303–334 (1973)

Zur Boltzmanngleichung

Rolf Bodmer
Seminar für theoretische Physik, E.T.H., Zürich, Schweiz

Received January 10, 1973

Abstract. The existence theory for the nonlinear Boltzmann equation is discussed for an infinite region in the spatially homogeneous case. We show that the solution is given by a nonlinear contraction semigroup. It is found that the H-theorem holds and that the system approaches equilibrium.

1. Einleitung

Diese Arbeit beruht im wesentlichen auf zwei Sätzen. Der erste ist ein Existenzsatz für die Lösung der Boltzmanngleichung für Wahrscheinlichkeitsmaße von Povzner [1]. Der zweite, der den Namen „Fortpflanzung des Chaos" trägt, beschreibt den Zusammenhang zwischen der Lösung der Boltzmanngleichung und gewissen Lösungen der zugehörigen Mastergleichungen. Grünbaum [2] hat diesen Satz unter den Annahmen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Boltzmanngleichung für Anfangsverteilungen, welche Wahrscheinlichkeitsmaße mit endlicher Energiedichte sind, und der differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung von der Anfangsbedingung bewiesen. Wir haben ähnliche Voraussetzungen gefunden, die sich in unserem Fall verifizieren lassen und die einen modifizierten Beweis des Theorems erlauben.

Die Zeitevolution der Mastergleichung respektiert die gewöhnliche Ordnungsrelation (Lemma 2) auf der Menge der Verteilungsfunktionen. Die Lösung der Boltzmanngleichung läßt sich wegen der „Fortpflanzung des Chaos" durch gewisse Lösungen der zugeordneten Mastergleichungen approximieren, so daß diese Ordnungsrelation auch von der nach Povzner [1] konstruierten Zeitevolution U der Boltzmanngleichung respektiert wird. Diese Eigenschaft und die Erhaltungssätze für Masse und Energie haben zur Folge, daß die Zeitevolution U bezüglich der Masse-(bzw. Energie-)Halbnorm kontrahierend ist. Schließlich ist U eine nichtlineare Kontraktionshalbgruppe [3]. Dieses Resultat erlaubt es, zu beweisen, daß die Entropie als Funktion der Zeit monoton wachsend ist und daß die Verteilungsfunktion $U_t f$ für jede Anfangsverteilung f mit endlicher Masse- und Energiedichte im Limes $t \to \infty$ gegen eine stationäre Verteilung konvergiert. Unter geeigneten Voraussetzungen über den differentiellen Wirkungsquerschnitt (Bemerkungen zu Satz 7) ist die Maxwellverteilung die einzige stationäre Lösung der Boltzmanngleichung.

2. Existenzsatz von Povzner

Zuerst wollen wir an einige Eigenschaften des Stoßoperators erinnern und die Annahmen über den differentiellen Wirkungsquerschnitt formulieren. Sei $f_t(v)$ $(t \in R^+, v \in R^3)$ die Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeiten zur Zeit t. Der Stoßoperator $\hat{B}$ hat die Form:

$$(\hat{B}f)(v_1) \equiv \int_{S^2 \times R^3} |v_1 - v_2| I(v_1, v_2, e)(f(\tilde{v}_1) f(\tilde{v}_2) - f(v_1) f(v_2)) d^2 e\, d^3 v_2 . \tag{1}$$

Es bezeichnet I den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Zweierstöße, welche durch die involutive Abbildung

$$T: Z \equiv R^3 \times R^3 \times S^2 \to Z, \qquad (v_1, v_2, e) \mapsto (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{e}),$$

$$\tilde{v}_1 \equiv \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} e, \qquad \tilde{v}_2 \equiv \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{|v_1 - v_2|}{2} e,$$

$$\tilde{e} \equiv \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|} \quad \text{falls} \quad v_1 \neq v_2 \quad \text{und} \quad \tilde{e} = e \quad \text{falls} \quad v_1 = v_2$$

($S^2 = 2$-dimensionale Einheitssphäre) beschrieben werden; dabei sind (v_1, v_2) (bzw. $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$) die Geschwindigkeiten der Teilchen vor (bzw. nach) dem Stoß, e (bzw. $\tilde{e}$) die Richtung der Relativbewegung nach (bzw. vor) dem Stoß. $\Pi: Z \to Z$, $(v_1, v_2, e) \mapsto (v_2, v_1, -e)$ sei die Vertauschung der beiden stoßenden Teilchen. Es gilt:

$$T\Pi = \Pi T . \tag{2}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $z \equiv (v_1, v_2, e)$. I soll die folgenden Symmetrien besitzen:

$$I(Tz) = I(\Pi z) = I(z) \quad \text{für alle} \quad z \in Z . \tag{3}$$

Ferner treffen wir über I die Annahmen:

$$\text{Die Abbildung } z \mapsto I(z) \text{ sei universell meßbar} . \tag{4}$$

$$\int_{S^2} I(v_1, v_2, e)\, d^2 e \leqq c(1 + |v_1 - v_2|^{-1}) \quad \text{für alle} \quad v_1, v_2 \in R^3 . \tag{5}$$

$$\text{Die Abbildung } R^6 \to L^1(S^2), (v_1, v_2) \mapsto |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, \cdot) \text{ sei stetig.} \tag{6}$$

Die Bedingung (6) wird nur für den Beweis des Satzes 2 („Fortpflanzung des Chaos") verwendet. Wir definieren die Menge $\hat{S}$ der Anfangsverteilungen: $\hat{S} \equiv \{f \in L^1(R^3) : f \geqq 0,\ \hat{\sigma}_2(f) < \infty\}$. Dabei ist

$\hat{\sigma}_2(f) \equiv \int^* v^2 \, |f(v)| \, d^3 v$ die Energie-Halbnorm. $\hat{\sigma}_1(f) \equiv \int^* |v| \, |f(v)| \, d^3 v$. Die Boltzmanngleichung lautet im räumlich homogenen Fall:

$$\dot{f}_t = \hat{B} f_t . \tag{7}$$

Der Stoßoperator $\hat{B}$ erfüllt wegen (1), (3), (5) die Ungleichung:

$$\|\hat{B} f\|_1 \leqq c(\|f\|_1^2 + 2\hat{\sigma}_1(f) \|f\|_1) \leqq c(2\|f\|_1^2 + \|f\|_1 \hat{\sigma}_2(f)) \text{ für alle } f \in \hat{S}. \tag{8}$$

$\hat{B}$ ist wohldefiniert als Abbildung von $\hat{S}$ in $L^1(R^3)$. Sei τ_w die Translation $(\tau_w f)(v) \equiv f(v - w)$ für $f \in L^1(R^3)$. Der Stoßoperator vertauscht (1), (2), (3) zufolge mit τ_w:

$$\tau_w \hat{B} f = \hat{B} \tau_w f \quad \text{für alle} \quad w \in R^3, \quad \text{alle} \quad f \in \hat{S} . \tag{9}$$

Die Symmetrien (3) von I implizieren die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &\int (\hat{B} f)(v_1) \, \varphi(v_1) \, d^3 v_1 \\ &\quad = -\tfrac{1}{4} \int |v_1 - v_2| \, I(v_1, v_2, e) \, (\varphi(\tilde{v}_1) + \varphi(\tilde{v}_2) - \varphi(v_1) - \varphi(v_2)) \\ &\qquad \cdot (f(\tilde{v}_1) \, f(\tilde{v}_2) - f(v_1) \, f(v_2)) \, d^2 e \, d^3 v_1 \, d^3 v_2 \\ &\quad = \int |v_1 - v_2| \, I(v_1, v_2, e) \, f(v_1) \, f(v_2) \, (\varphi(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1)) \, d^2 e \, d^3 v_1 \, d^3 v_2 . \end{aligned} \tag{10}$$

(10) gilt für jede stetige, beschränkte Funktion $\varphi \in C^b(R^3)$.

$M^1(R^3)$ sei der Banachraum der beschränkten Radon-Maße über R^3 mit der Norm $\|\mu\|_1 \equiv \int d|\mu|(v)$, $K(R^3)$ der topologische Vektorraum der stetigen Funktionen über R^3 mit kompaktem Träger [4]. Wir definieren: $S \equiv \{\mu \in M^1(R^3) : \mu \geqq 0, \sigma_2(\mu) < \infty\}$ mit $\sigma_2(\mu) \equiv \int^* v^2 \, d|\mu|(v)$; $\sigma_1(\mu) \equiv \int^* |v| \, d|\mu|(v)$. Der Stoßoperator B wird als Abbildung von S in $M^1(R^3)$ definiert:

$$\begin{aligned} \langle B\mu, \varphi \rangle \equiv \int |v_1 - v_2| \, I(v_1, v_2, e) \, (\varphi(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1)) \, d^2 e \, d\mu(v_1) \, d\mu(v_2) \\ \text{für alle} \quad \varphi \in K(R^3) . \end{aligned} \tag{11}$$

B erfüllt die Ungleichung:

$$\|B\mu\|_1 \leqq c(\|\mu\|_1^2 + 2\sigma_1(\mu) \|\mu\|_1) \leqq c(2\|\mu\|_1^2 + \|\mu\|_1 \sigma_2(\mu)) \text{ für alle } \mu \in S , \tag{12}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \langle B\mu, \varphi \rangle = \tfrac{1}{2} \int |v_1 - v_2| I(v_1, v_2, e) (\varphi(\tilde{v}_1) + \varphi(\tilde{v}_2) - \varphi(v_1) - \varphi(v_2)) d^2 e \, d\mu(v_1) d\mu(v_2) \\ \text{für alle} \quad \varphi \in C^b(R^3) . \end{aligned} \tag{13}$$

Man ordnet jeder Äquivalenzklasse lokal Lebesgue-integrierbarer Funktionen f ein bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetiges Maß $\underline{f}$ zu: $\imath : L^1_{\text{loc}}(R^3) \to M(R^3)$, $f \mapsto \underline{f}$ mit $\underline{f} = f \cdot$(Lebesguemaß); d. h. $\langle \underline{f}, \varphi \rangle \equiv \int f(v) \, \varphi(v) \, d^3 v$ für alle $\varphi \in K(R^3)$. Es ist $\|f\|_{L^1} = \|\underline{f}\|_{M^1}$ für alle $f \in L^1(R^3)$; analoge Relationen gelten für die Halbnormen $(\hat{\sigma}_1, \sigma_1)$,

$(\hat{\sigma}_2, \sigma_2)$. Die Definitionen der Stoßoperatoren $\hat{B}$ und B in (1) und (11) sind miteinander verträglich:

$$\imath(\hat{B}f) = B\underline{f} \quad \text{für alle} \quad f \in \hat{S}. \tag{14}$$

Satz 1 (Povzner [1]). a) *Für jedes $\mu \in S$ existiert eine einparametrige Schar $\{\mu_t\}_{t \in R^+}$ von Radon-Maßen $\mu_t \in S$ mit den Eigenschaften:*

$$\|\mu_t\|_1 = \|\mu\|_1, \quad \sigma_2(\mu_t) \leqq \sigma_2(\mu) \quad \textit{für alle} \quad t \in R^+, \tag{15}$$

$$\langle \mu_t, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle + \int_0^t \langle B\mu_{t'}, \varphi \rangle \, dt' \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in K(R^3), \quad t \in R^+. \tag{16}$$

b) *Die Abbildung $t \mapsto \mu_t$ ist in der vaguen Topologie von $M^1(R^3)$ stetig; d. h., die Abbildung $t \mapsto \langle \mu_t, \varphi \rangle$ ist für jedes $\varphi \in K(R^3)$ stetig.*

c) *Falls wir $\mu \in S$ und $\sigma_4(\mu) \equiv \int^* |v|^4 \, d|\mu|(v) < \infty$ voraussetzen, so ist die Schar $\{\mu_t\}_{t \in R^+}$ durch (16) eindeutig bestimmt; ferner gilt: $\sigma_2(\mu_t) = \sigma_2(\mu)$ für alle $t \in R^+$ und die Abbildung $t \mapsto \sigma_4(\mu_t)$ ist lokal beschränkt in R^+.*

d) *Erfüllt die Anfangsverteilung $\mu \in S$, $\sigma_4(\mu) < \infty$ und ist μ bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig, so ist auch μ_t für alle $t \in R^+$ bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig.*

Es bezeichne $\chi_l (l \in R^+)$ die Funktion $\chi_l : R^+ \to R^+$ mit

$$\chi_l(r) \equiv \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad r \in (0, l] \\ \dfrac{l}{r}, & \text{falls} \quad r > l. \end{cases}$$

$I_l(v_1, v_2, e) \equiv I(v_1, v_2, e) \, \chi_l(|v_1 - v_2|)$ für alle $(v_1, v_2, e) \in Z$. B^l sei der zu I_l gehörende Stoßoperator. Dieser hat wieder die Eigenschaft (13). Wir erhalten für die fünf Stoßvarianten θ_i,

$$\begin{aligned} &\theta_i(v) \equiv \mathrm{pr}_i(v), \; i = 1, 2, 3 \; (\mathrm{pr}_i(v) \equiv i\text{-te Komponente von } v \in R^3), \\ &\theta_4(v) \equiv 1, \quad \theta_5(v) \equiv v^2: \end{aligned} \tag{17}$$

$$\langle B^l \mu, \theta_k \rangle = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, 5 \quad \text{und alle} \quad \mu \in S.$$

Gewisse Lösungen der Boltzmanngleichung (16) lassen sich durch Lösungen modifizierter Boltzmanngleichungen (mit beschränkten Stoßoperatoren B^l) approximieren. Diese Tatsache wird durch das folgende Lemma beschrieben:

Lemma 1 (Povzner). a) *Es existiert für jedes $l \in R^+$ und jedes $\mu \in S$ genau eine Schar von Radon-Maßen $\mu_t^l \in S$ mit den Eigenschaften:*

$$\|\mu_t^l\|_1 = \|\mu\|_1, \quad \sigma_2(\mu_t^l) = \sigma_2(\mu) \quad \textit{für alle} \quad t \in R^+,$$

$$\langle \mu_t^l, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle + \int_0^t \langle B^l \mu_{t'}^l, \varphi \rangle \, dt' \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in K(R^3) \quad \textit{und alle} \quad t \in R^+.$$

b) *Es gibt eine Folge positiver Zahlen* l_n *mit* $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} \langle \mu_t^{l_n}, \varphi \rangle = \langle \mu_t, \varphi \rangle$ *für alle* $\varphi \in K(R^3)$; *dabei ist* $\{\mu_t\}_{t\in R^+}$ *die in Satz 1 konstruierte Schar.*

3. Mastergleichung und Boltzmanngleichung

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Mastergleichung und der Boltzmanngleichung her. Jedem Stoßoperator B^l ordnen wir eine Folge von linearen Stoßoperatoren A_n^l zu. A_n^l wird auf der Menge $M^1(R^{3n})$ der beschränkten Radon-Maße über R^{3n} definiert:

$$\langle A_n^l v, \psi \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta|\, I_l(v_\alpha, v_\beta, e)\, (\psi(\hat{\underline{v}}_{\alpha\beta}) - \psi(\underline{v}))\, d^2 e\, dv(\underline{v}) \tag{18}$$

$$\text{für alle} \quad v \in M^1(R^{3n}) \quad \text{und alle} \quad \psi \in K(R^{3n}) \quad (\text{bzw. } C^b(R^{3n})).$$

In dieser Formel ist $\hat{\underline{v}}_{\alpha\beta} \equiv (v_1, \ldots, \tilde{v}_\alpha, \ldots, \tilde{v}_\beta, \ldots, v_n), \alpha < \beta$, das Resultat eines Zweierstoßes $(v_\alpha, v_\beta) \to (\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)$ mit $e \equiv e_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{\tilde{v}_\alpha - \tilde{v}_\beta}{|\tilde{v}_\alpha - \tilde{v}_\beta|}$. Die Mastergleichung lautet für Wahrscheinlichkeitsmaße v auf R^{3n}:

$$\dot{v}_t = A_n^l v_t . \tag{19}$$

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus der Beschränktheit der Operatoren A_n^l und aus der Masseerhaltung:

Lemma 2. *Das Anfangswertproblem* $\dot{v}_t = A_n^l v_t$, $v_0 = v$ *besitzt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß* $v \in M^1(R^{3n})$ *genau eine Lösung* $\{v_t\}_{t\in R^+}$; *ferner ist* $v_t \geqq 0$, $\|v_t\|_1 = \|v\|_1$ *für alle* $t \in R^+$.

Für Radon-Maße auf R^{3n} gilt $v_1 \leqq v_2$ genau, wenn $\langle v_1, \psi \rangle \leqq \langle v_2, \psi \rangle$ für alle $\psi \in K^+(R^{3n})$ erfüllt ist.

Der Operator A_n^l läßt den Unterraum der (bezüglich der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$) symmetrischen Maße invariant; daher ist mit der Anfangsverteilung v auch v_t für alle $t \in R^+$ symmetrisch. Wir formulieren nun den Satz, den wir in der Einleitung „Fortpflanzung des Chaos" genannt haben.

Satz 2 (Grünbaum [2]). *Gegeben seien* $\mu \in S$ *und* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C^b(R^3)$. *Es bezeichne* $v_t^{(n)}$ *(Index* l *als Parameter weggelassen) die Lösung der Mastergleichung* (19) *mit der Anfangsbedingung* $v^{(n)} \equiv \mu \otimes \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ *(n-faches Tensorprodukt). Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_t^{(n)}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \rangle = \prod_{k=1}^{m} \langle \mu_t, \varphi_k \rangle \quad \textit{für alle } t \in R^+ ,$$

falls μ_t *die (gemäß Lemma 1a eindeutig bestimmte) Lösung der Boltzmanngleichung* $\dot{\mu}_t = B^l \mu_t$ *mit der Anfangsbedingung* $\mu_0 = \mu$ *bezeichnet.*

Lemma 2 impliziert: Die Zeitevolution $U_t^{l,n} \equiv \exp(tA_n^l)$ respektiert die gewöhnliche Ordnungsrelation auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße über R^{3n}. Satz 2 gestattet es, diese Eigenschaft auf die zu B^l gehörende Zeitevolution U^l zu übertragen. Grünbaum hat den Satz 2 unter den beiden folgenden Annahmen bewiesen:

1) Das Anfangswertproblem der Boltzmanngleichung hat für alle $\mu \in S$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\mu_t \in S$, $t \in R^+$.

2) Die Lösung μ_t hängt „differenzierbar" [2] von der Anfangsbedingung μ ab.

In unserem Fall ist B^l ein beschränkter (nichtlinearer) Operator; 1) ist eine Folge der Masse- und Energieerhaltung. Es ist uns nicht gelungen, die von Grünbaum [2] angegebene Glattheitseigenschaft 2) zu beweisen, hingegen eine leicht modifizierte Eigenschaft (Satz 8). Da Satz 2 für uns ein wesentliches Hilfsmittel ist, geben wir im Anhang 1 an, wie der Beweis in unserem Spezialfall vervollständigt werden kann.

4. Kontraktionshalbgruppe

Wir werden zeigen, daß die Lösung der Boltzmanngleichung (7) durch eine nichtlineare Kontraktionshalbgruppe gegeben ist. Zuerst ziehen wir einige Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2. Es bezeichne $U_t\mu$ die in Satz 1 für die Anfangsbedingung $\mu \in S$ konstruierte Lösung μ_t der Gleichung (16).

Lemma 3. *Die Ordnungsrelation* $\leqq$ *(*$\mu_1 \leqq \mu_2$ *genau, wenn* $\langle \mu_1, \varphi \rangle \leqq \langle \mu_2, \varphi \rangle$ *für alle* $\varphi \in K^+(R^3)$ *gilt) auf* S *ist mit der Zeitevolution* U *verträglich; d. h. aus* $\mu_1, \mu_2 \in S$ *und* $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2$ *folgt* $0 \leqq U_t\mu_1 \leqq U_t\mu_2$ *für alle* $t \in R^+$.

Beweis. $U_t^{l,n} v_i^{(n)}$ sei die Lösung der Gleichung $\dot{v}_t = A_n^l v_t$ mit der Anfangsbedingung $v_i^{(n)} \equiv \mu_i \otimes \mu_i \otimes \cdots \otimes \mu_i$, $i = 1, 2$ (n-faches Tensorprodukt). Lemma 2 impliziert: $0 \leqq U_t^{l,n} v_1^{(n)} \leqq U_t^{l,n} v_2^{(n)}$ für alle $t \in R^+$. Satz 2 ergibt für die Lösung $U_t^l \mu_i$ der Boltzmanngleichung $\dot{\mu}_t = B^l \mu_t$ mit der Anfangsbedingung μ_i $(i = 1, 2): 0 \leqq U_t^l \mu_1 \leqq U_t^l \mu_2$ für alle $t \in R^+$. Mit Hilfe von Lemma 1b folgt die behauptete Aussage.

Lemma 4. a) *U ist bezüglich der M^1-Norm kontrahierend; d. h.* $\|U_t\mu_1 - U_t\mu_2\|_1 \leqq \|\mu_1 - \mu_2\|_1$ *für alle* $t \in R^+$ *und alle* $\mu_1, \mu_2 \in S$.

b) *U ist ein Fluß auf* $S: U_0 = 1_S$, $U_s U_t = U_{s+t}$ *für alle* $s, t \in R^+$.

c) *Falls* $\mu \in S$ *bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig ist, so auch* $U_t\mu$ *für alle* $t \in R^+$.

Beweis. a) $M^1(R^3)$ ist ein Riesz-Raum [4]; daher existiert $\lambda_1 \equiv \inf(\mu_1, \mu_2)$ (bzw. $\lambda_2 \equiv \sup(\mu_1, \mu_2)$) in $M^1(R^3)$. Es gelten die Relationen:

(i) $|\mu_1 - \mu_2| = \sup(\mu_1, \mu_2) - \inf(\mu_1, \mu_2) = \lambda_2 - \lambda_1$,

(ii) $0 \leqq \lambda_1 \leqq \mu_i \leqq \lambda_2 \leqq \mu_1 + \mu_2, \quad i = 1, 2.$

Lemma 3 und (ii) ergeben: $0 \leqq U_t \lambda_1 \leqq U_t \mu_i \leqq U_t \lambda_2$, $i = 1, 2$. Damit und mit (i) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|U_t \mu_1 - U_t \mu_2\|_1 &= \int d \sup(U_t \mu_1, U_t \mu_2) - \int d \inf(U_t \mu_1, U_t \mu_2)\\ &\leqq \int d U_t \lambda_2 - \int d U_t \lambda_1\,;\end{aligned}$$

(i) und die Masseerhaltung (15) implizieren:

$$\int d U_t \lambda_2 - \int d U_t \lambda_1 = \int d\lambda_2 - \int d\lambda_1 = \int d|\mu_1 - \mu_2| = \|\mu_1 - \mu_2\|_1 .$$

b) Gegeben sei $\mu \in S$; wir definieren $g_n(v) \equiv \left(1 + \frac{1}{n} v^2\right)^{-1}$ und $\mu_n \equiv g_n \cdot \mu$.

Es ist $\sigma_4(\mu_n) = \int g_n(v)\, |v|^4\, d\mu(v) \leqq n\, \sigma_2(\mu) < \infty$. Aus der Eindeutigkeit (Satz 1c) der Lösung der Boltzmanngleichung (16) für die Anfangsbedingung $\mu_n \in S$ mit $\sigma_4(\mu_n) < \infty$ folgt: $U_s U_t \mu_n = U_{s+t} \mu_n$ für alle $n \in N$ und alle $s, t \in R^+$. Nun gilt:

$$\|U_{s+t}\, \mu - U_s\, U_t\, \mu\|_1 \leqq \|U_{s+t}\, \mu - U_{s+t}\, \mu_n\|_1 + \|U_s\, U_t\, \mu_n - U_s\, U_t\, \mu\|_1 .$$

Lemma 4a ergibt schließlich: $\|U_{t+s} \mu - U_t\, U_s \mu\|_1 \leqq 2\, \|\mu - \mu_n\|_1 \leqq \frac{2}{n}\, \sigma_2(\mu)$ für alle $n \in N$ und alle $s, t \in R^+$.

c) Wir setzen nun voraus, daß $\mu \in S$ bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig ist. Die Definition $\mu_n \equiv g_n \cdot \mu$ und Satz 1d zeigen, daß auch μ_n und $U_t \mu_n$ bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig sind. Der Definition von μ_n zufolge ist $0 \leqq \mu_n \leqq \mu$ für alle $n \in N$; Lemma 3 impliziert $0 \leqq U_t \mu_n \leqq U_t \mu$ für alle $n \in N$. Es folgt ([5], Chapitre V, § 5.5, Corollaire 1 du théorème 2): $\sup_{n \in N} U_t \mu_n$ ist bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetig.

Es bleibt zu beweisen: $\sup_{n \in N} U_t \mu_n = U_t \mu$. Dies ist eine Folge der Eigenschaften:

1) $0 \leqq U_t \mu_m \leqq U_t \mu_n \leqq U_t \mu$ für $m < n$.

2) $\lim_{n \to \infty} \|U_t \mu_n - U_t \mu\|_1 \leqq \lim_{n \to \infty} \|\mu_n - \mu\|_1 = 0.$

Lemma 5. a) *Die Energiedichte bleibt (unter der Zeitevolution) erhalten: $\sigma_2(U_t \mu) = \sigma_2(\mu)$ für alle $\mu \in S$ und alle $t \in R^+$.*

b) *U ist auch bezüglich der Energiehalbnorm σ_2 kontrahierend: $\sigma_2(U_t \mu_1 - U_t \mu_2) \leqq \sigma_2(\mu_1 - \mu_2)$ für alle $\mu_1, \mu_2 \in S$, für alle $t \in R^+$.*

Beweis. a) Aus (15) folgt: $\sigma_2(U_t \mu) \leqq \sigma_2(\mu)$, und es bleibt $\sigma_2(U_t \mu) \geqq \sigma_2(\mu)$ zu beweisen. $\mu_n \equiv g_n \cdot \mu$ sei wie in Lemma 4b gewählt. Lemma 3 und Satz 1c implizieren: $\sigma_2(U_t\mu) \geqq \sigma_2(U_t\mu_n) = \sigma_2(\mu_n)$ für alle $n \in N$. Das Theorem von Lebesgue über dominante Konvergenz ergibt: $\lim_{n\to\infty} \sigma_2(\mu_n) = \sigma_2(\mu)$; daraus erhalten wir die gewünschte Ungleichung: $\sigma_2(U_t\mu) \geqq \sigma_2(\mu)$.

b) wird mit Hilfe von a) und Lemma 3 bewiesen. Die Methode ist dem Beweis des Lemmas 4a analog.

Wir definieren: $S_a \equiv \{\mu \in S : \sigma_2(\mu) \leqq a\}$ und $\varrho(\mu_1, \mu_2) \equiv \|\mu_1 - \mu_2\|_1$. (S_a, ϱ) ist ein vollständiger metrischer Raum. Es bezeichne $\mathfrak{F}(S_a)$ die Menge aller Abbildungen von S_a in sich.

Satz 3. *Die nach Povzner in Satz 1 konstruierte Zeitevolution U der Boltzmanngleichung definiert eine Halbgruppe U^a der Klasse $(C, S)'$ [3] auf S_a (kurz: Kontraktionshalbgruppe):*

$$U^a : R^+ \to \mathfrak{F}(S_a), \quad t \mapsto U_t^a \equiv U_t|_{S_a},$$

$$U_0^a \mu = \mu \text{ und } U_s^a U_t^a \mu = U_{s+t}^a \mu \text{ für alle } s, t \in R^+. \quad \text{(Halbgruppe)} \tag{20}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \|U_t^a \mu - \mu\|_1 = 0 \text{ für alle } \mu \in S_a. \quad \text{(Stetigkeit)} \tag{21}$$

$$\|U_t^a \mu_1 - U_t^a \mu_2\|_1 \leqq \|\mu_1 - \mu_2\|_1 \text{ für alle } \mu_1, \mu_2 \in S_a, \text{ für alle } t \in R^+. \quad \text{(Kontraktion)} \tag{22}$$

Differenzierbarkeit: Die Abbildung $R^+ \to (M^1(R^3), \| \;\|_1)$, $t \mapsto U_t^a \mu$ ist für jedes $\mu \in D_a$ stetig differenzierbar; D_a ist dicht in S_a. (23)

Die infinitesimale Erzeugende B_a der Kontraktionshalbgruppe U^a wird definiert durch:

$$D_a \equiv \{\mu \in S_a : \text{die Abbildung } R^+ \to (M^1(R^3), \| \;\|_1), t \mapsto U_t^a \mu \text{ ist stetig differenzierbar}\}, \quad B_a \mu \equiv \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(U_t^a \mu - \mu) \text{ für } \mu \in D_a.$$

Zusatz. a) *Die infinitesimale Erzeugende B_a der Kontraktionshalbgruppe U^a ist auf S_a definiert und ist gleich der Restriktion von B auf S_a:*

$$D_a = S_a, \quad B_a = B|_{S_a}. \tag{24}$$

b) *U ist eine Kontraktionshalbgruppe auf S. Die Eigenschaften* (20), (21), (22) *gelten auf S; die infinitesimale Erzeugende von U (auf S) ist B:*

$$\frac{d}{dt} U_t \mu = B U_t \mu \quad \text{für alle} \quad \mu \in S \quad \text{und alle} \quad t \in R^+. \tag{25}$$

c) *Masse und Energie bleiben unter U erhalten:*

$$\|U_t \mu\|_1 = \|\mu\|_1 \quad \text{für alle} \quad \mu \in S, \quad \text{für alle} \quad t \in R^+, \tag{26}$$

$$\sigma_2(U_t \mu) = \sigma_2(\mu) \quad \text{für alle} \quad \mu \in S, \quad \text{für alle} \quad t \in R^+. \tag{27}$$

d) *U ist stetig und kontrahierend bezüglich der Energiehalbnorm:*

$$\lim_{t \downarrow 0} \sigma_2(U_t \mu - \mu) = 0 \quad \textit{für alle} \quad \mu \in S\,, \tag{28}$$

$$\sigma_2(U_t \mu_1 - U_t \mu_2) \leqq \sigma_2(\mu_1 - \mu_2) \;\; \textit{für alle} \;\; \mu_1, \mu_2 \in S, \;\; \textit{für alle} \;\; t \in R^+\,. \tag{29}$$

Beweis (Satz 3 und Zusatz). U läßt S_a invariant. Die Relationen (20), (22), (26), (27), (29) sind eine Folge der Lemmata 4 und 5. Es genügt, zu beweisen, daß die folgenden vier Abbildungen für jedes $\mu \in S$ stetig sind:

(α) $\quad R^+ \to (M^1(R^3), \| \;\|_1), \quad t \mapsto U_t \mu\,,$

(β) $\quad R^+ \to (M^1(R^3), \sigma_1), \quad t \mapsto U_t \mu\,,$

(γ) $\quad R^+ \to (M^1(R^3), \| \;\|_1), \quad t \mapsto B U_t \mu\,,$

(δ) $\quad R^+ \to (M^1(R^3), \sigma_2), \quad t \mapsto U_t \mu\,.$

Denn aus (α) folgt (21); (γ) und (16) implizieren:

$$\langle U_t \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle + \int_0^t \langle B U_{t'} \mu, \varphi \rangle \, dt' = \langle \mu, \varphi \rangle + \left\langle \int_0^t B U_{t'} \mu \, dt', \varphi \right\rangle$$

$$\text{für alle} \quad \varphi \in K(R^3)\,;$$

d. h. $U_t \mu = \mu + \int_0^t B U_{t'} \mu \, dt'$ im Sinn der $\| \;\|_1$-Norm. Dieser Eigenschaft und (γ) zufolge ist die Abbildung $R^+ \to (M^1(R^3), \| \;\|_1)$, $t \mapsto U_t \mu$ stetig differenzierbar, und wir erhalten: $\frac{d}{dt} U_t \mu = B U_t \mu$ für alle $\mu \in S$ und für alle $t \in R^+$ $\left(\text{bzw.} \frac{d}{dt} U_t^a \mu = B_a U_t^a \mu \text{ für alle } \mu \in S_a, \text{ für alle } t \in R^+\right)$.

Bemerkung. Die Abbildung $R^+ \to R$, $t \mapsto \langle B U_t \mu, \varphi \rangle$ ist für jedes $\varphi \in K(R^3)$ Lebesgue-meßbar [1].

Beweis von (α), (β), (γ), (δ):

(α) Sei $t \geqq t_1 \geqq 0$; es folgt aus (12), (16): $|\langle U_t \mu, \varphi \rangle - \langle U_{t_1} \mu, \varphi \rangle| \leqq \int_{t_1}^t |\langle B U_{t'} \mu, \varphi \rangle| \, dt' \leqq c |t - t_1| \, \|\varphi\| \sup_{t' \in [t_1, t]} (2 \|U_{t'} \mu\|_1^2 + \|U_{t'} \mu\|_1 \, \sigma_2(U_{t'} \mu))$ für alle $\mu \in S$ und alle $\varphi \in K(R^3)$, falls wir $\|\varphi\| \equiv \sup_{v \in R^3} |\varphi(v)|$ definieren. Nun gilt auch $\|\mu\|_1 = \sup\{|\langle \mu, \varphi \rangle| : \varphi \in K(R^3), \|\varphi\| \leqq 1\}$; wir erhalten auf Grund der Masse- und Energieerhaltung:

$$\|U_t \mu - U_{t_1} \mu\|_1 \leqq c |t - t_1| \, (2 \|\mu\|_1^2 + \|\mu\|_1 \, \sigma_2(\mu))\,.$$

(β) Aus der Definition von $\tilde{v}_1$ folgt: $|\tilde{v}_1| \leqq |v_1| + |v_2|$ für alle $v_1, v_2 \in R^3$; (5) ergibt für eine von c abhängige Konstante c_1 ($\tilde{\theta}(v) \equiv |v|$):

$$\left|\int |v_1 - v_2| I(v_1, v_2, e)(\varphi(\tilde{v}_1)\tilde{\theta}(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1)\tilde{\theta}(v_1))\, d^2 e\right| \leqq \frac{c_1}{2} \|\varphi\| (2 + v_1^2 + v_2^2)$$

für alle $\varphi \in K(R^3)$ und alle $v_1, v_2 \in R^3$. Daraus folgt:

$|\langle B\mu, \varphi\tilde{\theta}\rangle| \leqq c_1 \|\varphi\| (\|\mu\|_1^2 + \|\mu\|_1 \sigma_2(\mu))$ für alle $\varphi \in K(R^3)$, für alle $\mu \in S$.

Wir schließen ähnlich wie in (α) und erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma_1(U_t\mu - U_{t_1}\mu) &= \sup\{|\langle U_t\mu - U_{t_1}\mu, \varphi\tilde{\theta}\rangle| : \varphi \in K(R^3), \|\varphi\| \leqq 1\} \\ &\leqq c_1 |t - t_1| (\|\mu\|_1^2 + \|\mu\|_1 \sigma_2(\mu)).\end{aligned}$$

(γ) Für alle $\varphi \in K(R^3)$ und alle $\mu \in S$ gilt: $|\langle BU_t\mu, \varphi\rangle - \langle BU_{t_1}\mu, \varphi\rangle|$ $\leqq \left|\int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)\, (\varphi(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1))\, d^2 e\, dU_t\mu(v_1)\, d(U_t\mu - U_{t_1}\mu)(v_2)\right|$ $+ \left|\int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)\, (\varphi(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1))\, d^2 e\, d(U_t\mu - U_{t_1}\mu)(v_1)\, dU_{t_1}\mu(v_2)\right|$. (5) impliziert die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}|\langle BU_t\mu, \varphi\rangle - \langle BU_{t_1}\mu, \varphi\rangle| &\leqq c\|\varphi\| \int (1 + |v_1 - v_2|)\, d|U_t\mu|(v_1)\, d|U_t\mu - U_{t_1}\mu|(v_2) \\ &\quad + c\|\varphi\| \int (1 + |v_1 - v_2|)\, d|U_t\mu - U_{t_1}\mu|(v_1)\, d|U_{t_1}\mu|(v_2) \\ &\leqq c\|\varphi\|\, \|U_t\mu - U_{t_1}\mu\|_1 (\|U_t\mu\|_1 + \|U_{t_1}\mu\|_1 + \sigma_1(U_t\mu) + \sigma_1(U_{t_1}\mu)) \\ &\quad + c\|\varphi\|\, \sigma_1(U_t\mu - U_{t_1}\mu)(\|U_t\mu\|_1 + \|U_{t_1}\mu\|_1).\end{aligned}$$

Wir erhalten mit der Masse- und Energieerhaltung und einer von c, $\|\mu\|_1$ und $\sigma_2(\mu)$ abhängigen Konstante $\tilde{c}$:

$$\|BU_t\mu - BU_{t_1}\mu\|_1 \leqq \tilde{c}(\|U_t\mu - U_{t_1}\mu\|_1 + \sigma_1(U_t\mu - U_{t_1}\mu)).$$

(δ) Die folgende Ungleichung ergibt sich wieder aus (5):

$$\begin{aligned}&\left|\int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)\, (\varphi(\tilde{v}_1)\, \theta_5(\tilde{v}_1) - \varphi(v_1)\, \theta_5(v_1))\, d^2 e\right| \\ &\leqq \frac{c}{2} \|\varphi\|\, (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1^2 v_2^2 + v_1^4 + v_2^4) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in K(R^3).\end{aligned}$$

Damit können wir $\langle B\mu, \varphi\theta_5\rangle$ abschätzen:

$$|\langle B\mu, \varphi\theta_5\rangle| \leqq c\|\varphi\| (\|\mu\|_1 \sigma_2(\mu) + \sigma_2(\mu)^2 + \|\mu\|_1 \sigma_4(\mu)) \text{ für alle } \varphi \in K(R^3), \text{ für alle } \mu \in \{v \in S : \sigma_4(v) < \infty\}.$$

Satz 1 (a und c) impliziert:

$$\begin{aligned}\sigma_2(U_t\mu - U_{t_1}\mu) &= \sup\{|\langle U_t\mu - U_{t_1}\mu, \varphi\theta_5\rangle| : \varphi \in K(R^3), \|\varphi\| \leqq 1\} \\ &\leqq c|t - t_1| (\|\mu\|_1 \sigma_2(\mu) + \sigma_2(\mu)^2 + \|\mu\|_1 \sup_{t' \in [0,T]} \sigma_4(U_{t'}\mu)) \text{ falls } t, t_1 \in [0, T] \\ &\quad \text{und} \quad \mu \in \{v \in S : \sigma_4(v) < \infty\}.\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$R^+ \to (M^1(R^3), \sigma_2),\ t \mapsto U_t\mu \quad \text{ist also für alle} \quad \mu \in \{v \in S : \sigma_4(v) < \infty\} \tag{i}$$

stetig.

Gegeben sei $\mu \in S$; wir definieren $g_n(v) \equiv \left(1 + \frac{1}{n} v^2\right)^{-1}$ und $\mu_n \equiv g_n \cdot \mu$. Die Folge $\{\mu_n\}_{n \in N}$ hat die Eigenschaften:

$$\sigma_4(\mu_n) < \infty \quad \text{für alle} \quad n \in N\,, \qquad \lim_{n \to \infty} \sigma_2(\mu_n - \mu) = 0\,. \tag{ii}$$

Aus Lemma 5b folgt:

$$\sigma_2(U_t\mu - \mu) \leqq 2\sigma_2(\mu - \mu_n) + \sigma_2(U_t\mu_n - \mu_n) \quad \text{für alle} \quad n \in N\,. \tag{iii}$$

Die gewünschte Aussage (δ) ergibt sich aus den Relationen (i), (ii) und (iii). Damit ist der Satz 3 (bzw. sein Zusatz) vollständig bewiesen.

Die Zeitevolution U besitzt die beiden folgenden, für Kontraktionshalbgruppen der Klasse $(C, S)'$ charakteristischen Eigenschaften:

Satz 4. a) *Sei $r \in R^+$; dann erfüllt der Stoßoperator B* (11) *für alle $\mu_1, \mu_2 \in S$ die Ungleichung:*

$$\|(r - B)\,\mu_1 - (r - B)\,\mu_2\|_1 \geqq r\,\|\mu_1 - \mu_2\|_1\,.$$

b) *Das Anfangswertproblem $\frac{d}{dt}\mu_t = B\mu_t,\ \mu_0 = \mu$ hat für jedes $\mu \in S$ genau eine stetig differenzierbare Lösung μ_t, $\mu_t \in S$, nämlich $\mu_t = U_t\mu$, $t \in R^+$.*

Beweis. Die Aussage a) ist eine Folge eines allgemeinen Satzes über Kontraktionshalbgruppen ([3], Theorem 2.3) und der Relation (24). b) beruht auf dem folgenden Lemma:

Lemma 6 (Dorroh [3]). *Sei $[a, b]$ ein Intervall in R, f eine in $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktion von $[a, b]$ in den Banachraum $(E, \|\ \|)$. Man definiere g auf $[a, b]$ durch $g(t) \equiv \|f(t)\|$. Dann ist g auf $[a, b]$ nicht zunehmend, genau dann, wenn für jedes $r \in R^+$ und alle $t \in [a, b]$*

$$\left\|r f(t) - \frac{d}{dt} f(t)\right\| \geqq r\,\|f(t)\|$$

gilt.

Beweis von b): $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ seien zwei stetig differenzierbare Lösungen des Anfangswertproblems $\frac{d}{dt}\mu(t) = B\mu(t)$, $\mu(0) = \mu$, $\mu \in S$; wir setzen: $f(t) \equiv \mu_1(t) - \mu_2(t)$. Für $t \in R^+$ und $r \in R^+$ gilt dann: $r f(t) - \frac{d}{dt} f(t) = (r - B)\,\mu_1(t) - (r - B)\,\mu_2(t)$. Die Eigenschaft a) impliziert:

$$\left\|r f(t) - \frac{d}{dt} f(t)\right\|_1 \geqq r\,\|f(t)\|_1 \quad \text{für alle} \quad t \in R^+ \quad \text{und alle} \quad r \in R^+\,;$$

Lemma 6 ergibt: $\|f(t)\|_1 = 0$ für alle $t \in R^+$.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer Spezialisierung der obigen Resultate abschließen. Dazu definieren wir die Zeitevolution $\hat{U}$ auf $\hat{S} \equiv \{f \in L^1(R^3) : f \geqq 0, \hat{\sigma}_2(f) < \infty\}$ durch $\underline{\hat{U}_t f} \equiv U_t \underline{f}$ für alle $t \in R^+$. Der zu $\hat{U}$ gehörende Stoßoperator $\hat{B}$ wurde in (1) definiert. Die ganze in diesem Abschnitt entwickelte Theorie (Satz 3, Zusatz und Satz 4) überträgt sich auf die Halbgruppe $\hat{U}$ und ihre infinitesimale Erzeugende $\hat{B}$. Der Grund dafür besteht darin, daß die kanonische Injektion $\imath : L^1(R^3) \to M^1(R^3)$, $f \mapsto \underline{f}$ alle betrachteten Relationen erhält: $\imath$ ist linear, zunehmend bezüglich $\leqq$ und erhält die Halbnormen $\| \ \|_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$; ferner bildet U jedes bezüglich dem Lebesguemaß absolut stetige Maß $\mu \in S$ in ein ebensolches Maß ab. Als Beispiel führen wir den folgenden Satz an:

Satz 5. a) *Das Anfangswertproblem* $\frac{d}{dt} f_t = \hat{B} f_t$, $f_0 = f$ *hat für jedes* $f \in \hat{S}$ *genau eine stetig differenzierbare Lösung* $f_t \in \hat{S}$, $t \in R^+$.

b) *Die Lösung* f_t *wird durch eine nichtlineare Kontraktionshalbgruppe* $\hat{U}$ *auf* $\hat{S}$ *gegeben:* $f_t = \hat{U}_t f$ *für* $f \in \hat{S}$ *und* $t \in R^+$.

Bemerkungen. Die Halbgruppe $\hat{U}$ läßt die Maxwellverteilung invariant: Aus $\omega(v) \equiv a_1 \exp(-a_2 v^2 + (b, v))$ mit $a_1, a_2 > 0, b \in R^3$ folgt:

$$\hat{U}_t \omega = \omega \quad \text{für alle} \quad t \in R^+ . \tag{30}$$

$\hat{U}$ vertauscht mit den Translationen $\tau_w, w \in R^3$:

$$\tau_w \hat{U}_t f = \hat{U}_t \tau_w f \quad \text{für alle} \quad f \in \hat{S}, t \in R^+, w \in R^3 . \tag{31}$$

Die Impuls(-dichte) $\pi_\alpha(f) \equiv \overset{*}{\int} \mathrm{pr}_\alpha(v)\, f(v)\, d^3 v$, $\alpha = 1, 2, 3$, bleibt unter $\hat{U}$ erhalten: $\pi_\alpha(\hat{U}_t f) = \pi_\alpha(f)$ für alle $f \in \hat{S}$, für alle $t \in R^+$. (32) ($\mathrm{pr}_\alpha(v) = \alpha$-te Komponente von $v \in R^3$.)

5. Das *H*-Theorem

Wir beginnen mit einigen Definitionen: $\hat{\Omega} \equiv \{f \in L^1(R^3) : f \geqq 0, \|f\|_1 = 1, \hat{\sigma}_2(f) < \infty\}$; es bezeichne ω_f die Maxwellverteilung, welche den Bedingungen $\|\omega_f\|_1 = \|f\|_1$, $\pi_\alpha(\omega_f) = \pi_\alpha(f)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, $\hat{\sigma}_2(\omega_f) = \hat{\sigma}_2(f)$ genügt. Unter der Entropie(-dichte) H der Verteilungsfunktion $f \in \hat{S}$ verstehen wir: $H(f) \equiv -\int f(v) \log f(v)\, d^3 v$, falls die Funktion $f \log f$ Lebesgue-integrierbar ist, und wir setzen im umgekehrten Fall $H(f) \equiv -\infty$.

Lemma 7 (Gibbs). *Für jedes* $f \in \hat{S}$ *gilt die Alternative:* $H(f) < H(\omega_f)$ *oder* $f = \omega_f$.

Satz 6 (H-Theorem). *Die Entropie ist als Funktion der Zeit nicht abnehmend und nach oben beschränkt. Falls f eine Anfangsverteilung $f \in \hat{\Omega}$ mit $H(f) > -\infty$ ist, so gilt: $H(f) \leqq H(\hat{U}_t f) \leqq H(\omega_f)$ für alle $t \in R^+$.*

Definition. $\Delta \equiv \{f \in \hat{S}$: Es gibt zwei Maxwellverteilungen ω_1, ω_2, so daß $\omega_1(v) \leqq f(v) \leqq \omega_2(v)$ für fast alle $v \in R^3$ gilt$\}$; dabei bezieht sich „fast alle" auf das Lebesguemaß.

Der Eigenschaft (30) zufolge läßt die Zeitevolution $\hat{U}$ die Menge Δ invariant:

Für jedes $f \in \Delta$ gibt es zwei (von f abhängige) Maxwellverteilungen, so daß $\omega_1 \leqq \hat{U}_t f \leqq \omega_2$ für alle $t \in R^+$ gilt. (33)

Das H-Theorem läßt sich auf das folgende Lemma zurückführen, das wir im Anhang 2 beweisen werden:

Lemma 8. *Die Funktion $R^+ \to R$, $t \mapsto H(\hat{U}_t f)$ ist für alle $f \in \Delta$ stetig differenzierbar; es gilt:* $\frac{d}{dt} H(\hat{U}_t f) = -\int \frac{d}{dt} \hat{U}_t f(v) \,(\log \hat{U}_t f(v) + 1)\, d^3 v.$

Definition. $G: \Delta \to R$, $f \mapsto G(f) \equiv \frac{1}{4} \int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e) \cdot (f(\tilde{v}_1) f(\tilde{v}_2) - f(v_1) f(v_2)) \log \frac{f(\tilde{v}_1)\, f(\tilde{v}_2)}{f(v_1)\, f(v_2)}\, d^2 e\, d^3 v_1\, d^3 v_2.$

Korollar. a) *Für alle $f \in \Delta$ und alle $t \in R^+$ gilt: $0 \leqq G(\hat{U}_t f) = \frac{d}{dt} H(\hat{U}_t f)$.*

b) *$H(f) \leqq H(\hat{U}_t f) = H(f) + \int_0^t G(\hat{U}_{t'} f)\, dt' \leqq H(\omega_f)$ für alle $f \in \Delta$, für alle $t \in R^+$.*

c) *Es gibt eine Folge positiver Zahlen t_n mit den Eigenschaften:*

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{n \to \infty} G(\hat{U}_{t_n} f) = 0\,.$$

Beweis des Korollars. a) Boltzmanns Beweis des H-Theorems beruht auf der Entropieproduktion: (Sei $f \in \Delta$, wir setzen $f_t \equiv \hat{U}_t f$)

$$\frac{d}{dt} H(\hat{U}_t f) = -\int \frac{d}{dt} f_t(v)\,(\log f_t(v) + 1)\, d^3 v \tag{34}$$

$$= -\int \frac{d}{dt} f_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v \tag{35}$$

$$= -\int \hat{B} f_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v \tag{36}$$

$$= G(\hat{U}_t f) \geqq 0\,. \tag{37}$$

Der erste Schritt (34) wird durch das Lemma 8 gerechtfertigt; der zweite (35) folgt aus der Differenzierbarkeit der Abbildung $t \mapsto \hat{U}_t f$ und der Masseerhaltung $\|\hat{U}_t f\|_1 = \|f\|_1$. (36) ergibt sich aus Satz 5; (37) aus der Gl. (10), welche auch für beschränkte Lebesgue-meßbare Funktionen φ gilt. $G(\hat{U}_t f) \geqq 0$ erhalten wir aus der Ungleichung: $(x-y)\log\frac{x}{y} \geqq 0$ für alle $x, y > 0$.

Die Relationen b), c) folgen unmittelbar aus a) und Lemma 7.

Beweis des H-Theorems. a) Wir betrachten zuerst Anfangsverteilungen aus der Menge $\Delta_1 \equiv \{f \in \hat{S} : f$ ist nach unten durch eine Maxwellverteilung und nach oben durch eine konstante Funktion beschränkt$\}$. Sei $f \in \Delta_1$ vorgegeben: f läßt sich durch eine Folge $\{f_n\}_{n \in N} \subset \Delta$ derart approximieren, daß die Beziehungen $\omega \leqq f_n \leqq f$ für alle $n \in N$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (punktweise fast überall bezüglich des Lebesguemaßes) gelten. Daraus ergibt sich die Abschätzung: $f_n|\log f_n| \leqq (d_1 + d_2\theta_5)\cdot f$ für alle $n \in N$ und gewisse, von n unabhängige, positive Zahlen d_1, d_2. Aus diesen Eigenschaften können wir die folgenden Relationen ableiten:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_2(f_n) = \sigma_2(f), \tag{38}$$

$$\lim_{n\to\infty} H(f_n) = H(f). \tag{39}$$

(38) impliziert $\lim_{n\to\infty} \omega_{f_n}(v) = \omega_f(v)$ für alle $v \in R^3$, und die Folge $\{\omega_{f_n}\}_{n \in N}$ ist nach oben und unten je durch eine Maxwellverteilung beschränkt; wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} H(\omega_{f_n}) = H(\omega_f). \tag{40}$$

Sei $t > 0$ vorgegeben; da $\hat{U}_t$ bezüglich der L^1-Norm kontrahierend ist, gibt es eine Folge $\{n_k\} \subset N$, derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} (\hat{U}_t f_{n_k})(v) = (\hat{U}_t f)(v) \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3 \quad \text{gilt}. \tag{41}$$

Infolge der Relationen (39), (40) und des Korollars b) (Lemma 8) erhalten wir (mit den Abkürzungen $\tilde{f}_k \equiv f_{n_k}$, $\tilde{f}_k^t \equiv \hat{U}_t f_{n_k}$, $\tilde{\omega}_k \equiv \omega_{f_{n_k}}$):

$$H(\omega_f) - H(f) = \lim_{k\to\infty} (H(\tilde{\omega}_k) - H(\tilde{f}_k)) \geqq \liminf_{k\to\infty} (H(\tilde{\omega}_k) - H(\tilde{f}_k^t)). \tag{42}$$

Das Lemma von Fatou ergibt:

$$\begin{aligned} &\liminf_{k\to\infty} (H(\tilde{\omega}_k) - H(\tilde{f}_k^t)) \\ &\geqq \int \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\tilde{f}_k^t(v)}{\tilde{\omega}_k(v)} \log \frac{\tilde{f}_k^t(v)}{\tilde{\omega}_k(v)} - \frac{\tilde{f}_k^t(v)}{\tilde{\omega}_k(v)} + 1 \right) \tilde{\omega}_k(v)\, d^3 v. \end{aligned} \tag{43}$$

Dabei haben wir die Gleichungen

$$\int \tilde{f}_k^t(v) \log \tilde{\omega}_k(v)\, d^3v = \int \tilde{\omega}_k(v) \log \tilde{\omega}_k(v)\, d^3v, \qquad k \in N$$

verwendet. Die Eigenschaften (41), (42) und (43) zeigen, daß

$$\left(\frac{\hat{U}_t f}{\omega_f} \log \frac{\hat{U}_t f}{\omega_f} - \frac{\hat{U}_t f}{\omega_f} + 1\right) \omega_f = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\tilde{f}_k^t}{\tilde{\omega}_k} \log \frac{\tilde{f}_k^t}{\tilde{\omega}_k} - \frac{\tilde{f}_k^t}{\tilde{\omega}_k} + 1\right) \tilde{\omega}_k$$

und somit auch $\hat{U}_t f \log \hat{U}_t f$ Lebesgue-integrierbar ist. Ebenfalls (41), (42), (43) zufolge gilt:

$$H(\omega_f) - H(f) \geqq H(\omega_f) - H(\hat{U}_t f). \tag{44}$$

b) Sei $f \in \hat{\Omega}, H(f) > -\infty$. $V_s f$ bezeichne die Gaußtransformierte von f: $(V_s f)(v) \equiv (2\pi s)^{-\frac{3}{2}} \int \exp\left(-\frac{(v-w)^2}{2s}\right) f(w)\, d^3w, s > 0$. Es ist $V_s f \in \Delta_1$ für alle $s > 0$ und $\sigma_2(V_s f) = 3s + \sigma_2(f)$. Da V eine lineare Kontraktionshalbgruppe auf $L^1(R^3)$ ist ([6], S. 236), können wir $f \in \hat{\Omega}$ durch $V_s f \in \Delta_1$ approximieren; wir erhalten:

$$\lim_{s \downarrow 0} \|V_s f - f\|_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \downarrow 0} \sigma_2(V_s f) = \sigma_2(f). \tag{38'}$$

Jensens Ungleichung und Fatous Lemma ergeben ferner ([7], S. 355):

$$\lim_{s \downarrow 0} H(V_s f) = H(f). \tag{39'}$$

Mit den zu a) analogen Schritten gelangen wir schließlich zur Ungleichung:

$$H(\omega_f) - H(f) \geqq H(\omega_f) - H(\hat{U}_t f), \tag{44'}$$

welche für alle $t \in R^+$ und alle $f \in \hat{\Omega}$ mit $H(f) > -\infty$ gültig ist; dabei ist $\hat{U}_t f \log \hat{U}_t f$ für alle $t \in R^+$ Lebesgue-integrierbar.

6. Einstellung des Gleichgewichtszustandes

Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t \to \infty} \hat{U}_t f$ beruht unter anderem auf den beiden folgenden Lemmata:

Lemma 9 (Morgenstern [8]). *Sei $\{f_n\}_{n \in N}$ eine Folge nichtnegativer $L^1(R^3)$-Elemente, derart, daß für alle $n \in N$ und gewisse reelle Zahlen $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, c_3 die Relationen $\|f_n\|_1 = c_1$, $\hat{\sigma}_2(f_n) = c_2$, $H(f_n) \geqq c_3$ gelten. Dann enthält $\{f_n\}_{n \in N}$ eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k \in N}$, welche schwach gegen ein Element $f \in L^1(R^3)$ konvergiert.*

Lemma 10. *Sei $f \in \hat{S}$; ferner sei eine Folge positiver Zahlen t_n mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ gegeben. Wenn $\hat{U}_{t_n} f$ schwach gegen $g \in L^1(R^3)$ konvergiert, so konvergiert $\hat{U}_{t_n} f$ auch in der $L^1(R^3)$-Norm gegen g.*

Der Beweis des Lemmas 10 befindet sich im Anhang 3. Er beruht auf den Eigenschaften (22), (31) der Zeitevolution $\hat{U}$. Wir zeigen nun, daß der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \hat{U}_t f$ für Anfangsverteilungen f aus der Menge Δ existiert und eine stationäre Verteilung ist.

Lemma 11. *Für jedes $f \in \Delta$ existiert genau ein $g \in \Delta$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$\lim_{t\to\infty} \|\hat{U}_t f - g\|_1 = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \hat{\sigma}_2(\hat{U}_t f - g) = 0\,, \tag{45}$$

$$\|g\|_1 = \|f\|_1\,; \qquad \pi_\alpha(g) = \pi_\alpha(f), \qquad \alpha = 1, 2, 3\,; \qquad \hat{\sigma}_2(g) = \hat{\sigma}_2(f)\,, \tag{46}$$

$$\hat{B} g = 0 \quad \textit{und} \quad \hat{U}_t g = g \quad \textit{für alle} \quad t \in R^+\,. \tag{47}$$

Beweis. Sei $f \in \Delta$; aus dem Korollar zu Lemma 8, der Masse- und Energiehaltung und Lemma 9 folgt, daß es eine Folge $\{t_n\}_{n\in N}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ gibt, derart, daß $\lim_{n\to\infty} G(\hat{U}_{t_n} f) = 0$ gilt und $\{\hat{U}_{t_n} f\}_{n\in N}$ schwach gegen ein Element $g \in L^1(R^3)$ konvergiert. Lemma 10 impliziert:

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{U}_{t_n} f - g\|_1 = 0\,. \tag{48}$$

$\{\hat{U}_t f\}_{t\in R^+}$ ist nach oben durch eine Maxwellverteilung beschränkt. Für eine Teilfolge $\{\tilde{t}_n\}_{n\in N} \subset \{t_n\}_{n\in N}$ konvergiert $\hat{U}_{\tilde{t}_n} f$ punktweise fast überall gegen g; wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_2(\hat{U}_{\tilde{t}_n} f - g) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \pi_\alpha(\hat{U}_{\tilde{t}_n} f) = \pi_\alpha(g), \qquad \alpha = 1, 2, 3\,. \tag{49}$$

Die Eigenschaften (46) sind eine Folge der Relationen (48), (49) und der Masse-, Impuls- und Energieerhaltung.

Wir führen einige Abkürzungen ein: $\Gamma: \Delta \to L^1(R^3 \times R^3 \times S^2)$, $f \mapsto \Gamma f$, $(\Gamma f)(v_1, v_2, e) \equiv \frac{1}{4}(f(\tilde{v}_1) f(\tilde{v}_2) - f(v_1) f(v_2)) \log \dfrac{f(\tilde{v}_1) f(\tilde{v}_2)}{f(v_1) f(v_2)}$; $z \equiv (v_1, v_2, e)$, $d\lambda(z) \equiv d\lambda_1(v_1)\, d\lambda_2(v_2, e) \equiv d^3 v_1\, d^3 v_2\, d^2 e$; $\varrho(z) \equiv |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)$. Es gilt: $G(f) = \int (\Gamma f)(z)\, \varrho(z)\, d\lambda(z)$. Weil $\{\hat{U}_t f\}_{t\in R^+}$ nach oben und unten je durch eine Maxwellverteilung beschränkt ist, gibt es positive Zahlen b_1, b_2 mit:

$$\begin{gathered} |(\Gamma \hat{U}_t f)(v_1, v_2, e)| \leqq b_1 (1 + v_1^2 + v_2^2) \exp(-b_2(v_1^2 + v_2^2)) \\ \text{für fast alle} \quad v_1, v_2 \in R^3\,. \end{gathered} \tag{50}$$

Aus der Definition der Folgen $\{t_n\}_{n\in N}$, $\{\tilde{t}_n\}_{n\in N}$ und aus (5), (48), (50) erhalten wir:

$$\begin{aligned} G(g) = \int (\Gamma g)(z)\,\varrho(z)\,d\lambda(z) &= \lim_{n\to\infty} \int (\Gamma\,\hat{U}_{\tilde{t}_n} f)(z)\,\varrho(z)\,d\lambda(z) \\ &= \lim_{n\to\infty} G(\hat{U}_{\tilde{t}_n} f) = 0\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Die Teilmengen $M_k \subset R^3 \times R^3 \times S^2$, $k = 1, 2, 3$ seien wie folgt definiert:

$$M_1 \equiv \{z \in R^3 \times R^3 \times S^2 : (\Gamma g)(z) = 0\}\,,$$

$$M_2 \equiv \{z \in R^3 \times R^3 \times S^2 : (\Gamma g)(z) > 0, \varrho(z) = 0\}\,,$$

$$M_3 \equiv \{z \in R^3 \times R^3 \times S^2 : (\Gamma g)(z) > 0, \varrho(z) > 0\}\,.$$

Wir bezeichnen den Schnitt von M_k längs v_1 mit $M_k(v_1)$:

$$M_k(v_1) \equiv \{(v_2, e) \in R^3 \times S^2 : (v_1, v_2, e) \in M_k\}\,, \qquad k = 1, 2, 3\,.$$

Die Mengen $M_k, k = 1, 2, 3$ sind λ-meßbar, und $\{M_k\}_{k=1,2,3}$ ist eine Partition von $R^3 \times R^3 \times S^2$. Die Eigenschaft (51) impliziert $\lambda(M_3) = 0$; $M_3(v_1)$ ist daher für λ_1-fast alle $v_1 \in R^3$ λ_2-integrierbar, und es gilt:

$$\lambda_2(M_3(v_1)) = 0 \quad \text{für } \lambda_1\text{-fast alle} \quad v_1 \in R^3\,. \tag{52}$$

Die Definition der Mengen $M_k, k = 1, 2, 3$ ($(v_1, v_2, e) \in M_1$ ist äquivalent zu $g(\tilde{v}_1)\,g(\tilde{v}_2) = g(v_1)\,g(v_2)$) und die obige Eigenschaft (52) ergeben für den Stoßoperator $\hat{B}$:

$$(\hat{B}g)(v_1) = \sum_{k=1}^{3} \int_{M_k(v_1)} \varrho(v_1, v_2, e)\,(g(\tilde{v}_1)\,g(\tilde{v}_2) - g(v_1)\,g(v_2))\,d\lambda_2(v_2, e) = 0$$

für λ_1-fast alle $v_1 \in R^3$; d. h. $\hat{B}g = 0$ und wegen Satz 5: $\hat{U}_t g = g$ für alle $t \in R^+$. Damit sind die Eigenschaften (46), (47) bewiesen. Es sei eine Folge $\{s_n\}_{n\in N} \subset R^+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ vorgegeben. Es gibt eine Teilfolge $\{s'_n\}_{n\in N} \subset \{s_n\}_{n\in N}$ mit $s'_n \geqq \tilde{t}_n$ für alle $n \in N$. Die Relationen (20), (22) und (47) implizieren: $\|\hat{U}_{s'_n} f - g\|_1 = \|\hat{U}_{s'_n - \tilde{t}_n} \hat{U}_{\tilde{t}_n} f - \hat{U}_{s'_n - \tilde{t}_n} g\|_1 \leqq \|\hat{U}_{\tilde{t}_n} f - g\|_1$ und analog: $\hat{\sigma}_2(\hat{U}_{s'_n} f - g) \leqq \hat{\sigma}_2(\hat{U}_{\tilde{t}_n} f - g)$ für alle $n \in N$. Daraus und aus (48), (49) folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{U}_{s'_n} f - g\|_1 = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\sigma}_2(\hat{U}_{s'_n} f - g) = 0$. Weil g unabhängig von der gewählten Folge $\{s_n\}_{n\in N}$ ist, haben wir somit (45) bewiesen.

Satz 7 (Einstellung des stationären Zustandes). *Für jede Anfangsverteilung $f \in \hat{\Omega}$ (mit endlicher Masse- und Energiedichte) existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{U}_t f = g$. Die Verteilung g ist stationär und hat dieselben*

Werte für Masse-, Impuls- und Energiedichte wie die Anfangsverteilung f:

$$\lim_{t\to\infty} \|\hat{U}_t f - g\|_1 = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \hat{\sigma}_2(\hat{U}_t f - g) = 0\,, \tag{53}$$

$$\|g\|_1 = \|f\|_1\,; \qquad \pi_k(g) = \pi_k(f), \quad k = 1,2,3\,; \qquad \hat{\sigma}_2(g) = \hat{\sigma}_2(f)\,, \tag{54}$$

$$\hat{B}g = 0, \qquad \hat{U}_t g = g \quad \textit{für alle} \quad t \in R^+\,. \tag{55}$$

Korollar. *Falls wir voraussetzen, daß die Maxwellverteilung die einzige stationäre Lösung der Boltzmanngleichung in $\hat{\Omega}$ ist, so konvergiert $\hat{U}_t f$ im Limes $t \mapsto \infty$ (bezüglich der Halbnormen $\|\ \|_1, \hat{\sigma}_2$) gegen die Maxwellverteilung ω_f. ω_f ist dadurch charakterisiert, daß sie dieselben Werte für Masse-, Impuls- und Energiedichte wie die Anfangsverteilung $f \in \hat{\Omega}$ hat.*

Bemerkungen. a) Im vorangehenden Korollar genügt es vorauszusetzen, daß für alle $f \in \Delta \cap \hat{\Omega}$ mit der Eigenschaft $\hat{B}f = 0$ folgt:

$f =$ Maxwellverteilung.

Jede der beiden folgenden Bedingungen b), c) ist ebenfalls hinreichend dafür, daß die Maxwellverteilung die einzige stationäre Verteilung der Boltzmanngleichung in $\hat{\Omega}$ ist:

b) Der differentielle Wirkungsquerschnitt I erfüllt die Ungleichung: $I(v_1, v_2, e) > 0$ für λ-fast alle $(v_1, v_2, e) \in R^3 \times R^3 \times S^2$. Beispiel: Der diff. Wirkungsquerschnitt für „harte Kugeln".

c) Der diff. Wirkungsquerschnitt I hängt nur von der Relativgeschwindigkeit $|v_1 - v_2|$ und dem Streuwinkel $\vartheta \equiv \sphericalangle(v_1 - v_2, \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)$ $(\vartheta \in [0, \pi])$ der zusammenstoßenden Teilchen ab, d.h. $I(v_1, v_2, e) = \tilde{I}(|v_1 - v_2|, \vartheta)$, und für ein $\vartheta_0 \in [0, \pi]$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt: $\tilde{I}(|v_1 - v_2|, \vartheta) > 0$ für alle $v_1, v_2 \in R^3$ und alle $\vartheta \in (\vartheta_0 - \varepsilon, \vartheta_0 + \varepsilon) \cap [0, \pi]$.

Beweis des Satzes 7. Sei $f \in \hat{\Omega}$ vorgegeben; f läßt sich durch eine Folge $\{f_n\}_{n \in N} \subset \Delta$ approximieren:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_2(f - f_n) = 0\,.$$

Wir definieren: $g_n = \lim_{t\to\infty} \hat{U}_t f_n$ für jedes $n \in N$. Lemma 11 ergibt: $\hat{U}_t g_n = g_n$ für alle $t \in R^+$ und alle $n \in N$. Die Kontraktionseigenschaft von $\hat{U}$ und Lemma 11 implizieren:

$\|g_m - g_n\|_1 = \lim_{t\to\infty} \|\hat{U}_t f_m - \hat{U}_t f_n\|_1 \leqq \|f_m - f_n\|_1$ für alle m, $n \in N$ und analog: $\hat{\sigma}_2(g_m - g_n) \leqq \hat{\sigma}_2(f_m - f_n)$ für alle $m, n \in N$. Somit ist $\{g_n\}_{n \in N}$ eine Cauchyfolge; wir definieren: $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Aus den Ungleichungen $\|\hat{U}_t f - g\|_1 \leqq \|\hat{U}_t f - \hat{U}_t f_n\|_1 + \|\hat{U}_t f_n - g_n\|_1 + \|g_n - g\|_1 \leqq \|f - f_n\|_1 + \|g - g_n\|_1 + \|\hat{U}_t f_n - g_n\|_1$ für alle $n \in N$, für alle $t \in R^+$ und Lemma 11 erhalten wir:

$$\lim_{t\to\infty} \|\hat{U}_t f - g\|_1 = 0 \quad \text{und analog:} \quad \lim_{t\to\infty} \hat{\sigma}_2(\hat{U}_t f - g) = 0\,. \tag{56}$$

Die Abschätzungen $\|\hat{U}_t g - g\|_1 \leqq \|\hat{U}_t g - \hat{U}_t g_n\|_1 + \|g_n - g\|_1 \leqq 2\|g - g_n\|_1$ für alle $n \in N$, für alle $t \in R^+$ zeigen, daß g stationär ist:

$$\hat{U}_t g = g \quad \text{für alle} \quad t \in R^+\,; \quad \text{der Satz 5 impliziert:} \quad \hat{B} g = 0\,.$$

Die Relation (56) und die Masse- und Energieerhaltung ergeben:

$$\|g\|_1 = \|f\|_1, \qquad \hat{\sigma}_2(g) = \hat{\sigma}_2(f)\,.$$

Ferner impliziert die Ungleichung

$$|\pi_k(\hat{U}_t f) - \pi_k(g)| \leqq \tfrac{1}{2}\|\hat{U}_t f - g\|_1 + \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_2(\hat{U}_t f - g):$$
$$\pi_k(g) = \pi_k(f), \qquad k = 1, 2, 3\,.$$

Anhang 1: Ergänzungen zum Beweis des Satzes 2

A 1.1. Einleitung

In Satz 2 ist l ein Parameter, den wir in diesem Anhang weglassen: $A_n^l \to A_n$, $B^l \to B$. A_n und B sind beschränkte Operatoren: $A_n \in \mathscr{L}(M^1(R^{3n}), M^1(R^{3n}))$; B ist quadratisch, also stetig differenzierbar als Abbildung von $M^1(R^3)$ in sich. Die Ableitung von B wird mit DB bezeichnet: $DB(\mu) \in \mathscr{L}(M^1(R^3), M^1(R^3))$; es gelten die Ungleichungen:

$$\|B\mu\|_1 \leqq c\|\mu\|_1^2, \quad \|B\mu - B\mu_1\|_1 \leqq 2c\|\mu - \mu_1\|_1 \quad \text{für alle} \quad \mu, \mu_1 \in M^1(R^3), \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \|DB(\mu)\| &\leqq 2c\|\mu\|_1\,, \\ \|DB(\mu) - DB(\mu_1)\| &\leqq 2c\|\mu - \mu_1\|_1 \quad \text{für alle} \quad \mu, \mu_1 \in M^1(R^3)\,. \end{aligned} \tag{58}$$

(Wir verwenden im Anhang 1 für alle neu eingeführten Normen dasselbe Symbol $\| \ \|$; z. B. für die Norm von $\mathscr{L}(M^1(R^3), M^1(R^3))$; einzige Ausnahme: Norm des Banachraumes $C(\Omega_a^n)$: $\| \ \|_n$).

Wir definieren einige topologische Räume:

$$\Omega_a \equiv \{\mu \in M^1(R^3) : \mu \geqq 0, \|\mu\|_1 = 1, \sigma_2(\mu) \leqq a\}, \qquad \Omega \equiv \bigcup_{a>0} \Omega_a\,,$$

$$\Omega^n \equiv \left\{\mu \equiv \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{v_\alpha} : (v_1, \ldots, v_n) \in R^{3n}\right\} \subset \Omega \quad (\delta_v \equiv \text{Diracmaß in } v \in R^3)\,,$$

$$\Omega_a^n \equiv \Omega^n \cap \Omega_a\,.$$

$\Omega_{(a)}^{(n)}$ sei die Abkürzung für eine dieser Mengen. In $M^1(R^3)$ wird eine zweite lokalkonvexe Topologie (w^*-Topologie) durch die Familie $\{p_\varphi\}_{\varphi \in C^b(R^3)}$ der Halbnormen $p_\varphi(\mu) \equiv |\langle \mu, \varphi \rangle|$ definiert; auf $\Omega_{(a)}^{(n)}$ betrachten wir die induzierte Topologie. Mit dieser Topologie ist Ω^n abgeschlossen in Ω und Ω_a kompakt. Sei $\mathfrak{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von n Elementen; Ω^n ist homöomorph $R^{3n}/\mathfrak{S}_n$. $C^b(\Omega_{(a)}^{(n)})$ sei die Menge der reellwertigen, stetigen, beschränkten Funktionen auf $\Omega_{(a)}^{(n)}$. Mit der Norm $\|f\|_{(n)} \equiv \sup_{\mu \in \Omega_a^{(n)}} |f(\mu)|$ ist $C^b(\Omega_a^{(n)}) = C(\Omega_a^{(n)})$ ein Banachraum.

Sei $P_{a,n}: C(\Omega_a) \to C(\Omega_a^n)$ die Restriktion von $C(\Omega_a)$ auf $C(\Omega_a^n)$. Die Familie $\{C(\Omega_a^n)\}_{n \in N}$ approximiert den Banachraum $C(\Omega_a)$ im Sinn von Trotter [9]:

$$\|P_{a,n}\| \leqq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \|P_{a,n} f\|_n = \|f\| \quad \text{für alle} \quad f \in C(\Omega_a).$$

$\mathscr{C}^b(R^3)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von $M^1(R^3)$ in R der Form $\mu \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle$ für $\varphi \in C^b(R^3)$. F heißt ein Polynom mit reellen Koeffizienten bezüglich $\mathscr{C}^b(R^3)$, falls F die Form $F(\mu) \equiv g(\langle \mu, \varphi_1 \rangle, \ldots$ $\ldots, \langle \mu, \varphi_k \rangle)$ hat, wobei g ein Polynom in k Unbestimmten mit reellen Koeffizienten ist und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^b(R^3)$. F ist (bezüglich der w^*-Topologie sowie bezüglich der Norm-Topologie von $M^1(R^3)$) eine stetige Abbildung von $M^1(R^3)$ in R; F ist differenzierbar als Abbildung $(M^1(R^3), \| \ \|_1) \to R$. Die Restriktion von F auf Ω_a nennen wir Polynom auf Ω_a. Da Ω_a kompakt ist und $\mathscr{C}^b(R^3)$ die Punkte von Ω_a separiert, ist die Menge $Q(\Omega_a)$ der Polynome auf Ω_a dicht in $C(\Omega_a)$ (Satz von Weierstraß-Stone).

Sei $U_t^n \equiv \exp t A_n$ die zum Stoßoperator A_n gehörende Zeitevolution. U^n ist eine lineare Kontraktionshalbgruppe auf $M^1(R^{3n})$ bzw. auf $M^1(R^{3n}/\mathfrak{S}_n)$. Wir definieren einen Stoßoperator auf $C^b(\Omega_{(a)}^n)$:

$$(G_{(a),n} f)(\underline{v}) \equiv \frac{1}{n} \sum_{\alpha < \beta} \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e) \, (f(\hat{\underline{v}}_{\alpha,\beta}) - f(\underline{v})) \, d^2 e.$$

Dabei haben wir von der Isomorphie $C^b(\Omega^n) \cong C^b(R^{3n}/\mathfrak{S}_n)$ Gebrauch gemacht. Aus der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts $I \equiv I_l$ [insbesondere (4), (5), (6)] folgt, daß $G_{(a),n}$ ein beschränkter, linearer Operator auf $C^b(\Omega_{(a)}^n)$ ist, der $C^b(\Omega_{(a)}^n)$ invariant läßt. $G_{(a),n}$ erzeugt die Halbgruppe $T_t^{(a),n} \equiv \exp t G_{(a),n}$, $t \geqq 0$. T^n ist dual zu U^n: $\langle U_t^n v, f \rangle = \langle v, T_t^n f \rangle$ für alle $t \in R^+$, $v \in M^1(R^{3n}/\mathfrak{S}_n)$, $f \in C^b(R^{3n}/\mathfrak{S}_n)$. $T^{a,n}$ ist eine lineare Kontraktionshalbgruppe auf $C(\Omega_a^n)$ [2].

U sei die zum Stoßoperator B gehörende Zeitevolution auf Ω. Die 1-parametrige Halbgruppe U läßt Ω_a invariant. Wir definieren:

$$T_t^{(a)}: C^b(\Omega_{(a)}) \to C^b(\Omega_{(a)}) \ \text{ mit } \ (T_t^{(a)} \varphi)(\mu) \equiv \varphi(U_t \mu) \ \text{ für } \ \varphi \in C^b(\Omega_{(a)}), \ \mu \in \Omega_{(a)}.$$

T^a ist eine lineare Kontraktionshalbgruppe auf $C(\Omega_a)$ [2]. Ihre infinitesimale Erzeugende bezeichnen wir mit G_a.

Der Beweis des Satzes 2 beruht im wesentlichen auf den folgenden Eigenschaften der infinitesimalen Erzeugenden G_a und $G_{a,n}$:

Es gibt eine in $C(\Omega_a)$ dichte Menge C_r, derart, daß

1) der Abschluß der Restriktion von G_a auf C_r gleich G_a ist,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|G_{a,n}P_{a,n}\Phi - P_{a,n}G_a\Phi\|_n = 0$ für alle $\Phi\in C_r$.

Das heißt: Die infinitesimale Erzeugende $G_{a,n}$ konvergiert auf der Menge C_r im Sinn von Trotter gegen die infinitesimale Erzeugende G_a. Wir werden die Eigenschaft 2) in A 1.3 beweisen.

A 1.2. Differenzierbare Abhängigkeit der Lösung der Boltzmanngleichung von der Anfangsbedingung

Sei F ein Polynom auf Ω_a, d. h. $F(\mu)\equiv \sum\limits_m a_m f_1^{m_1}(\mu)\dots f_k^{m_k}(\mu)$ mit $f_\alpha\in\mathscr{C}^b(R^3)$, $\alpha=1,\dots,k: f_\alpha(\mu)\equiv\langle\mu,\varphi_\alpha\rangle$, $\varphi_\alpha\in C^b(R^3)$. Die Ableitung von F ist durch

$$DF(\mu)=\sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(\mu)\, f_\alpha \quad\text{mit}\quad F_\alpha(\mu)\equiv\sum_m m_\alpha a_m f_1^{m_1}(\mu)\dots f_\alpha^{m_\alpha-1}(\mu)\dots f_k^{m_k}(\mu)$$

gegeben, und es gilt: $DF(\mu)\in\mathscr{C}^b(R^3)$ für alle $\mu\in\Omega_a$.

Satz 8. a) $(T_t^a F)(\mu)-(T_t^a F)(\mu_1)=\langle DU_t(\mu_1)(\mu-\mu_1),\, DF(U_t\mu_1)\rangle + R_t(\mu,\mu_1)$, *dabei genügt das Restglied* $R_t(\mu,\mu_1)$ *für alle* $t\in R^+$ *und alle* $\mu,\mu_1\in\Omega_a$ *der Abschätzung:* $|R_t(\mu,\mu_1)|\leqq\gamma(F)\,\|\mu-\mu_1\|_1^2\exp(4ct)$ *($\gamma(F)$ ist eine von F abhängige Zahl, c hängt von B ab).*

b) $\{x_n\}_{n\in N}$ *sei eine Folge von Radon-Maßen über* R^3, *welche den folgenden Bedingungen genüge:* $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,\varphi\rangle=\langle x,\varphi\rangle$ *für alle* $\varphi\in C^b(R^3)$; $\|x_n\|_1\leqq b_1$, $\sigma_2(x_n)\leqq b_2$ *für alle* $n\in N$. *Dann gilt auch:* $\lim\limits_{n\to\infty}\langle DU_t(\mu)x_n,\varphi\rangle = \langle DU_t(\mu)\,x,\varphi\rangle$ *für alle* $\varphi\in C^b(R^3)$.

Beweis. a) Wir erhalten durch Spezialisierung aus den Sätzen 10.4.5, 10.7.3 und 10.8.2 in [10] und unter Verwendung der Ungleichungen (57), (58) die beiden folgenden Aussagen:

Für jedes $t_0\in R^+$ und jedes $y\in K\equiv\{\zeta\in M^1(R^3):\|\zeta\|_1<2\}$ hat die Gleichung $\dot x=Bx$ genau eine Lösung $x(t,t_0,y)$ im Intervall $[t_0-r,t_0+r]\left(\text{mit } r<\dfrac{1}{15c}\right)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0,t_0,y)=y$. (59)

Es bezeichne $J(t_0)$ das offene Intervall $\left(t_0-\dfrac{1}{16c},\, t_0+\dfrac{1}{16c}\right)$. Die Abbildung $J(t_0)\times K\to M^1(R^3)$, $(t,y)\mapsto x(t,t_0,y)$ ist (unabhängig von $t_0\in R^+$) stetig differenzierbar, und $V(t,y)\equiv D_y x(t,t_0,y)$ ist die Lösung der Differentialgleichung $\dot V=DB(x(t,t_0,y))\circ V$ ($\circ$ = Zusammensetzung von Funktionen) in $J(t_0)$ mit der Anfangsbedingung $V(t_0,y)=\mathrm{id}$. (60)

Infolge der Masseerhaltung läßt sich aus (59) die folgende Eigenschaft ableiten:

Das Anfangsproblem $\dot{\mu}_t = B\mu_t$, $\mu_0 = y$ mit $y \geqq 0$ und $\|y\|_1 < 2$ hat auf R^+ genau eine Lösung; für welche wir $U_t y$ schreiben; es gilt: $\|U_t y\|_1 = \|y\|_1$ und $U_t y \geqq 0$ für alle $t \in R^+$. (61)

Wir erhalten aus (58), (60), (61) den Satz:

$\|DB(U_t\mu)\| \leqq 2c$ für alle $t \in R^+$ und alle $\mu \geqq 0$ mit $\|\mu\|_1 < 2$; die Gleichung $\dot{V} = DB(U_t\mu) \circ V$ hat auf R^+ genau eine Lösung $V(t, \mu)$, welche der Bedingung $V(0, \mu) = \mathrm{id}$ genügt. Für jedes $t \in R^+$ ist die Abbildung $y \mapsto U_t y$ im Punkt $y = \mu \geqq 0$ mit $\|\mu\|_1 = 1$ stetig differenzierbar; es gilt $DU_t(\mu) = V(t, \mu)$. (62)

(62) impliziert: $\|DU_t(\mu)\| \leqq 1 + \int_0^t 2c\,\|DU_{t'}(\mu)\|\,dt'$ für alle $t \in R^+$, für alle $\mu \geqq 0$ mit $\|\mu\|_1 < 2$. Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sup\{\|DU_t(\mu)\| : \mu \in M^1(R^3), \mu \geqq 0, \|\mu\|_1 = 1\} \\ &\quad \leqq \exp(2ct) \quad \text{für alle} \quad t \in R^+ . \end{aligned} \tag{63}$$

In analoger Weise ergibt sich aus (57), (61) (bzw. mit (58)):

$$\begin{aligned} &\|U_t(\mu) - U_t(\mu_1)\|_1 \leqq \|\mu - \mu_1\|_1 \exp(2ct) \\ &\text{für alle} \quad t \in R^+ \quad \text{und} \quad \mu, \mu_1 \geqq 0 \quad \text{mit} \quad \|\mu\|_1 = \|\mu_1\|_1 = 1 ; \\ &\|DB(U_t\mu) - DB(U_t\mu_1)\| \leqq 2c\,\|\mu - \mu_1\|_1 \exp(2ct) \\ &\text{für alle} \quad t \in R^+ \quad \text{und alle} \quad \mu, \mu_1 \geqq 0 \quad \text{mit} \quad \|\mu\|_1 = \|\mu_1\|_1 = 1 . \end{aligned} \tag{64}$$

$$\text{Es gilt für alle} \quad \mu \geqq 0 \quad \text{mit} \quad \|\mu\|_1 = 1 : \|DB(U_t\mu)\| \leqq 2c . \tag{65}$$

Aus den Eigenschaften (62), (63), (64), (65) folgt:

$$\begin{aligned} \|DU_t(\mu) - DU_t(\mu_1)\| &\leqq \int_0^t \|(DB(U_{t'}\mu) \circ DU_{t'}(\mu) - DB(U_{t'}\mu_1) \circ DU_{t'}(\mu_1))\|\,dt' \\ &\leqq \int_0^t (2c\,\|\mu - \mu_1\|_1 \exp(4ct') + 2c\,\|DU_{t'}(\mu) - DU_{t'}(\mu_1)\|)\,dt'. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung und Lemma 10.5.1.3 in [10] implizieren:

$$\begin{aligned} &\|DU_t(\mu) - DU_t(\mu_1)\| \leqq 2\,\|\mu - \mu_1\|_1 \exp(4ct) \quad \text{für alle} \quad t \in R^+ \\ &\qquad \text{und alle} \quad \mu, \mu_1 \geqq 0 \quad \text{mit} \quad \|\mu\|_1 = \|\mu_1\|_1 = 1 . \end{aligned} \tag{66}$$

Sei F ein Polynom auf Ω_a:

$$DF(\mu) \equiv \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(\mu)\,f_\alpha \quad \text{und} \quad DF_\alpha(\mu) \equiv \sum_{\beta=1}^{k} F_{\alpha\beta}(\mu)\,f_\beta \ \text{(Definition von } F_\alpha, F_{\alpha\beta}) .$$

Im folgenden sei $\mu, \mu_1 \in M^1(R^3)$ mit $\mu, \mu_1 \geqq 0$ und $\|\mu\|_1 = \|\mu_1\|_1 = 1$. Der Mittelwertsatz ergibt:

$$(T_t^a F)(\mu) - (T_t^a F)(\mu_1) = F(U_t \mu) - F(U_t \mu_1) = D(F \circ U_t)(\mu_1)(\mu - \mu_1) + R_t(\mu, \mu_1)$$

mit

$$|R_t(\mu, \mu_1)| \leqq \|\mu - \mu_1\|_1 \sup_{\tilde{\mu} \in [\mu_1, \mu]} \|D(F \circ U_t)(\tilde{\mu}) - D(F \circ U_t)(\mu_1)\|,$$

dabei ist $[\mu_1, \mu]$ das Segment, welches μ_1 mit μ verbindet. Mit der Kettenregel (62) und der Definition von F_α erhalten wir:

$$D(F \circ U_t)(\mu)\, x = \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(U_t \mu) \langle D U_t(\mu)\, x, \varphi_\alpha \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in M^1(R^3).$$

Daraus ergibt sich, falls wir

$$DF(\mu_1) = \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(\mu_1)\, f_\alpha \in \mathscr{C}^b(R^3) \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(\mu_1)\, \varphi_\alpha \in C^b(R^3)$$

identifizieren:

$$\begin{aligned} &D(F \circ U_t)(\mu_1)(\mu - \mu_1) \\ &= \langle D U_t(\mu_1)(\mu - \mu_1), \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha(U_t \mu_1)\, \varphi_\alpha \rangle = \langle D U_t(\mu_1)(\mu - \mu_1), DF(U_t \mu_1) \rangle. \end{aligned}$$

Wir schätzen den Term $\|D(F \circ U_t)(\mu) - D(F \circ U_t)(v)\|$ für $\mu, v \in M^1(R^3)$ mit $\mu, v \geqq 0$ und $\|\mu\|_1 = \|v\|_1 = 1$ ab:

$$\begin{aligned} &\|D(F \circ U_t)(\mu) - D(F \circ U_t)(v)\| \\ &\leqq \sum_{\alpha=1}^{k} \sup_{\|\xi\|_1 = 1} |F_\alpha(U_t \mu)\, f_\alpha(D U_t(\mu)\, \xi) - F_\alpha(U_t v)\, f_\alpha(D U_t(v)\, \xi)| \\ &\leqq \sum_{\alpha=1}^{k} \sup_{\|\xi\|_1 = 1} |F_\alpha(U_t \mu)\, (f_\alpha(D U_t(\mu)\, \xi) - f_\alpha(D U_t(v)\, \xi))| \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{k} \sup_{\|\xi\|_1 = 1} |(F_\alpha(U_t \mu) - F_\alpha(U_t v))\, f_\alpha(D U_t(v)\, \xi)| \\ &\leqq \sum_{\alpha=1}^{k} |F_\alpha(U_t \mu)|\, \|\varphi_\alpha\|\, \|D U_t(\mu) - D U_t(v)\| \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{k} |F_\alpha(U_t \mu) - F_\alpha(U_t v)|\, \|\varphi_\alpha\|\, \|D U_t(v)\| \\ &\leqq \sum_{\alpha=1}^{k} (2 q_\alpha \|\varphi_\alpha\|\, \|\mu - v\|_1 \exp(4ct) + c_\alpha \|\mu - v\|_1 \exp(4ct)\, \|\varphi_\alpha\|). \end{aligned}$$

Dabei haben wir (63), (66), die Definitionen $q_\alpha \equiv \sup\{|F_\alpha(\mu)| : \mu \in M^+(R^3), \|\mu\|_1 = 1\}$, $c_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^{k} 3\,\|\varphi_\beta\| \sup\{|F_{\alpha\beta}(\mu)| : \mu \in M^+(R^3), \|\mu\|_1 = 1\}$ und die folgende Ungleichung, welche man durch eine kleine Zwischenrechnung erhält, verwendet:

$$|(F_\alpha \circ U_t)(\mu) - (F_\alpha \circ U_t)(\nu)| \leqq c_\alpha \|\mu - \nu\|_1 \exp(2ct) \quad \text{für alle} \quad t \in R^+$$

und

$$\mu, \nu \in M^+(R^3) \quad \text{mit} \quad \|\mu\|_1 = \|\nu\|_1 = 1\,.$$

Wir definieren $\gamma(F) \equiv \sum_{\alpha=1}^{k} (2q_\alpha \|\varphi_\alpha\| + c_\alpha \|\varphi_\alpha\|)$ und erhalten die Ungleichung: $|R_t(\mu, \mu_1)| \leqq \gamma(F)\,\|\mu - \mu_1\|_1^2 \exp(4ct)$ für alle $t \in R^+$ und alle $\mu, \mu_1 \in M^+(R^3)$ mit $\|\mu\|_1 = \|\mu_1\|_1 = 1$.

Bemerkungen zum Beweis von b):

Falls $V(t, \mu)$ die Lösung der Differentialgleichung $\dot{V} = DB(U_t \mu) \circ V$ mit der Anfangsbedingung $V(0, \mu) = \mathrm{id}$ ist, genügt $x_t \equiv V(t, \mu)\,x$, $x \in M^1(R^3)$ der Differentialgleichung $\dot{x}_t = DB(U_t \mu)\,x_t$ mit der Anfangsbedingung $x_0 = x$ und umgekehrt. Der Relation (62) zufolge genügt es, die folgende Eigenschaft zu beweisen:

Gegeben sei eine Folge $\{x_n\}_{n \in N} \subset M^1(R^3)$ von Maßen mit den Eigenschaften: $\lim_{n \to \infty} \langle x_n, \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in C^b(R^3)$ und $\|x_n\|_1 \leqq b_1$, $\sigma_2(x_n) \leqq b_2$ für alle $n \in N$. Es gibt eine Folge $\{n_k\}_{k \in N} \subset N$, derart, daß die Lösungen der Gleichungen $x_{n_k}(t) = x_{n_k} + \int_0^t DB(U_{t'} \mu)\, x_{n_k}(t')\, dt'$ schwach gegen die Lösung der Gleichung $x(t) = x + \int_0^t DB(U_{t'} \mu)\, x(t')\, dt'$ konvergieren; d. h. $\lim_{k \to \infty} \langle x_{n_k}(t), \varphi \rangle = \langle x(t), \varphi \rangle$ für alle $t \in R^+$ und alle $\varphi \in C^b(R^3)$.

Der Beweis dieser Aussage beruht auf der Tatsache, daß die Menge $\{x \in M^1(R^3) : \|x\|_1 \leqq b_1, \sigma_2(x) \leqq b_2\}$ schwach folgenkompakt ist. Er verläuft ähnlich wie der Beweis der schwachen Stetigkeit des „Boltzmannflusses" in der Arbeit von Grünbaum [2], Appendix 1.

A 1.3. Approximation von G_a durch $G_{a,n}$

Bemerkung. Gegeben sei eine Abbildung $f: S^2 \to M^1(R^3)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) Die Abbildung $S^2 \to R$, $e \mapsto \langle f(e), \varphi \rangle$ sei für jedes $\varphi \in C^b(R^3)$ meßbar.

2) $|\langle f(e), \varphi \rangle| \leqq g(e)\,\|\varphi\|$ für ein $g \in L^1(S^2)$ und für alle $\varphi \in C^b(R^3)$.

Dann wird durch $\langle A(f), \varphi \rangle \equiv \int \langle f(e), \varphi \rangle\, d^2 e$ ein beschränktes Maß $A(f)$ auf R^3 definiert, das wir mit $w^* - \int f(e)\, d^2 e$ bezeichnen.

Lemma 12. *Sei F ein Polynom auf Ω_a, $\mu \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{v_k} \in \Omega_a$. Es gilt mit der Notation von Satz 8:*

$$(G_a T_t^a F)(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e)$$
$$\cdot \langle D U_t(\mu)(\delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta}), DF(U_t \mu)\rangle d^2 e \ \textit{ für alle } \ t \in R^+ .$$

Beweis. Sei $\mu \equiv \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{v_\alpha}$ und $\varphi \in C^b(R^3)$; wir erhalten:

$$\langle B\mu, \varphi\rangle = \frac{1}{2} \int |v_1 - v_2| \, I(v_1, v_2, e)\,(\varphi(\tilde{v}_1) + \varphi(\tilde{v}_2) - \varphi(v_1) - \varphi(v_2))$$
$$\cdot\, d^2 e \, d\mu(v_1)\, d\mu(v_2)$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e)\,(\varphi(\tilde{v}_\alpha) + \varphi(\tilde{v}_\beta)$$
$$- \varphi(v_\alpha) - \varphi(v_\beta))\, d^2 e$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e) \langle \delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta}, \varphi\rangle \, d^2 e,$$

d. h.

$$B\mu = \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha<\beta} w^* - \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e)(\delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta})\, d^2 e \,.$$

Sei F ein Polynom auf Ω_a und $\mu \in \Omega_a$; aus Satz 8 folgt:

$$\frac{T_s^a T_t^a F - T_t^a F}{s}(\mu) = \frac{(T_t^a F)(U_s \mu) - (T_t^a F)(\mu)}{s}$$
$$= \langle D U_t(\mu) \frac{U_s \mu - \mu}{s}, DF(U_t \mu)\rangle + \frac{1}{s} R_t(U_s \mu, \mu)$$

und

$$(G_a T_t^a F)(\mu) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{T_s^a T_t^a F - T_t^a F}{s}(\mu) = \langle D U_t(\mu)(B\mu), DF(U_t \mu)\rangle \,.$$

Dabei haben wir $\lim_{s \downarrow 0} \frac{U_s \mu - \mu}{s} = B\mu$ und $D U_t(\mu) \in \mathscr{L}(M^1(R^3), M^1(R^3))$ verwendet. Es bleibt zu beweisen:

$$\langle D U_t(\mu) \sum_{\alpha<\beta} w^* - \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e)\,(\delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta})\, d^2 e, \varphi\rangle$$
$$= \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta| \, I(v_\alpha, v_\beta, e) \langle D U_t(\mu)(\delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta}), \varphi\rangle \, d^2 e$$

$$\text{für alle} \quad t \in R^+ \quad \text{und} \quad \mu \equiv \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{v_\alpha} \in \Omega_a^n .$$

Es genügt, den charakteristischen Term $\langle DU(\mu)\, w^* - \int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e) \cdot \delta_{\tilde{v}_1} d^2 e, \varphi\rangle$ zu betrachten. Dabei sind v_1, v_2 Parameter mit $v_1^2 + v_2^2 \leqq a$. Die Abbildung $S^2 \to R$, $e \mapsto \tilde{v}_1(e)$ ist meßbar und es gilt: $\tilde{v}_1^2(e) \leqq a$ für alle $e \in S^2$. Wir approximieren $\tilde{v}_1(\cdot)$ durch einfache, meßbare Funktionen $w_n(\cdot)$, derart, daß $\lim_{n\to\infty} w_n(e) = \tilde{v}_1(e)$ sowie $(w_n(e))^2 \leqq 2a$ für alle $e \in S^2$ gilt. Ebenso approximieren wir $\varrho(\cdot) \equiv |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, \cdot)$ durch einfache, meßbare Funktionen $\varrho_n(\cdot)$, welche den Bedingungen $0 \leqq \varrho_n(e) \leqq \varrho(e)$ für alle $n \in N$ und $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(e) = \varrho(e)$ für alle $e \in S^2$ genügen. Wir setzen: $f_n(e) \equiv \varrho_n(e)\, \delta_{w_n(e)}$, $n \in N$ und $f(e) \equiv \varrho(e)\, \delta_{\tilde{v}_1(e)}$. Aus diesen Definitionen folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(e), \varphi\rangle = \langle f(e), \varphi\rangle \quad \text{für alle} \quad e \in S^2, \varphi \in C^b(R^3)\,, \tag{67}$$

$$\|f_n(e)\|_1 \leqq \varrho(e) \quad \text{für alle} \quad e \in S^2, \quad \text{insbesondere} \quad f_n \in L^1(S^2; M^1(R^3)), \tag{68}$$

$$\sigma_2(f_n(e)) \leqq 2a\, \varrho(e) \quad \text{für alle} \quad e \in S^2,\ n \in N\,. \tag{69}$$

Die Relationen (68) und (69) implizieren:

$$\left\|\int f_n(e)\, d^2 e\right\|_1 \leqq \int \varrho(e)\, d^2 e \quad \text{für alle} \quad n \in N\,, \tag{70}$$

$$\sigma_2\left(\int f_n(e)\, d^2 e\right) \leqq 2a \int \varrho(e)\, d^2 e \quad \text{für alle} \quad n \in N\,. \tag{71}$$

Aus (67) und (68) erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \int \langle f_n(e), \varphi\rangle\, d^2 e = \int \langle f(e), \varphi\rangle\, d^2 e = \langle w^* - \int f(e)\, d^2 e, \varphi\rangle$$
$$\text{für alle} \quad \varphi \in C^b(R^3)\,.$$

Wegen (68) und $\int \langle f_n(e), \varphi\rangle\, d^2 e = \langle \int f_n(e)\, d^2 e, \varphi\rangle$ ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \langle \int f_n(e)\, d^2 e, \varphi\rangle = \langle w^* - \int f(e)\, d^2 e, \varphi\rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C^b(R^3)\,. \tag{72}$$

Die Eigenschaften (70), (71), (72) (bzw. (67), (68), (69)) und Satz 8b ergeben:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \langle DU_t(\mu) \int f_n(e)\, d^2 e, \varphi\rangle = \langle DU_t(\mu)\, w^* - \int f(e)\, d^2 e, \varphi\rangle \\ \text{für alle} \quad t \in R^+ \quad \text{und alle} \quad \varphi \in C^b(R^3)\,,\end{gathered} \tag{73}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \langle DU_t(\mu)\, f_n(e), \varphi\rangle = \langle DU_t(\mu)\, f(e), \varphi\rangle\,.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int \langle DU_t(\mu)\, f_n(e), \varphi\rangle\, d^2 e = \int \langle DU_t(\mu)\, f(e), \varphi\rangle\, d^2 e \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C^b(R^3). \tag{74}$$

Schließlich implizieren die Relationen (73), (74):

$$\begin{aligned}\langle DU_t(\mu)\, w^* - \int f(e)\, d^2 e, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle DU_t(\mu) \int f_n(e)\, d^2 e, \varphi\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \int DU_t(\mu)\, f_n(e)\, d^2 e, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \langle DU_t(\mu)\, f_n(e), \varphi\rangle\, d^2 e \\ &= \int \langle DU_t(\mu)\, f(e), \varphi\rangle\, d^2 e \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C^b(R^3)\,.\end{aligned}$$

Mit der Definition von f ist somit:

$$\langle DU_t(\mu)\, w^* - \int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)\, \delta_{\tilde v_1}\, d^2 e, \varphi\rangle$$
$$= \int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e) \langle DU_t(\mu)\, \delta_{\tilde v_1}, \varphi\rangle\, d^2 e\,.$$

Es bezeichne $Q(\Omega_a)$ die Menge der Polynome auf Ω_a.

Sei $C_r \equiv (r - G_a)^{-1}\, Q(\Omega_a)$ mit $r > 0$; die Menge C_r ist für jedes $r > 0$ dicht in $C(\Omega_a)$.

Satz 9. *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} \|G_{a,n} P_{a,n} \Phi - P_{a,n} G_a \Phi\|_n = 0$ *für alle* $\Phi \in C_r$, *falls* $r > 4c$ *ist.*

Beweis. Seien $r > 4c$ und $\Phi \in C_r$ vorgegeben. Es gibt ein Polynom F auf Ω_a mit $\Phi = (r - G_a)^{-1} F = \int_0^\infty \exp(-rt)\, T_t^a F\, dt$. Indem wir diese Darstellung von Φ benutzen, gelangen wir zur Abschätzung:

$$\|G_{a,n} P_{a,n} \Phi - P_{a,n} G_a \Phi\|_n$$
$$= \left\| \int_0^\infty G_{a,n} P_{a,n} \exp(-rt)\, T_t^a F\, dt - \int_0^\infty P_{a,n} G_a \exp(-rt)\, T_t^a F\, dt \right\|_n$$
$$\leqq \sup_{t\in R^+} (\exp(-r_1 t)\, \|G_{a,n} P_{a,n} T_t^a F - P_{a,n} G_a T_t^a F\|_n)$$
$$\cdot \int_0^\infty \exp(-(r - r_1)\, t')\, dt'\,;$$

wir werden zeigen, daß der Term vor dem Integral (der obigen Zeile) im Limes $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (Wahl von $r_1 : 4c < r_1 < r$). Sei $\mu \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{v_k} \in \Omega_a^n$; wir definieren $\hat\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\hat v_k}$ mit $\underline{\hat v} \equiv (v_1, \ldots, \tilde v_\alpha, \ldots \ldots, \tilde v_\beta, \ldots, v_n)$.

$$(G_{a,n} P_{a,n} T_t^a F)(\mu)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta|\, I(v_\alpha, v_\beta, e)\, ((T_t^a F)(\hat\mu_{\alpha\beta}) - (T_t^a F)(\mu))\, d^2 e$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta|\, I(v_\alpha, v_\beta, e)$$
$$\left\langle DU_t(\mu)\, \frac{1}{n} (\delta_{\tilde v_\alpha} + \delta_{\tilde v_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta}), DF(U_t \mu) \right\rangle d^2 e$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{\alpha<\beta} \int |v_\alpha - v_\beta|\, I(v_\alpha, v_\beta, e)\, R_t(\hat\mu_{\alpha\beta}, \mu)\, d^2 e\,.$$

Den ersten Term auf der rechten Seite der Gleichung können wir wegen Lemma 12 mit $(P_{a,n} G_a T_t^a F)(\mu)$ identifizieren. Aus Satz 8 und der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts I erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\sup_{t\in R^+} (\exp(-r_1 t) \|G_{a,n}P_{a,n}T_t^a F - P_{a,n}G_a T_t^a F\|_n)$$

$$\leqq \sup_{t\in R^+}\left(\exp(-r_1 t)\left|\frac{1}{n}\sum_{\alpha<\beta}\int |v_\alpha - v_\beta|\, I(v_\alpha, v_\beta, e)\, R_t(\hat{\mu}_{\alpha\beta}, \mu)\, d^2 e\right|\right)$$

$$\leqq \frac{\gamma(F)}{n^3}\sup_{t\in R^+}\left(\exp(-(r_1-4c)\,t)\sum_{\alpha<\beta}\int |v_\alpha - v_\beta|\, I(v_\alpha, v_\beta, e)\right.$$

$$\left.\cdot\|\delta_{\tilde{v}_\alpha} + \delta_{\tilde{v}_\beta} - \delta_{v_\alpha} - \delta_{v_\beta}\|_1^2\, d^2 e\right)$$

$$\leqq \frac{c}{n},$$

dabei hängt die Konstante c von a, F und I ab.

Bemerkung. Der Abschluß der Restriktion von G_a auf C_r $(r>4c)$ ist gleich G_a. Aus dieser Eigenschaft und aus Satz 9 folgt Satz 2 mit den Methoden von Grünbaum [2].

Anhang 2: Beweis des Lemmas 8

$f\in\Delta$ sei fest gewählt. Wir setzen zur Abkürzung: $f_t \equiv \hat{U}_t f$, $\dot{f}_t \equiv \frac{d}{dt}\hat{U}_t f$. Wir weisen zuerst nach, daß es ein $\varphi\in L^1(R^3)$ mit der Eigenschaft

$$\left|\frac{f_{s+t}(v)-f_t(v)}{s}\right| \leqq \varphi(v) \quad \text{für fast alle} \quad v\in R^3 \quad \text{gibt}. \tag{75}$$

Der Definition von f zufolge existiert eine Maxwellverteilung ω mit $f\leqq\omega$; wir erhalten aus Satz 5:

$$|\dot{f}_t(v_1)| = |(\hat{B} f_t)(v_1)|$$

$$\leqq \int |v_1 - v_2|\, I(v_1, v_2, e)(\omega(\tilde{v}_1)\omega(\tilde{v}_2) + \omega(v_1)\omega(v_2))\, d^3 v_2\, d^2 e \equiv \varphi(v_1) \tag{76}$$

$$\text{für fast alle} \quad v_1\in R^3 \quad \text{und alle} \quad t\in R^+.$$

Die Abbildung $R^+\to L^1(R^3)$, $t\mapsto f_t$ ist stetig differenzierbar; also ist $R^+\times R^3\to R$, $(t,v)\mapsto \dot{f}_t(v)$ Lebesgue-meßbar.

Die Funktion $I\times R^3\to R$, $(t,v)\mapsto\dot{f}_t(v)$ ist unter Berücksichtigung von (76) (für jedes kompakte Intervall $I\subset R^+$) Lebesgue-integrierbar. (77)

Die Eigenschaften (76), (77) implizieren:

$$\left|\frac{f_{s+t}(v)-f_t(v)}{s}\right| = \left|\left(\int_0^1 \dot{f}_{t+\alpha s}\, d\alpha\right)(v)\right| = \left|\int_0^1 \dot{f}_{t+\alpha s}(v)\, d\alpha\right| \leqq \varphi(v)$$

$$\text{für fast alle} \quad v \in R^3 .$$

Nun führen wir folgende Hilfsgrößen ein:

$$h_n(t) \equiv - \int_{|v| \leqq n} f_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v ,$$

$$g_n(t) \equiv - \int_{|v| \leqq n} \dot{f}_t(v) (\log f_t(v) + 1)\, d^3 v .$$

Es genügt, die folgenden Relationen zu beweisen:

a) $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = H(f_t)$ für alle $t \in R^+$.

b) h_n ist differenzierbar; es gilt $\dot{h}_n(t) = g_n(t)$ für alle $t \in R^+$.

c) g_n ist stetig.

d) g_n konvergiert lokal gleichmäßig in R^+ gegen die Funktion:

$$R^+ \to R, \ t \mapsto - \int \dot{f}_t(v) (\log f_t(v) + 1)\, d^3 v .$$

Beweis der Eigenschaften a), b), c), d):

a) Der Definition von f zufolge existieren positive Zahlen b_1, b_2 mit $|\log f_t(v)| \leqq b_1 + b_2 v^2$ für alle $t \in R^+$ und fast alle $v \in R^3$. Masse- und Energieerhaltung ergeben:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{|v| \geqq n} f_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v \right| = 0 .$$

b) Es sei eine Folge $\{s_n\}_{n\in N} \subset R^+$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ vorgegeben. Satz 5 zufolge ist die Abbildung $R^+ \to L^1(R^3), t \mapsto f_t$ stetig differenzierbar; es existiert also eine Teilfolge $\{\tilde{s}_n\}_{n\in N}$ mit den Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} f_{t+\tilde{s}_n}(v) = f_t(v) \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tilde{s}_n} (f_{t+\tilde{s}_n}(v) - f_t(v)) = \dot{f}_t(v) \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3 . \tag{78}$$

Der Mittelwertsatz ergibt:

$$\log f_{t+s}(v) - \log f_t(v) = (f_{t+s}(v) - f_t(v))\, u^{-1}(t, s, v) , \tag{79}$$

wobei $u(t, s, v)$ eine Zahl im Intervall ist, welches die beiden Zahlen $f_t(v)$ und $f_{t+s}(v)$ bilden.

Es gibt eine von s und t unabhängige Konstante c_n mit

$$|u^{-1}(t,s,v)\, f_{t+s}(v)| \leqq c_n \quad \text{für fast alle} \quad |v| \leqq n \tag{80}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (u^{-1}(t,\tilde{s}_n,v)\, f_{t+\tilde{s}_n}(v)) = 1 \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3\,. \tag{81}$$

Wir erhalten aus (75), (78), (79), (80), (81) durch Anwendung des Satzes von Lebesgue über dominante Konvergenz:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|v|\leqq n} f_{t+\tilde{s}_m}(v) \frac{1}{\tilde{s}_m} (\log f_{t+\tilde{s}_m}(v) - \log f_t(v))\, d^3 v = \int_{|v|\leqq n} \dot{f}_t(v)\, d^3 v\,. \tag{82}$$

Der Limes ist unabhängig von der gewählten Folge $\{s_n\}_{n\in N}$. Analog gilt:

$$\lim_{s\downarrow 0} \int_{|v|\leqq n} \frac{1}{s} (f_{t+s}(v) - f_t(v)) \log f_t(v)\, d^3 v = \int_{|v|\leqq n} \dot{f}_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v\,. \tag{83}$$

Die Eigenschaften (82) und (83) implizieren b).

c) Es gilt:

$$|f_{t+s}(v) - f_t(v)| \leqq 2\omega(v) \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3 \tag{84}$$

und

$$|u^{-1}(t,s,v)\, \dot{f}_{t+s}(v)| \leqq c_n\, \varphi(v) \quad \text{für fast alle} \quad |v| \leqq n\,. \tag{85}$$

Dabei wurden (76) und die Definition von $u(t,s,v)$ verwendet.

Sei $\{s_n\}_{n\in N}$ eine gegen Null konvergente Folge; es gibt eine Teilfolge $\{\tilde{s}_n\}_{n\in N}$, derart, daß die folgenden Relationen gelten:

$$\lim_{m\to\infty} (u^{-1}(t,\tilde{s}_m,v)\, \dot{f}_{t+\tilde{s}_m}(v)) = (f_t(v))^{-1}\, \dot{f}_t(v) \quad \text{für fast alle} \quad |v| \leqq n\,, \tag{86}$$

$$\lim_{m\to\infty} f_{t+\tilde{s}_m}(v) = f_t(v) \quad \text{für fast alle} \quad v \in R^3\,. \tag{87}$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und mit (84), (85), (86), (87) erhalten wir:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|v|\leqq n} \dot{f}_{t+\tilde{s}_m}(v) (\log f_{t+\tilde{s}_m}(v) - \log f_t(v))\, d^3 v = 0\,.$$

Analog gilt:

$$\lim_{s\downarrow 0} \int_{|v|\leqq n} (\dot{f}_{t+s}(v) - \dot{f}_t(v)) \log f_t(v)\, d^3 v = 0\,.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, daß

$$R^+ \to R,\ t \mapsto \int_{|v|\leqq n} \dot{f}_t(v) \log f_t(v)\, d^3 v$$

stetig ist. Ferner ist die Abbildung

$$R^+ \to R,\ t \mapsto \int_{|v|\leqq n} \dot{f}_t(v)\, d^3 v$$

wegen Satz 5 stetig. Damit ist c) bewiesen.

d) folgt aus (77) und der Eigenschaft: $|\log f_t(v)| \leqq b_1 + b_2 v^2$ für fast alle $v \in R^3$.

Anhang 3: Beweis des Lemmas 10

Die Gaußtransformation V_s wird auf $L^1(R^3)$ durch $(V_s f)(v) \equiv \int N_s(v-w)\, f(w)\, d^3w$ mit $N_s(v) \equiv (2\pi s)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2s}\right)$ definiert. Die Gruppe der Translationen auf $L^1(R^3)$ bezeichnen wir wie in Abschnitt 2 mit $\{\tau_w\}_{w \in R^3}$. Es gilt ([6], S. 236):

$$\|V_s f - f\|_1 = \int |N_1(w)\, ((\tau_{\sqrt{s}w} f)(v) - f(v))\, d^3w|\, d^3v\,.$$

Die Eigenschaften (22), (31) und die obige Formel ergeben für $f \in \hat{S}$:

$$\|V_s \hat{U}_t f - \hat{U}_t f\|_1 \leqq \int N_1(w)\, \|\tau_{\sqrt{s}w} \hat{U}_t f - \hat{U}_t f\|_1\, d^3w$$
$$= \int N_1(w)\, \|\hat{U}_t \tau_{\sqrt{s}w} f - \hat{U}_t f\|_1\, d^3w \leqq \int N_1(w)\, \|\tau_{\sqrt{s}w} f - f\|_1\, d^3w$$
$$\text{für alle} \quad s, t \in R^+\,.$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\sup_{t \in R^+} \|V_s \hat{U}_t f - \hat{U}_t f\|_1 \leqq 2 \int N_1(w)\, \|f\|_1\, d^3w \quad \text{für alle} \quad s \in R^+\,.$$

Das Lemma von Lebesgue-Fatou impliziert:

$$\limsup_{s \downarrow 0} \left(\sup_{t \in R^+} \|V_s \hat{U}_t f - \hat{U}_t f\|_1\right) \leqq \int N_1(w) \limsup_{s \downarrow 0} \|\tau_{\sqrt{s}w} f - f\|_1\, d^3w = 0. \tag{88}$$

$V_s(s>0)$ transformiert eine schwach konvergente Folge $\{f_n\}_{n \in N} \subset \hat{S}$ von Funktionen mit den Eigenschaften $\|f_n\|_1 = \|f_1\|_1, \hat{\sigma}_2(f_n) = \hat{\sigma}_2(f_1)$ für alle $n \in N$ in eine bezüglich der $L^1(R^3)$-Norm konvergente Folge $\{V_s f_n\}_{n \in N}$ ([8], S. 552). (89)

Sei $f \in \hat{S}$; $\{\hat{U}_{t_n} f\}_{n \in N}$ konvergiere schwach gegen $g \in L^1(R^3)$. Aus der Ungleichung

$$\|\hat{U}_{t_n} f - g\|_1 \leqq \|\hat{U}_{t_n} f - V_s \hat{U}_{t_n} f\|_1 + \|V_s \hat{U}_{t_n} f - V_s g\|_1 + \|V_s g - g\|_1$$

und den Relationen (88), (89) folgt: $\lim_{n \to \infty} \|\hat{U}_{t_n} f - g\|_1 = 0$.

Literatur

1. Povzner, A. Ya.: Zur Boltzmanngleichung in der kinetischen Theorie der Gase. Mat. Sb. **58**, 65—86 (1962).
2. Grünbaum, F. A.: Propagation of chaos for the Boltzmann equation. Arch. Rational Mech. Anal. **42**, 323—345 (1971).
3. Dorroh, J. R.: Some classes of semi-groups of nonlinear transformations and their generators. J. Math. Soc. Japan **20** (3), 437—455 (1968).
4. Bourbaki, N.: Intégration, chapitres 1, 2, 3 et 4. Paris: Hermann 1965.

5. Bourbaki, N.: Intégration, chapitre 5. Paris: Hermann 1967.
6. Yosida, K.: Functional analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
7. McKean, H. P.: Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas. Arch. Rational Mech. Anal. **21**, 343—367 (1966).
8. Morgenstern, D.: Analytical studies related to the Maxwell-Boltzmann equation. J. Rational Mech. Anal. **4**, 533—555 (1955).
9. Trotter, H. F.: Approximation of semi-groups of operators. Pacific J. Math. **8** (4), 887—919 (1958).
10. Dieudonné, J.: Foundations of modern analysis. New York: Academic Press 1960.

R. Bodmer
Seminar für theoretische Physik
E.T.H.
CH-8049 Zürich, Hönggerberg, Schweiz