Commun. math. Phys. 19, 189—203 (1970)

Problèmes mathématiques de l'équation de Boltzmann relativiste

G. PICHON

Faculté des Sciences d'Orléans

Réçu le 20 juin, 1970

Abstract. This work deals with relativistic Boltzmann equation and more particulary with integral operator of complete equation and integral operator of linearized equation. These operators depend on the differential cross section $h(\langle p, q\rangle, \cos\theta)$ which is a fonction of energy $\langle p, q\rangle$ and of the deviation angle θ. The only hypothesis is that h is a symetric function of $\cos\theta$. The second part deals essentially with linearized equation in Special Relativity. We take for the distribution function:

$$F(x, p) = a\, e^{-\frac{\lambda p}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda p}{2}} + \varepsilon f(x, p)\right)$$

where a is a constant, λ a constant vector and ε a small constant so that ε^2 can be neglected. We obtains the equation:

$$\frac{p^\alpha}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -K(p)\cdot f + G(f)$$

where $K(p)$ is a positive function and G an Hilbert-Schmidt operator. Then we resolve the Cauchy's problem by taking the Fourier's transformation of f, and in the last part by investigating properties of the resolvent of $-K+G$ we establish that as $x^0 \to +\infty$ the solution of this problem has for limit the equilibrium distribution $a\, e^{-\lambda p}$.

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'équation de Boltzmann relativiste et plus particulièrement à l'opérateur intégral de l'équation complète, à celui de l'équation linéarisée et au problème de Cauchy.

L'opérateur intégral de l'équation complète dépend essentiellement de la section efficace de choc $h(\langle p, q\rangle, \cos\theta)$ laquelle est une fonction de l'énergie $\langle p, q\rangle$ et de l'angle θ de déviation. Sous la seule hypothèse que h est une fonction symétrique de $\cos\theta$ nous obtenons des propriétés générales de cet opérateur qui ont en particulier comme conséquence le théorème des moments (cf. [1]).

La seconde partie est consacrée à la linéarisation de l'équation. Des études ont déjà été faites pour étudier l'équation de Boltzmann au voisinage de la solution d'équilibre a $e^{-\lambda p}$ et ceci par des développements à l'aide de diverses familles de polynômes (cf. par exemple [3, 12, 13]). Ici nous nous plaçons en Relativité restreinte et cherchons une solution sous la forme $F = ae^{-\frac{\lambda p}{2}}\left(e^{-\frac{\lambda p}{2}} + \varepsilon f\right)$ en négligeant les termes en ε^2 et sans préjuger de la forme de la fonction f. Cette dernière satisfait alors à l'equation linéaire.

$$\frac{p^\alpha}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -K(p)f + G(f), \tag{I}$$

K étant une fonction et G un opérateur intégral ne dépendant que du moment p. Avec une hypothèse simple sur la section efficace de choc, nous étudions le comportement asymptotique de la fonction $K(p)$ et obtenons des propriètés remarquables pour l'opérateur G à savoir que G est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans l'espace $\mathscr{H}$ des fonctions de carré sommable en p et que $-K(p)+G$ est un opérateur dissipatif.

Pour étudier le problème de Cauchy pour l'Eq. (I) nous effectuons une transformation de Fourier par rapport aux variables d'espace (x^j) et nous ramenons à une équation de la forme:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^0} = (A(\tilde{y}) + G)\,\hat{f} \tag{II}$$

$A(\tilde{y})$ étant un opérateur de multiplication dans $\mathscr{H}$ dépendant de la variable d'espace $\tilde{y}$; nous pouvons alors appliquer la théorie des semi-groupes d'opérateurs à un paramètre. Les propriétés obtenues pour les opérateurs K et G permettent alors une étude très précise du spectre de l'operateur $A(\tilde{y})+G$. A l'aide d'une technique déjà utilisée par Arseniev pour un problème analogue (cf. [11]), nous montrons que ce spectre est tout entier dans un demi plan $\mathrm{Re}\,\mu < -d_0$ avec $d_0 > 0$ ce qui a pour conséquence imprtante que la solution du problème (II) a pour limite 0 quand $x^0 \to +\infty$ au sens de la norme de l'espace des fonctions de carré sommable en p et $\tilde{y}$.

Enfin nous montrons que le problème de Cauchy pour l'Eq. (I) a une solution unique en un sens que nous précisions et nous étudions le comportement de cette solution quand $x^0 \to +\infty$.

I. L'Equation de Boltzmann

Dans cette première partie nous allons rappeler l'expression de l'équation de Boltzmann en relativité générale et en l'absence de champ électromagnétique. Pour l'établissement de cette équation on pourra consulter [1–3]. Sur la variété espace temps V^4 on désignera par $g_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique (cf. [4]) de signature $(+---)$. La vitesse de la lumière sera prise pur unité. Le fluide étudié est constitué d'un seul type de molécules. La masse d'une molécule est m et son quadrivecteur moment sera désigné par p, ou q.

Etant donné deux champs de vecteurs u et v quelconques nous poserons:

$$uv = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle = \sqrt{|(uv)^2 - (uu)(vv)|}\,.$$

En particulier on a:

$$pp = m^2, \langle p, q\rangle = \sqrt{(pq)^2 - m^4}\,.$$

Dans l'espace tangent au point (x^α) de V^4 on désignera par P le demi hyperboloïde d'équation:

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = m^2; \qquad p^0 > 0\,.$$

Sur P nous prendrons la forme élément de volume invariant (cf. [3]):

$$dP = \frac{\sqrt{-g}}{p^0}\, dp^1 dp^2 dp^3$$

la probabilité pour qu'une molécule de moment p se trouve au point $x = (x^\alpha)$ de V^4 est décrite par la fonction $F(x, p)$.

Une molécule de moment p rencontrant une molécule de moment q, elles se retrouvent après le choc comme moments respectifs p' et q'. Nous supposerons les chocs élastiques c'est à dire les relations:

$$p + q = p' + q', \qquad pp = qq = p'p' = q'q' = m^2\,.$$

On vérifie alors aisément les relations:

$$pq = p'q' \quad \text{et} \quad \langle p, q\rangle = \langle p', q'\rangle$$

quand x est fixé, nous ferons l'abus habituel de notations: $F(x, p) = F(p)$.

L'Equation de Boltzmann

Elle s'écrit (cf. [1]):

$$p^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\varrho} p^\beta p^\varrho \frac{\partial F}{\partial p^\alpha} = I(F) \tag{I–1}$$

où les $\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}$ sont les symboles de Christoffel et I un opérateur intégral:

$$I(F) = \int_{P'} \int_{Q'} [F(p')\, F(q') - F(p)\, F(q)]\, \langle p, q\rangle\, H(p, q, p')\, dP' dQ\,.$$

L'opérateur I est complètement déterminé quand on connaît la fonction $H(p, q, p')$. Dans le cas du choc élastique on peut prendre:

$$H(p, q, p') = \frac{(p+q)(p+q)}{\langle p, q\rangle}\, h(\langle p, q\rangle, \cos\theta)\, \delta((p-p')(p+q))$$

où δ désigne la mesure de Dirac et h une fonction dépendant seulement de deux arguments à savoir $\langle p, q\rangle$ qui est un terme d'énergie et $\cos\theta$, θ étant l'angle de déviation.

De façon plus précise pour calculer $I(F)$, on peut se placer dans une première phase dans l'espace à 3 dimensions orthogonal au vecteur $p+q$ et rapporter cet espace à un repère orthonormé ξ, η, ζ avec:

$$\zeta = \frac{p-q}{\sqrt{2(pq-m^2)}}.$$

En désignant par θ et ψ un système de coordonnées sphériques de la projection $\tilde{p}'$ de p' sur cet espace on a:

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{p+q}{2} + \frac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}} (\xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta \sin\psi + \zeta \cos\theta), \\ q' &= \frac{p+q}{2} - \frac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}} (\xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta \sin\psi + \zeta \cos\theta). \end{aligned}\right\} \text{(I–3)}$$

On vérifie aisément que l'on a:

$$1 + \cos\theta = \frac{2(pq - pp')}{pq - m^2}$$

et que l'on peut écrire (cf. [1])

$$I(F) = \int_Q \langle p, q\rangle \, dQ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (F(p')\, F(q') - F(p)\, F(q))\, h(\langle p, q\rangle, \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

où p' et q' sont donnés par les formules (I–3).

Etude de l'operateur I

Pour étudier quelques propriétés importantes de l'opérateur I nous poserons dans la formule (I–3) $\sigma = \xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta + \zeta \cos\theta$ et $d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\psi$. Pour abréger les notations, étant donné une fonction $f(p)$ nous poserons

$$f(p) = f, \quad f(q) = f_1, \quad f(p') = f', \quad f(q') = f_1'$$

et pour deux fonctions f et g:

$$[f, g] = \tfrac{1}{2} (f' g_1' + f_1' g' - f g_1 - f_1 g).$$

Enfin nous utiliserons la formule démontrée par Chernikov (cf. [1]) et aisée à vérifier: étant donné une fonction Φ des trois variables p', q', p on a:

$$\int \Phi(p', q', p)\, \delta((p'-p)(p'+q'))\, dQ' = \int \Phi(p', q', p)\, \delta((p-p')(p+q))\, dQ \quad \text{(I–4)}$$

où dans la deuxième intégrale $q' = p + q - p'$.

Soit alors $\Phi(p,q)$ une fonction de p et q er $\phi(p)$ une fonction de p. posons:

$$T[\Phi]=\int(\Phi(p',q')-\Phi(p,q))\langle p,q\rangle H(p,q,p')\,dP'\,dQ$$

on vérifie alors la formule suivante par exemple en utilisant un système d'angles d'Euler:

$$\int T[\Phi]\,\phi(p)\,dP=\tfrac{1}{4}\int\langle p,q\rangle\,dP\,dQ\int_{\Sigma}(\Phi(p,q)-\Phi(p',q')(\phi'+\phi'_1-\phi-\phi_1)\,h\,d\sigma \tag{I–5}$$

où Σ désigne la sphère unité décrite par σ et où p' et q' sont données par les formules (I–3).

En particulier si nous prenons $\Phi(p,q)=F(p)\,F(q)$ alors $T[\Phi]=I(F)$ et nous avons:

$$\int I(F)\,\phi(p)\,dP=-\tfrac{1}{4}\int\langle p,q\rangle\,dP\,dQ\int_{\Sigma}[F,F](\phi'+\phi'_1-\phi-\phi_1)\,h\,d\sigma\,. \tag{I–6}$$

II. Equation de Boltzmann linéarisée

Dans tout ce qui suit nous nous plaçons en Relativité restreinte, l'espace temps R^4 étant rapporté à un repère orthonormé (e_0, e_i), $(i,j=1,2,3)$. Nous poserons alors dans ce repère

$$p=\sqrt{m^2+r^2}\,e_0+r\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha\alpha=-1\,,$$

$$dP=\frac{1}{p^0}\,dp^1dp^2dp^3=\frac{1}{p^0}\,d\tilde{p}; \qquad \tilde{p}=(p^1,p^2,p^3)\,.$$

L'équation de Boltzmann s'écrit:

$$p^\alpha\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}=I(F)\,. \tag{II–1}$$

On sait qu'à l'équilibre la fonction de distribution $F(x,p)$ peut s'écrire

$$F(x,p)=a(x)\,e^{-\lambda p} \quad \text{(cf. [5])}$$

où a est une fonction dépendant seulement de x et λ une quadrivecteur orienté dans le temps $(\lambda^0>0)$ ne dépendant aussi que de x.

Nous étudions les mouvements des fluides au voisinage d'un équilibre particulier obtenu en prenant a et λ constants. Nous cherchons alors F solution de (II–1) sous la forme:

$$F_1=a\,\omega(\omega+\varepsilon f) \tag{II–2}$$

où l'on a posé $\omega=e^{-\frac{1}{2}\lambda p}$ et où ε est une constante assez petite pour négliger ε^2; f est une fonction de x et p.

Nous ferons les deux hypothèses suivantes:

(H_1): la section efficace de choc h est une fonction symétrique de $\cos\theta$ et il existe deux constantes positives A et B telles que:

$$A(1-\cos^2\theta)\langle p,q\rangle \leqq h \leqq B(1-\cos^2\theta)\langle p,q\rangle .$$

(H_2): Dans le repère (e_0, e_i) on a $\lambda^0=(1+\delta)\sqrt{\lambda\lambda}$ où δ est strictement positif, la signification physique de ces hypothèses est la suivante:

(H_1) signifie que la section efficace de choc tend vers l'infini avec l'énergie et s'annule pour des angles de déviation égaux à 0 ou π.

(H_2) signifie que l'hyperplan $x^0=0$ qui dans R^4 portera des données de Cauchy n'est pas orthogonal aux lignes engendrées par le champ de vecteurs λ.

Les notations du paragraphe précédent seront utilisées avec cette légère différence: lorsque nous prendrons $\Phi(p,q)=\frac{1}{2}(F(p)G(q)+F(q)G(p))$ nous écrirons $T[F,G]$ au lieu de $T[\Phi]$; ainsi avec cette notation $T[F,F]=I(F)$.

Equation linéarisée

Pour linéariser l'Eq. (II–1) nous calculons d'abord $[F,F]$. On vérifie aisément compte tenu des chocs élastiques que:

$$[F,F]=2a^2\varepsilon[\omega f,\omega^2]$$

si bien que l'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit:

$$\boxed{p^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}=2a\,\omega^{-1}\,T[\omega f,\omega^2]}. \tag{II–3}$$

Etude de l'opérateur T

Remarquons d'abord que T ne dépend pas de la variable x. Nous désignerons par $\mathscr{H}$ l'space de Hilbert des fonctions $\phi(p)=\phi(p^0,p^i)$ telles que en posant $p=\sqrt{m^2+r^2}\,e_0+r\,\alpha$ on ait:

$$\int|\phi(\sqrt{m^2+r^2},p^i)|^2\,dp^1\,dp^2\,dp^3<\infty .$$

Tous les opérateurs que nous considérerons seront des opérateurs linéaires dans $\mathscr{H}$. Le produit scalaire de deux fonctions dans $\mathscr{H}$ sera désigneé par (f/g)

$$(f/g)=\int f\cdot\bar{g}\,d\tilde{p},\qquad \bar{g}\text{ imaginaire conjuguée de }g.$$

Nous poserons:

$$L(f)=2\,\frac{\omega^{-1}a}{p^0}\,T[\omega f,\omega^2]$$

On a alors

$$L(f) = -K(p)\cdot f + G_1(f) + G_2(f) \quad \text{avec:}$$

$$K(p) = \frac{a}{p^0} \int e^{-\lambda q} \langle p, q\rangle \, dQ \left(\int_\Sigma h \, d\sigma \right),$$

$$G_1(f) = -\frac{a}{p^0} \int e^{-\frac{1}{2}\lambda(p+q)} f(q) \langle p, q\rangle \, dQ \left(\int_\Sigma h \, d\sigma \right),$$

$$G_2(f) = \frac{a\omega^{-1}}{p^0} \int (\omega' f' \omega_1'^2 + \omega_1' f_1' \omega'^2) \langle p, q\rangle H(p, q, p') \, dP' \, dQ .$$

L'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit alors en posant $G = G_1 + G_2$

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = p^0 L(f) = -p^0 K(p) f + p^0 G(f) .$$

Etude de $K(p)$

Sous l'hypothèse H_1 on trouve aisément que:

$$K(p) \geqq \frac{8\pi a A}{3p^0} \int e^{-\lambda q} (q_\alpha q_\beta p^\alpha p^\beta - m^4) \, dQ .$$

Si nous introduisons les fonctions de Bessel (cf. [6, 7])

$$K_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{1, 3 \ldots (2n-1)} \int_0^\infty \exp(-\alpha chs) \, sh^{2n} s \, ds$$

avec $\alpha = m\sqrt{\lambda\lambda}$ il vient:

$$K(p) \geqq \frac{32\pi^2 a m^4}{3} A \left[\frac{3K_2(\alpha)}{\alpha} (1 + \delta - \sqrt{\delta^2 + 2\delta})^2 r + \left(\frac{K_1(\alpha)}{\alpha} + \frac{K_2(\alpha)}{\alpha^2} \right) (\delta^2 + 2\delta) m \right]$$

ce qui permet d'énoncer:

Proposition 1. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) il existe deux constantes strictement positives k_0 et k_1 telles que quelque soit $p: K(p) \geqq k_0 + k_1 r$.*

Etude de l'opérateur G

Proposition 2. *G_1 est un opérateur de Hilbert Schmidt* (cf. [8], p. 277).

On a en effet: $G_1(f) = \int L_1(p, q) f(q) \, d\tilde{q}$ avec

$$\int |L_1(p, q)|^2 \, d\tilde{p} \, d\tilde{q} \leqq \left(\frac{8\pi a B}{3} \right)^2 \int_{P,Q} e^{-\lambda(p+q)} \langle p, q\rangle^4 \, dP \, dQ < \infty .$$

Proposition 3. *G_2 est un opérateur de Hilbert Schmidt.*

On a en effet $G_2(f) = \int L_2(p, q') f(q')\, d\tilde{q}'$ avec

$$|L_2(p, q')| \leqq \frac{16\pi\, aB}{p^0 q'^0} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{pq'+m^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{\varrho\sqrt{\lambda\lambda}}{2}} (2\varrho^2 + pq' + m^2)\, \varrho\, d\varrho$$

d'où $\int |L_2(p, q')|^2\, d\tilde{p}\, d\tilde{q}' < \infty$.

Il en résulte alors que $G = G_1 + G_2$ est un opérateur de Hilbert Schmidt donc en particulier un opérateur compact.

Etude de l'opérateur L

Proposition 4. *L'opérateur L est un opérateur auto-adjoint dissipatif dans $\mathscr{H}$. On a $(L(f)/f) = 0$ si et seulement si $L(f) = 0$ c'est-à-dire si f est de la forme $f = e^{-\frac{\lambda p}{2}} (\beta - vp)$, β est une constante et v un vecteur constant.*

Cette proposition se démontre en appliquant la formule (I–5) au produit scalaire

$$(L(f)/g) = 2a \int \omega^{-1}\, T[\omega f, \omega^2]\, g\, dP.$$

Il vient alors $(L(f)/f) \leqq 0 \quad \forall f \in \mathscr{H}$.

La deuxième partie de la proposition s'obtient en utilisant les résultats obtenus par Chernikov dans [5].

III. Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée

Le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée se formule de la façon vague suivante: trouver une fonction $f(x^0, \tilde{x}, p)$ satisfaisant à:

$$\left\{\begin{array}{l} p^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 2a\, \omega^{-1}\, T[\omega f, \omega^2] \\ f(0, \tilde{x}, p) = f_0(\tilde{x}, p) \qquad \tilde{x} = (x^1, x^2, x^3) \end{array}\right.$$

ou encore, en désignant par G la somme des opérateurs G_1 et G_2 étudiés au paragraphe précédent:

$$\left\{\begin{array}{l} p^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -p^0 K(p) f + p^0 G(f) = p^0 L(f) \\ f(0, \tilde{x}, p) = f_0(\tilde{x}; p)\,. \end{array}\right. \tag{I}$$

Les qualités exigées por la fonction f_0 qui est une donnée de Cauchy, et celles qui en résulteront pour la solution f seront précisées dans le théorème final. Pour résoudre le problème (I), nous allons d'abord résoudre une famille de problèmes de Cauchy formels obtenus de la façon suivante:

Etant donné deux vecteurs (x^α) et (y^α) de R^4 nous posons $\tilde{x}\cdot\tilde{y}=\sum_{j=1}^{3} x^j y^j$ et à chaque fonction $f(x^0, x^j, p)$ nous associons sa transformée de Fourier par rapport aux variables d'espace:

$$\hat{f}(x^0,\tilde{y},p)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{R^3} e^{-i\tilde{x}\cdot\tilde{y}} f(x^0,\tilde{x},p)\,d\tilde{x}\,;\, d\tilde{x}=dx^1\,dx^2\,dx^3\,.$$

Si nous appliquons formellement cette transformation de Fourier aux relations (I) il vient:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^0}=-i\left(\frac{\tilde{p}}{p^0}\cdot\tilde{y}\right)\hat{f}-K(p)\,\hat{f}+G(\hat{f})\\ &\hat{f}(0,\tilde{y},p)=\hat{f}_0(\tilde{y},p)\,. \end{aligned}\right. \tag{II}$$

Maintenant, $\tilde{y}$ étant un vecteur fixe nous allons étudier le problème de Cauchy (II) à l'aide de techniques d'analyse fonctionnelle puis avoir étudié les propriétés spectrales de l'opérateur dans $\mathscr{H}$:

$A(\tilde{y})+G=-i\left(\dfrac{\tilde{p}}{p^0}\,\tilde{y}\right),\ -K(p)+G$ nous reviendrons au problème (I).

Nous poserons pour simplifier l'écriture $\dfrac{\tilde{p}}{p^0}=\tilde{q}$.

Etude du problème de Cauchy (II)

Nous allons utiliser la théorie des semi-groupes d'opérateurs à un paramètre dans $\mathscr{H}$ (cf. [8], p. 231, ou [9], p. 302).

Dans $\mathscr{H}$ l'opérateur de multiplication $(A(\tilde{y})=-(i(\tilde{q}\,\tilde{q})+K(p))$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe à un paramètre $U(x^0,\tilde{y})$ défini par:

$$U(x^0,\tilde{y})\,(f)=\exp\{-(i(\tilde{q}\cdot\tilde{y})+K(p))\,x^0\}\cdot f\,.$$

D'autre part d'après les propositions 2 et 3 du paragraphe II, G est un opérateur borné dans $\mathscr{H}$; il résulte alors du théorème 13-2-1 de [9] que $A(\tilde{y})+G$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe continu de classe C_0, que nous désignerons par $V(x^0,\tilde{y})$. Soit alors $\mathscr{D}(\tilde{y})$ le domaine de définition de l'opérateur $A(\tilde{y})+G$, en appliquant le théorème 23.8.1 de [9] nous obtenons.

Théorème I. *Si $\hat{f}_0(\tilde{y},p)$ appartient à $\mathscr{D}(\tilde{y})$, le problème de Cauchy (II) admet une solution unique $\hat{f}(x^0,\tilde{y},p)$ qui appartient à $\mathscr{H}$ quelque soit $x^0\geqq 0$. Cette solution est donnée par:*

$$\hat{f}(x^0,\tilde{y},p)=V(x^0,\tilde{y})\,(\hat{f}_0)\,.$$

Remarquons que $\mathcal{D}(\tilde{y})$ n'est pas vide car on trouve aisément des fonctions $\phi(p)$ telles $(-i(\tilde{q}, \tilde{y}) + K(p))\,\phi(p)$ soit dans $\mathcal{H}$. De plus on sait que $\mathcal{D}(\tilde{y})$ est dense dans $\mathcal{H}$ (cf. [8], p. 237).

Etude du semi groupe d'opérateurs $V(x^0, \tilde{y})$

En utilisant la minoration de la proposition 1 du paragraphe II: $K(p) > k_0 + k_1 r$ il vient

$$\|U(x^0, \tilde{y})\| \leqq \exp(-k_0 x^0)$$

donc d'après le corollairedu théorème 13.2.1 de [9]:

$$\|V(x^0, \tilde{y})\| \leqq \exp(\|G\| - k_0)\, x^0 .$$

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\tilde{y})$ et soit $x_1^0 < x_2^0$, en utilisant le fait que L est dissipatif on obtient:

$$\|V(x_2^0, \tilde{y})(\phi)\|^2 \leqq \|V(x_1^0, \tilde{y})(\phi)\|^2 ,$$

$$\|V(x_2^0, \tilde{y})(\phi)\|^2 \leqq (\exp(\|G\| - k_0)\, x_1^0)^2 \,\|\phi\|^2$$

et comme cette inégalité est vraie quelque soit $x_1^0 > 0$ nous avons donc

$$\|V(x^0, \tilde{y})(\phi)\| \leqq \|\phi\| .$$

Proposition 5. *Le semi-groupe $V(x^0, \tilde{y})$ est un semi-groupe d'opérateurs contractants.*

Etude du résolvant de l'opérateur $A(\tilde{y}) + G$

Les résultats de cette étude nous seront nécessaires pour étudier la solution du problème (I) et son comportement quand $x^0 \to \infty$.

E étant l'opérateur identique dans $\mathcal{H}$ considérons le résolvant de $A(\tilde{y}) + G$ soit

$$R(\mu, \tilde{y}) = (\mu E - A(\tilde{y}) - G)^{-1} .$$

Si $\phi \in \mathcal{D}(\tilde{y})$, nous savons que:

$$V(x^0, \tilde{y})(\phi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} \exp(\mu x^0)\, R(\mu, \tilde{y})(\phi)\, d\mu, \alpha > 0 .$$

Nous allons étudier les singularités de la fonction $\mu \to R(\mu, \tilde{y})$. Pour cela il est commode d'introduire une nouvelle fonction de μ à valeurs opérateurs à savoir, $\tilde{y}$ étant fixé:

$$H(\mu, \tilde{y}) = \frac{1}{\mu + i(\tilde{q} \cdot \tilde{y}) + K(p)} \cdot G = \frac{1}{\mu - A(\tilde{y})} \cdot G .$$

On vérifie aisément que si $\phi \in \mathscr{H}$:

$$R(\mu, \tilde{y})(\phi) = (E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1} \frac{1}{\mu - A(\tilde{y})}(\phi) .$$

k_0 étant la constante de la proposition 1 soit alors δ un nombre positif fixé tel que $-k_0 + \delta < 0$. Alors si $\operatorname{Re}\mu > -k_0 + \delta$ les seules singularités de la fonction $R(\mu, \tilde{y})$ sont celles de la fonction $(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}$. L'avantage de l'introduction de $H(\mu, \tilde{y})$ réside dans la proposition suivante qu'on trouvera démontrée par exemple dans [10]:

Proposition 6. *Si $H(\mu, \tilde{y})$ est analytique dans le demi plan* $\operatorname{Re}\mu \geqq -k_0 + \delta$ *alors $(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}$ est analytique dans ce demi plan excepté aux points μ pour lesquels l'équation $\phi = H(\mu, \tilde{y})(\phi)$ a une solution non triviale, chacun de ces points est un pôle isolé de $(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}$.*

Posons alors $|\tilde{y}| = \sqrt{\tilde{y}\,\tilde{y}}$ et étudions la fonction $H(\mu, \tilde{y})$ on a la proposition:

Proposition 7. *Pour* $\operatorname{Re}\mu \geqq -k_0 + \delta$.

7.1. *$\|H(\mu, \tilde{y})\|$ tend vers 0 quand $\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}|^2}$ tend vers l'infini et il existe donc un nombre $\omega(\delta)$ tel que $\|H(\mu, \tilde{y})\| < 0.5$ dès que $\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}|^2} \geqq \omega(\delta)$.*

7.2. *L'application $(\mu, \tilde{y}) \to (E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}$ est continue par rapport au couple $(\mu, \tilde{y})$ pour la topologie de la convergence uniforme en tous les points où elle est définie.*

Pour établir cette proposition on utilise le résultat suivant aisé à vérifier: Dans un espace de Banach approximable (donc dans un Hilbert) étant donné un opérateur $G_0(\alpha)$ dépendant du paramètre α et tendant vers 0 pour la topologie de la convergence simple et un opérateur compact G, alors le produit $G_0(\alpha)$. G tend vers 0 avec α pour la topologie de la convergence uniforme.

Désignons alors par $S(\delta, \tilde{y})$ la partie du spectre de $A(\tilde{y}) + G$ qui se trouve dans le demi plan $\operatorname{Re}\mu \geqq -k_0 + \delta$ et posons $\mu = \sigma + i\tau$. On vérifie aisément la proposition.

Proposition 8. 8.1. *Pour tout $\tilde{y}$ fixé $R(\mu, \tilde{y})$ est analytique par rapport à μ dans tout le demi plan $\sigma \geqq -k_0 + \delta$ excepté aux points μ_k de $S(\delta, \tilde{y})$; ces points sont des valeurs propres de $A(\tilde{y}) + G$.*

8.2. *On a $\sigma_k \leqq 0$ l'égalité ayant lieu seulement pour $|y| = |\mu_k| = 0$.*

8.3. *On a $|\tau_k| < \omega(\delta)$, $\omega(\delta)$ étant la constante de la proposition 7.*

8.4. *Pour $|\tilde{y}| > \omega(\delta)$ la fonction $R(\mu, \tilde{y})$ n'a pas de points singuliers dans le demi plan $\delta > -k_0 + \delta$.*

On utilise pour cela la proposition 4.

Proposition 9. *Soit b un nombre strictement positif quelconque et désignons par $d(\tilde{y})$ la distance du spectre de $A(\tilde{y}) + G$ à l'axe imaginaire.*

9.1. *Si nous posons $2d_0(b) = \inf\limits_{|\tilde{y}| \geqq b} d(\tilde{y})$ alors $d_0(b) > 0$.*

9.2. *Il existe une constante $C(b)$ telle que sur la droite* $\operatorname{Re}\mu = -d_0(b)$ *et pour* $|\tilde{y}| > b$ *on ait* $\|R(\mu, \tilde{y})\| < C(b)$, *et dans le demi plan* $\operatorname{Re}\mu > -d_0(b)$ *la fonction* $R(\mu, \tilde{y})$ *est analytique par rapport à* μ.

D'après la proposition 8 on sait que si $|\tilde{y}| > \omega(\delta)$ on a $d(\tilde{y}) > |-k_0 + \delta|$. Pour démontrer 9–1 il suffit donc de prouver que

$$\inf_{b \leqq |\tilde{y}| \leqq \omega(\delta)} d(\tilde{y}) > 0 .$$

Supposons cette dernière quantité nulle: c'est dire qu'il existe une suite $\{\tilde{y}_n\}$ convergeant vers $\tilde{y}_0$ avec $b \leqq |\tilde{y}_0| \leqq \omega(\delta)$ et une suite de complexes $\mu_n = \sigma_n + i\tau_n$ telle que $\sigma_n \to 0$, μ_n étant un pôle de $R(\mu, y_n)$. Il existe donc un entier n_0 tel que pour $n > n_0$ on ait $\sigma_n > -k_0 + \delta$ c'est à dire d'après la proposition 8, $|\tau_n| \leqq \omega(\delta)$. La fonction $\|(E - H(i\tau, \tilde{y}_0))^{-1}\|$ étant continue par rapport à τ, elle est bornée pour $|\tau| \leqq \omega(\delta)$ par une constante C_1. D'après la proposition 9–2 il existe alors un entier n_1 tel que pour $n > n_1$ et $n > n_0$ on ait:

$$\|(E - H(\mu_n; \tilde{y}_n))^{-1}\| < 2C_1 \quad \text{ce qui entraîne} \quad \|R(\mu_n, \tilde{y}_n)\| < \frac{2C_1}{\delta}$$

en contradiction avec le choix des suites $\{\tilde{y}_n\}$ et $\{\mu_n\}$ *d'où* 9.1.

Pour démontrer 9–2 remarquons d'abord que si $\sqrt{|\mu|^2 |\tilde{y}|^2} \geqq \omega(\delta)$ et $\operatorname{Re}\mu > -k_0 + \delta$ on a d'après la proposition 7:

$$\|R(\mu, \tilde{y})\| < \frac{1}{\delta} \|(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}\| \leqq \frac{2}{\delta}$$

On est donc ramenés à majorer $|R(\mu, \tilde{y})|$ sur le compact défini par:

$$\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}^2} \leqq \omega(\delta),\ |\tilde{y}| \geqq b,\ \operatorname{Re}\mu = d_0(b) .$$

Cette majoration résulte de la continuité de $\|(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}\|$ sur ce compact. L'analycité de $R(\mu, \tilde{y})$ résulte alors de la proposition 8 et du choix de $d_0(b)$.

Proposition 10. *Posons* $\mu = \sigma + i\tau$ *avec* $\sigma \geqq -k_0 + \delta$. *Alors pour* $\tilde{y}$ *fixé, quelque soit* $\phi \in \mathscr{H}$ *on a:* $\lim_{|\tau| \to \infty} \|R(\mu, \tilde{y})(\phi)\| = 0$ *la limite étant uniforme par rapport à* $\sigma \geqq -k_0 + \delta$.

On peut toujours supposer $|\tau| > \omega(\delta)$ alors:

$$\|R(\mu, \tilde{y})(\phi)\|^2 \leqq \|(E - H(\mu, \tilde{y}))^{-1}\|^2 \int \frac{|\phi(p)|^2}{\delta^2 + (\tau + \tilde{q} \cdot \tilde{y})^2} \, d\tilde{p}$$

soit encore

$$\|R(\mu, \tilde{y})(\phi)\|^2 \leqq 4 \int \frac{|\phi(p)|^2}{\delta^2 + (\tau + \tilde{q} \cdot \tilde{y})^2} \, d\tilde{p}$$

ce qui démontre le résultat.

Proposition 11. *Pour tout* $\phi \in \mathscr{H}$ *et pour tout* $\tilde{y}$ *tel que* $|\tilde{y}| > 0$ *on a*

$$\lim_{x^0 \to \infty} \| V(x^0, \tilde{y})(\phi) \| = 0 .$$

$A(\tilde{y}) + G$ étant le générateur infinitésimal d'un semi groupe contractant de classe C_0, l'intersection des domaines de $A(y) + G$ et de $(A(y) + G)^2$ est dense dans $\mathscr{H}$. Pour démontrer la proposition 11, il suffit donc d'après le théorème de Banach-Steinhauss de la démontrer pour ϕ appartenant à cette intersection. Nous avons alors:

$$V(x^0, \tilde{y})(\phi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} \exp(\mu\ x^0)\, R(\mu, \tilde{y})(\phi)\, d\mu, \quad \alpha > 0 .$$

Avec les notations de la proposition 9, pour $|\tilde{y}| \geqq b > 0$ prenons le contour d'intégration défini par le rectangle

$$\alpha - i\beta, \quad \alpha + i\beta, \quad -d_0(b) + i\beta, \quad -d_0(b) - i\beta .$$

$R(\mu, \tilde{y})$ est analytique dans ce rectangle et les intégrales sur les côtés parallèles à l'axe réel tendent vers 0 quand $\beta \to \infty$. On a donc

$$V(x^0, \tilde{y})(\phi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-d_0 - i\beta}^{-d_0 + i\beta} \exp(\mu\ x^0)(R(\mu, \tilde{y})(\phi)\, d\mu .$$

Soit pour $x^0 > 0$:

$$\begin{aligned} V(x^0, \tilde{y})(\phi) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int R(\mu, \tilde{y})(\phi)\, d\left(\frac{\exp \mu\, x^0}{x^0}\right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int \frac{\exp(\mu\, x^0)}{x^0} \left(\frac{dR}{d\mu}\right)(\phi)\, d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-d_0 - i\beta}^{-d_0 + i\beta} \frac{\exp(\mu\, x^0)}{x^0} R^2(\mu, \tilde{y})(\phi)\, d\mu . \end{aligned}$$

Mais $R(\mu, \tilde{y}) = E + \dfrac{R(\mu, \tilde{y})(A(y) + G)}{\mu}$ donc pour ϕ appartenant au domaine de $(A(y) + G)^2$ et pour $\operatorname{Re}\mu = -d_0$ on a, C étant la constante de la proposition 9:

$$\| R^2(\mu, \tilde{y})(\phi) \| \leqq \frac{\|\phi\|^2 + 2C \|(A(\tilde{y}) + G)(\phi)\| + C^2 \|(A(\tilde{y}) + G^2(\phi)\|}{|\mu|^2}$$

ce qui entraîne, C_2 étant une constante en x^0:

$$\| V(x^0, \tilde{y})(\phi) \| < C_2 \exp(-d_0 x^0)$$

ce qui démontre la proposition 11.

Etude du problème de Cauchy I

Nous dirons qu'une propriété est vraie pour presque tout $\tilde{y}$ si elle est vraie presque partout dans l'espace des $\tilde{y}$. Nous allons démonter le théorème suivant:

Théorème II. *Soit $f_0(\tilde{x}, p)$ une fonction telle que $\int |f_0(\tilde{x}, p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} < \infty$ et telle que sa transformée de Fourier en $\tilde{x}$ soit $f_0(\tilde{y}, p)$, appartienne à $\mathscr{D}(\tilde{y})$ pour presque tous les $\tilde{y}$.*

Alors il existe une fonction $f(x^0, \tilde{x}, p)$ définie pour presque tout $\tilde{p}$ et presque tout $\tilde{x}$ telle que

$$\int |f(x^0, \tilde{x}, p)|^2\, d\tilde{x}\, d\tilde{p} < \infty$$

quelque soit $x^0 > 0$ et telle que sa transformée de Fourier par rapport à $\tilde{x}$ soit solution du problème (II).

On a de plus $\lim_{x^0 \to \infty} \int |f(x^0, \tilde{x}, p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} = 0$.

C'est en cesens que nous dirons que f est solution du problème (I). $f_0(\tilde{x}, p)$ étant donc donnée et satisfaisant aux hypothèses du théorème II, nous lui associons $\hat{f}_0(\tilde{y}, p)$. D'après le théorème I le problème (II) admet une solution unique $\hat{f}_0(x^0, \tilde{y}, p)$ qui pour x^0 et $\tilde{y}$ fixés est un élément de $\mathscr{H}$.

Montrons que $\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)$ est mesurable en $\tilde{y}$.

Tout d'abord $\hat{f}(\tilde{y}, p)$ est mesurable en $\tilde{y}$.

Par ailleurs pour $\operatorname{Re}\mu = \alpha$ assez grand on a:

$$R(\mu, \tilde{y})\, \hat{f}_0(\tilde{y}, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu + A(\tilde{y})} \left(G \cdot \frac{1}{\mu + A(y)}\right)^k \hat{f}_0(\tilde{y}, p).$$

Donc $R(\mu, \tilde{y})\, \hat{f}_0(\tilde{y}, p)$ est mesurable comme limite des fonctions mesurables donc aussi

$$\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \exp \mu x^0 R(\mu, \tilde{y})\, \hat{f}_0(\tilde{y}, p)\, d\mu.$$

Mais $\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)$ étant mesurable en $\tilde{p}$ il en résulte que $\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)$ est mesurable pour tout $x^0 > 0$ par rapport au couple $(\tilde{y}, \tilde{p})$.

D'autre part le semi groupe $V(x^0, y)$ étant contractant on a:

$$\int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2\, d\tilde{p} < \int |\hat{f}_0(\tilde{y}, p)|^2\, d\tilde{p}$$

ce qui entraîne:

$$\int d\tilde{y} \left(\int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2\, d\tilde{p}\right) < \infty$$

soit d'après le théorème de Fubini

$$\int d\tilde{p} \left(\int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2\, d\tilde{y}\right) < \infty$$

donc pour presque tout p on a:

$$\int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2\, d\tilde{y} < \infty.$$

Donc pour presque tout $\tilde{p}$ il existe une fonction $f(x^0, \tilde{x}, p)$ de carré sommable en $\tilde{x}$ définie par:

$$f(x^0, \tilde{x}, p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{i\tilde{x}\tilde{y}} f(x^0, \tilde{y}, p)\, d\tilde{y}.$$

De plus en vertu de l'égalité de Parseval on a

$$\int |f(x^0, \tilde{x}, p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} = \int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2 d\tilde{y}\, d\tilde{p}.$$

Etudions maintenant cette dernière intégrale quand $x^0 \to +\infty$. D'après la proposition 11 on a:

$$\lim_{x^0 \to +\infty} \int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2 d\tilde{p} = 0$$

et pour tout $x^0 > 0$ on a

$$\int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2 d\tilde{p} \leqq \int |\hat{f}_0(x^0, \tilde{y})|^2 d\tilde{p}$$

la deuxième intégrable étant sommable en $\tilde{y}$. Il en résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que:

$$\lim_{x^0 \to +\infty} \int |\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p)|^2 d\tilde{p}\, d\tilde{y} = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème II.

Bibliographie

1. Chernikov, N. A.: Acta Phys. Pol. **23**, 629 (1963).
2. Bitcheler, K.: Beiträge zur relativistischen kinetischen Gastheorie. Hamburg 1965.
3. Pichon, G.: Séminaire Collège de France 5 février 1966.
4. Lichnerowicz, A.: Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme. Paris: Masson et Cie. 1955.
5. Chernikov, N. A.: Acta. Phys. Pol. **26**, 1069 (1964).
6. Synge, J. L.: The relativistic Gaz. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1957.
7. Pichon, G.: Calcul des moments de la fonction de distribution d'un fluide parfait. CT.. Acad. Sc. T. 264 (1968).
8. Yosida, K.: Functional Analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
9. Hille, E., Phillips, R.: Functional Analysis and semi-groups. Am. Math. Soc. Coll. pub. **31**, 1957.
10. Seely, R. T.: Integral equations depending analytically on a parameter. Indagationes Math. **24**, 4, 434—442 (1962).
11. Arseniev, A.: Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **5**, 5, 864—882 (1965).
12. Marle, C.: Ann. Inst. Henri Poincaré vol **X**, 1, 67 (1969) et vol. **X**, 2, 127 (1969).
13. Vignon, B.: Ann. Inst. Henri Poincaré vol. **X**, 1, 31 (1969).

G. Pichon
Faculté des Sciences
d'Orléans
F-45 Orléans