Commun. math. Phys. 13, 216—225 (1969)

Einige Bemerkungen über Projektionsoperatoren

(Konsequenzen eines Theorems von Borchers)*

S. SCHLIEDER

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

Eingegangen am 19. Mai 1969

Abstract. Some properties of projection operators are investigated by means of a theorem of Borchers. Under the assumptions of

(A) spectrum-condition for the energy-operator,

(B) locality,

(C) uniqueness of an invariant state Ω under time-translations,

(D) irreducibility of the global algebra,

(E) weak additivity equivalent to the cyclicity of each local ring the following main result is derived:

None of two projection operators E and F, for which the two equations

$$[E_t, F]_- = 0 \quad \text{for} \quad |t| < \varepsilon, \quad \text{and} \quad E.F = 0$$

are valid, can belong to a local ring.

This result includes the following special cases: From $E \in \mathfrak{A}_1$, $F \in \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_2$ two local rings belonging to the compact regions $\mathfrak{R}_1$ and $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_1$ spacelike to $\mathfrak{R}_2$, it follows, that $E.F \neq 0$. For E a local projection operator and F a projection operator with $F = F_t$ identically in t (so that F describes a conserved property) one finds again $E.F \neq 0$.

1. Einleitung

Vor einigen Jahren haben HAAG und KASTLER [1] mit einer grundlegenden Arbeit der algebraischen Methode in der Quantenfeldtheorie zu breiterer Beachtung verholfen und eine Reihe von Überlegungen auf diesem Gebiet inspiriert.

Schon vorher hatten besonders SEGAL und KADISON [2] in mehreren Arbeiten die Elemente einer abstrakten Algebra als Träger für die interessierenden physikalischen Informationen vorgeschlagen. Bei HAAG und KASTLER rücken die in den sowohl des Raumes wie der Zeit nach endlichen Teilen des Minkowskiraumes vollzogenen Eingriffe am quantenmechanischen System in den Mittelpunkt der Überlegungen. Zwei Eingriffe, welche in zwei raumartig zueinander gelegenen Teilen des Minkowskiraumes vor sich gehen, sollen durch zwei miteinander vertauschbare Elemente der Algebra beschrieben werden. Gerade diese Forderung (Lokalitätsbedingung) zusammen mit der Spektrumsbedingung für den Energieimpulsoperator gibt der Theorie bereits so viel Struktur, daß eine Reihe von Aussagen möglich wird [3].

* Diese Arbeit ist ein Auszug aus einem Manuskript, das im Juni 1968 geschrieben wurde.

Geht man zu einer Darstellung der abstrakten C^*-Algebra in einem Hilbertraum über und nimmt die lokalen Ringe dann wie üblich als v. Neumann-Algebren [4] an, so werden diese bekanntlich von den in ihnen vorkommenden Projektionsoperatoren erzeugt. Es ist damit von der mathematischen Struktur her nahegelegt, daß die zu den lokalen Ringen gehörenden Projektionsoperatoren für die Beschreibung von reinen Operationen eine wichtige Rolle spielen müssen. Und es ist von vornherein einleuchtend, daß die lokalen Projektionsoperatoren die Information, welche man aus einer lokalen Messung erhalten hat, ausdrücken sollten: Das Meßergebnis schränkt die für die Beschreibung des Systems in Frage kommenden Vektoren auf solche ein, welche in dem zu dem relevanten Projektor gehörenden Teilraum liegen.

Wir wollen im folgenden Abschnitt einige einfache Sätze über Projektoren ableiten. Dabei spielt ein von Borchers bewiesenes Theorem eine wichtige Rolle. Die Bedeutung der Sätze für die Eigenschaft der lokalen Unabhängigkeit wird im letzten Abschnitt behandelt. Eine Diskussion der Ergebnisse im Zusammenhang mit Fragen der Lokalisierung von quantenmechanischen Systemen soll in einer weiteren Arbeit an anderer Stelle erfolgen.

2. Theorem von Borchers; Sätze über Projektoren

Wir nehmen an, daß die 4-dimensionale Translationsgruppe im Zustandsraum unitär dargestellt ist. Für das infinitesimale Element p_0 (Energieoperator), das zu den Zeittranslationen $U(t)$ gehört, fordern wir die Spektrumsbedingung: $p_0' \geqq 0$ (positive Energie). Für diesen Fall hat Borchers das folgende Theorem [5] abgeleitet:

Für zwei Projektionsoperatoren E und F, welche

$$[U(t)E\,U^*(t), F]_- = 0 \qquad \text{für} \qquad |t| < \varepsilon,\ \varepsilon \neq 0 \tag{1}$$

und

$$EF = 0 \tag{2}$$

erfüllen, gilt

$$U(t)E\,U^*(t)F = 0 \qquad \text{identisch in } t.$$

Zur Interpretation: Wenn E ein Projektor ist, der z. B. zur kompakten Menge $\mathfrak{R}$ gehört, dann gehört $E_t = U(t)E\,U^*(t)$ zur kompakten Menge $\mathfrak{R}_t$, welches durch Verschiebung von $\mathfrak{R}$ um t erzeugt wird. Das heißt für den Meßvorgang: Wenn ein in $\mathfrak{R}$ befindlicher Apparat ein Resultat liefert, das man durch den Projektor E beschreibt, so bedeutet E_t das gleiche Resultat desselben Meßapparates zu der um t späteren Zeit.

Wir sind hier nicht daran interessiert, Aussagen von möglichst großer Allgemeinheit herzuleiten. Es werden deshalb zusätzlich zu

(A) Spektrumsbedingung,

(B) Lokalitätsforderung

einige weitere Annahmen gemacht, die man auch sonst häufig voraussetzt. Wie schon oben bemerkt, interessieren wir uns für eine konkrete Darstellung der Algebra $\mathfrak{A}$ in einem Hilbertraum $\boldsymbol{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

(C) In $\boldsymbol{H}$ gibt es genau einen Eigenzustand Ω zu p_0 mit $p_0' = 0$.

(D) $\mathfrak{A}$ ist irreduzibel dargestellt (also insbesondere zyklisch in bezug auf Ω).

(E) Es gilt die schwache Additivität für $\mathfrak{A}$ gleichbedeutend damit, daß Ω zyklisch für jeden lokalen Ring ist [7]. (Ein lokaler Ring gehört zu einem kompakten Gebiet mit nichtleerem Inneren).

Die Annahmen (C) und (D) bedeuten physikalisch, daß man den kohärenten Sektor (im Sinne der Überauswahlregeln kohärent) mit den Quantenzahlen des Vakuums betrachtet. (E) läßt sich in einer Theorie vom Wightman-Typus beweisen.

Wir beginnen mit einigen Feststellungen über einen Projektor E.

Wenn $E = E_t$ identisch in t gilt, so bedeutet das einen Erhaltungssatz für die durch E beschriebene Eigenschaft des Systems. Im übrigen wollen wir voraussetzen, daß die hingeschriebenen Projektionsoperatoren echte Projektionsoperatoren, d. h. $\neq 0$ und $\neq I$ sind[1].

(a) Falls

$$[E, E_t]_- = 0 \qquad \text{für} \qquad |t| < \varepsilon\,, \tag{3}$$

so ist $E = E_t$ identisch in t, d. h. die E zugeordnete Eigenschaft ist erhalten.

Beweis. Mit $(I - E)$ statt F ist Voraussetzung (1) des Theorems von Borchers erfüllt. Voraussetzung (2) gilt wegen $(I - E)$. $E = 0$. Damit wird $(I - E_t)$. $E = 0$ und natürlich $(I - E) E_t = 0$ identisch in t. Es folgt $(I - E)_t \leqq I - E$, $E_t \leqq E$; hieraus $E_t = E$. (3) ist damit äquivalent zu $E = E_t$.

(b) Es gelte $E = E_t$ identisch in t. Nach Voraussetzung (C) folgt dann (da $E\Omega$ zeittranslationsinvariant ist)

$$E\Omega = c\Omega\,.$$

Damit $E\Omega = 0$ oder $E\Omega = \Omega$.

(c) Es sei $[E, E_t]_- = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Dann ist E nichtlokal.

Verschärfende Aussage: E kann zu keinem Ring über einem Gebiet $\mathfrak{R}$ gehören, wenn es zu $\mathfrak{R}$ ein total raumartig gelegenes kompaktes Gebiet $\mathfrak{R}'$ mit nichtleerem Inneren gibt.

Beweis. Aus (a) und (b) folgt, daß $E\Omega = 0$ oder $E\Omega = \Omega$ ist. Falls E lokal ist (oder falls die Voraussetzung in der Klammer zutrifft), gibt es einen lokalen Ring, der mit E vertauscht, und welcher wegen Voraussetzung (E) zyklisch ist. Hieraus folgt $E = 0$ bzw. $I - E = 0$, was der Voraussetzung, daß E ein echter Projektor sein soll, widerspricht.

[1] I bedeutet stets die Einheit.

Es folgen nunmehr einige Relationen für 2 Projektoren.

Lemma. *Es seien E und F zwei Projektoren, welche die Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllen. Dann gilt*

$$E\Omega = 0 \quad \textit{oder} \quad F\Omega = 0,$$

d. h. mindestens einer der Projektoren ist nichtlokal.

Beweis. Nach dem Theorem von Borchers gilt

$$E_t F = 0 \quad \text{identisch in } t.$$

Es gilt unter Benutzung des Cesaromittels allgemein [8]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (U(t)\varphi,\, \chi)\, dt = (\varphi, \Omega)\,(\Omega,\, \chi)\,,$$

daher insbesondere

$$0 = (\Omega, EF\Omega) = (\Omega, E_t F\Omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (\Omega, E_t F\Omega)\, dt$$
$$= (\Omega, E\Omega)\,(\Omega, F\Omega),$$

d. h. entweder $E\Omega = 0$ oder $F\Omega = 0$.

Wir ziehen aus dem Lemma einige Folgerungen:

(d) Gegeben seien zwei lokale Ringe $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die zu den kompakten Gebieten $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ gehören. $\mathfrak{R}_1$ wird raumartig zu $\mathfrak{R}_2$ angenommen. Falls $E \in \mathfrak{A}_1$ und $F \in \mathfrak{A}_2$ liegen, so ist [9] $EF \neq 0$.

Beweis. Wenn man gezeigt hat, daß die Bedingung (1) für E und F erfüllt ist, d. h. daß $[E_t, F]_- = 0$ für $|t| < \varepsilon$ gilt, so ist der Beweis im wesentlichen erbracht. Denn wäre auch noch $EF = 0$, so müßte nach dem Lemma entweder $E\Omega = 0$ oder $F\Omega = 0$ sein. Das ist im Widerspruch dazu, daß sowohl E wie auch F zu lokalen Ringen gehören. Den Beweis für die Gültigkeit von Bedingung (1) findet man im Anhang.

(e) $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind wie in (d) vorausgesetzt. Dann gilt für $x \in \mathfrak{A}_1$, $y \in \mathfrak{A}_2$ stets

$$xy \neq 0\,.$$

Beweis. Aus $xy = 0$ folgt, daß weder x noch y unitär sein können. Es ist also wenigstens einer der beiden Ausdrücke x^*x bzw. xx^* ungleich I, entsprechend für y^*y bzw. yy^*. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, sei $x^*x \neq I$, $yy^* \neq I$. Mit x^*x gehört auch die Spektralschar von x^*x zu $\mathfrak{A}_1$, mit yy^* auch die Spektralschar von yy^* zu $\mathfrak{A}_2$. Nun wäre $x^*x\, yy^* = 0$ mithin für jeden Projektor E aus der Spektralschar von x^*x und jeden Projektor F aus der Spektralschar von yy^* $EF = 0$ im Widerspruch zum Lemma.

(f) $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind wie in (d) vorausgesetzt. Dann ist $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = \lambda I$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ $\mathfrak{L}(\boldsymbol{H})$ erzeugen. ($\mathfrak{L}(\boldsymbol{H})$ ist die Algebra der beschränkten Operatoren in $\boldsymbol{H}$):

$$\{\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2'\}'' = \mathfrak{L}(\boldsymbol{H})$$

(siehe zur letzten Behauptung [4]).

Beweis. Es sei $x \neq \lambda I$ und $x \in \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ angenommen. Dann ist[2] $x + x^* \in \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$. Es sei E ein Projektor der Spektralschar von $x + x^*$. Es ist $E \in \mathfrak{A}_1, I - E \in \mathfrak{A}_2$ und $E(I - E) = 0$ im Widerspruch zum Lemma.

Satz. *Es sei E ein lokaler Projektor und φ ein beliebiger Zustand in $\boldsymbol{H}$; dann gibt es ein t, so daß*

$$E_t \varphi \neq 0$$

ist. Verschärfende Aussage: Die Punkte mit $E_t \varphi \neq 0$ liegen auf der t-Achse dicht.

Beweis. Für festes t bildet die Menge aller Zustände ψ mit $E_t \psi = 0$ einen Teilraum $\hat{\boldsymbol{H}}_t$. Wir betrachten

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \bigcap_{-\infty < t < +\infty} \hat{\boldsymbol{H}}_t .$$

Wie man sieht, ist $\hat{\boldsymbol{H}}$ wieder ein Teilraum. (Linearität und Homogenität sind erfüllt, $\hat{\boldsymbol{H}}$ ist abgeschlossen, da es Durchschnitt von abgeschlossenen Unterräumen ist).

$\hat{P}$ sei der Projektor auf $\hat{\boldsymbol{H}}$. Es gilt offensichtlich:

$$E_t \hat{P} = 0 \qquad \text{identisch in } t. \tag{4}$$

$\hat{P}$ ist der größte Projektor mit dieser Eigenschaft.

$\mathfrak{B}$ sei ein geeigneter Ring, so daß für jedes $B \in \mathfrak{B}$ gilt

$$[E_\tau, B]_- = 0 \qquad \text{für} \qquad |\tau| < \varepsilon \tag{5}$$

und entsprechend

$$[E_{t+\tau}, C]_- = 0 \qquad \text{für} \qquad |\tau| < \varepsilon$$

für jedes $C \in \mathfrak{B}_t$ mit $\mathfrak{B}_t = U(t)\,\mathfrak{B}\,U^*(t)$; t ist beliebig auf der reellen Achse. Für $\psi \in \hat{\boldsymbol{H}}$ gilt

$$E_t C \psi = C E_t \psi = 0$$

für jedes $C \in \mathfrak{B}_t$; d. h. $C\psi \in \hat{\boldsymbol{H}}_t$ für jedes $C \in \mathfrak{B}_t$. Wenn ψ_j $\hat{\boldsymbol{H}}$ durchläuft und C_k $\mathfrak{B}_t$, so ergibt die Menge $\{C_k \psi_j\}$ einen linearen Unterraum; sein Abschluß sei $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathfrak{B},t}$. Wegen $I \in \mathfrak{B}_t$ gilt $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathfrak{B},t} \supset \hat{\boldsymbol{H}}$. Damit erhält man

$$\hat{\boldsymbol{H}} \subset \hat{\boldsymbol{H}}_{\mathfrak{B},t} \subset \hat{\boldsymbol{H}}_t . \tag{6}$$

Es sei $\hat{P}_{\mathfrak{B},t}$ der Projektionsoperator auf $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathfrak{B},t}$; es gilt

$$E_t \hat{P}_{\mathfrak{B},t} = 0$$

und wegen (4) und (5) auch

$$E_{t+\tau} \hat{P}_{\mathfrak{B},t} = 0 \qquad \text{für} \qquad |\tau| < \varepsilon .$$

[2] Falls $x + x^* = \lambda' I$ betrachte man die Spektralschar von $x - x^*$.

Nach dem Theorem von Borchers gilt damit identisch in t'

$$E_{t'} \hat{P}_{\mathfrak{B},t} \leqq 0 .$$

Hieraus folgt

$$\hat{P}_{\mathfrak{B},t} \leqq \hat{P} .$$

Nach (6) ist $\hat{P}_{\mathfrak{B},t} \geqq \hat{P}$, d. h. es ist

$$\hat{P}_{\mathfrak{B},t} = \hat{P} .$$

Die letzte Gleichung gilt identisch in t. Damit ist $\hat{\boldsymbol{H}}$ invariant unter den Ringen $\mathfrak{B}_t$ unabhängig von t; da es sich um involutive Ringe handelt, gilt das gleiche für das Orthogonalkomplement $\boldsymbol{H} \ominus \hat{\boldsymbol{H}}$. Es folgt: $\hat{P}$ vertauscht mit den Ringen $\mathfrak{B}_t$ identisch in t. Nach einem früheren Resultat von Borchers [11] und der vorausgesetzten Irreduzibilität der globalen Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugen diese $\mathfrak{L}(\boldsymbol{H})$; damit ist

$$\left\{ \bigcup_{-\infty < t < +\infty} \mathfrak{B}_t \right\}' = \lambda I .$$

Das heißt, es ist $P = 0$ oder I; die I kommt nicht in Frage, da E ein echter Projektionsoperator ist.

Damit ist der Beweis erbracht; die verschärfende Aussage folgt unmittelbar durch Betrachtung von $E_t P_\varphi$ mit P_φ als Projektionsoperator auf φ.

Wir ziehen aus diesem Satz einige einfache Folgerungen:

(g) Wenn die Projektionsoperatoren E und F die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, so sind beide nichtlokal.

Beweis. Wenn (1) und (2) erfüllt sind, so ist $E_t F = 0$ identisch in t; das ist nach dem vorangehenden Satz für lokales E (und entsprechend auch für lokales F) nicht möglich.

(h) Für den Projektionsoperator F soll ein Erhaltungssatz gelten, d. h. $F = F_t$. Dann ist für einen lokalen Projektionsoperator E

$$EF \neq 0 \quad \text{und} \quad EF \neq E .$$

Beweis. Wegen $F = F_t$ würden im Falle $EF = 0$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt; es gilt die Argumentation von (g). (Im Falle $EF = E$ setze man statt F den Projektor $I - F$).

(i) Es seien E und F wie in (h), und es gelte $[E, F]_- = 0$. Dann ist EF ein nichtlokaler Projektionsoperator.

Beweis. Für EF und $I - F$ sind die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, mithin ist EF nichtlokal (wegen (h) ist es natürlich auch $\neq 0$).

(j) *Korrelat*[3]*:* Es sei x ein lokaler Operator und φ ein beliebiger Zustand in $\boldsymbol{H}$; dann gibt es ein t, so daß

$$x_t \varphi \neq 0$$

[3] Auf dieses Korrelat machte mich Herr H. Araki aufmerksam.

ist. Verschärfende Aussage: Die Punkte mit $x_t \varphi \neq 0$ liegen auf der t-Achse dicht.

Beweis. Andernfalls wäre $x_t \varphi = 0$ für $a \leqq t \leqq b$, $a \neq b$; x_t kann dann nicht isometrisch sein. Aus $x_t^* x_t \varphi = 0$ folgte dann, daß es eigentliche lokale Projektoren E_t gibt (nämlich solche, die zur Spektralschar von $x_t^* x_t$ gehören), für welche $E_t \varphi = 0$ identisch in t wäre. Das ist ein Widerspruch zum Satz.

3. Eine Bemerkung zur lokalen Unabhängigkeit

In der unter [1] zitierten Arbeit haben HAAG und KASTLER in Anlehnung an Überlegungen von SEGAL einen Begriff eingeführt, den man als lokale Unabhängigkeit bezeichnen kann. Dieser Begriff läßt sich mit etwas unterschiedlichem Inhalt in mehreren Versionen beschreiben. Bleiben wir zunächst bei einer Situation, wie sie den vorangehenden Überlegungen zugrunde liegt: Wir besitzen eine konkrete Darstellung der globalen Algebra $\mathfrak{A}$ in einem Hilbertraum $\boldsymbol{H}$ und können sie daher als eine Operatoren-Algebra auffassen. Gegeben seien zwei lokale Ringe $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die zu den kompakten Gebieten $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ gehören. $\mathfrak{R}_1$ sei total raumartig zu $\mathfrak{R}_2$ gelegen. Über $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ seien zwei positive Funktionale φ_1 bzw. φ_2 gegeben. Von allgemeinen Theoremen aus der Theorie der C^*-Algebren her ist bekannt [10], daß man φ_1 zu einem positiven Funktional $\tilde{\varphi}_1$ und φ_2 zu einem positiven Funktional $\tilde{\varphi}_2$ über der globalen Algebra $\mathfrak{A}$ fortsetzen kann. Falls φ_1 und φ_2 unzerlegbar waren, kann man für φ_1 und φ_2 unzerlegbare Fortsetzungen $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ (physikalisch interpretiert: reine Zustände) wählen. Weiter ist es im Sinne der vorliegenden Version naturgemäß vorauszusetzen, daß $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ durch Zustände ξ_1 bzw. ξ_2 aus $\boldsymbol{H}$ erzeugt werden, d. h. für $x \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\tilde{\varphi}_1(x) = (\xi_1, x\xi_1) \quad \text{und} \quad \varphi_1(y) = (\xi_1, y\xi_1) \quad \text{mit} \quad y \in \mathfrak{A}_1,$$
$$\tilde{\varphi}_2(x) = (\xi_2, x\xi_2) \quad \text{und} \quad \varphi_2(z) = (\xi_2, z\xi_2) \quad \text{mit} \quad z \in \mathfrak{A}_2.$$

Falls es unter den gemachten Voraussetzungen gelingt, in $\boldsymbol{H}$ einen Zustand ξ zu finden, der sowohl φ_1 wie φ_2 erzeugt, dann soll die Theorie die Eigenschaft der lokalen Unabhängigkeit besitzen:

$$(\xi, x\xi) = \tilde{\varphi}(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{A} \quad \text{und}$$
$$(\xi, y\xi) = \varphi_1(y) \quad \text{für} \quad y \in \mathfrak{A}_1,$$
$$(\xi, z\xi) = \varphi_2(z) \quad \text{für} \quad z \in \mathfrak{A}_2.$$

$\tilde{\varphi}$ ist also eine gemeinsame Fortsetzung von φ_1 und φ_2. Eine andere Version der lokalen Unabhängigkeit geht von den abstrakten lokalen Ringen und der abstrakten globalen Algebra aus. Sei zunächst ebenfalls eine Darstellung von der globalen Algebra $\mathfrak{A}$ und den lokalen von Neumann-Ringen $\mathfrak{A}_j$ gegeben. (Es ist natürlich, diesen Zugang anzunehmen, um das Auftreten der lokalen v. Neumann-Ringe $\mathfrak{A}_j$ zu motivieren). Sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{A}_j$ werden nunmehr als abstrakte C^*-Algebren $\hat{\mathfrak{A}}$ und $\hat{\mathfrak{A}}_j$ aufgefaßt. Über $\hat{\mathfrak{A}}_1$ ist ein beliebiges positives Funktional $\hat{\varphi}_1$, über $\hat{\mathfrak{A}}_2$ ein beliebiges positives Funktioneal $\hat{\varphi}_2$ gegeben. Kann man immer eine gemeinsame Fortsetzung $\hat{\varphi}$ auf $\hat{\mathfrak{A}}$ von $\hat{\varphi}_1$ und $\hat{\varphi}_2$ finden? Wenn dieses der Fall ist, so liegt lokale Unabhängigkeit in einem weiter gefaßten Sinne vor.

Man kann leicht einsehen, daß eine notwendige Bedingung für die Eigenschaft der lokalen Unabhängigkeit, und zwar in beiden Versionen, die unter (d) gemachte Folgerung ist. (Die Eigenschaft, die unter (d) gefolgert wurde, bezeichnen Knight und Licht als strikte Lokalität [12]).

Zunächst zur ersten Version der lokalen Unabhängigkeit: Wir betrachten die Projektionsoperatoren $E_1 \in \mathfrak{A}_1$, bzw. $E_2 \in \mathfrak{A}_2$. Dann gibt es in $\boldsymbol{H}$ einen Zustand $\xi_1 = E_1 \xi_1$, welcher über $\mathfrak{A}_1$ ein positives Funktional

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(E_1 y E_1) = (\xi_1, y \xi_1), \qquad y \in \mathfrak{A}_1$$

induziert, entsprechend in $\boldsymbol{H}$ einen Zustand $\xi_2 = E_2 \xi_2$, welcher über $\mathfrak{A}_2$ ein positives Funktional

$$\varphi_2(z) = \varphi_2(E_2 z E_2) = (\xi_2, z \xi_2), \qquad z \in \mathfrak{A}_2$$

induziert. Wäre $E_1 \cdot E_2 = 0$, so hieße das gerade, daß es in $\boldsymbol{H}$ keinen Zustand ξ gibt, welcher eine gemeinsame Fortsetzung von φ_1 und φ_2 (als Vektorfunktional) erzeugt. $E_1 E_2 \neq 0$ ist daher für die erste Version notwendig; das gilt aber auch für die zweite Version. Das kann man wie folgt einsehen:

Über dem abstrakten Ring $\hat{\mathfrak{A}}_1$ sei ein positives Funktional

$$\hat{\varphi}_1(y) = \hat{\varphi}_1(E_1 y E_1) \qquad \text{mit} \qquad y \in \hat{\mathfrak{A}}_1, E_1 \in \hat{\mathfrak{A}}_1$$

gegeben. Insbesondere ist dann

$$\hat{\varphi}_1(I) = \hat{\varphi}_1(E_1).$$

Entsprechend sei über $\hat{\mathfrak{A}}_2$

$$\hat{\varphi}_2(z) = \hat{\varphi}_2(E_2 z E_2)$$

mit $z \in \hat{\mathfrak{A}}_2$, $E_2 \in \hat{\mathfrak{A}}_2$ gegeben. (E_1 und E_2 sind in der abstrakten Algebra als hermitische Idempotente aufzufassen). Dann gilt

$$\hat{\varphi}_2(I) = \hat{\varphi}_2(E_2).$$

Es sei nunmehr $\hat{\varphi}$ eine gemeinsame Fortsetzung von $\hat{\varphi}_1$ und $\hat{\varphi}_2$, d. h.

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_1(x) \qquad \text{für} \qquad x \in \hat{\mathfrak{A}}_1,$$
$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_2(x) \qquad \text{für} \qquad x \in \hat{\mathfrak{A}}_2.$$

Wegen $I \in \hat{\mathfrak{A}}_1 \cap \hat{\mathfrak{A}}_2$ wird

$$\hat{\varphi}(I) = \hat{\varphi}_1(I) = \hat{\varphi}_1(E_1),$$
$$\hat{\varphi}(I) = \hat{\varphi}_2(I) = \hat{\varphi}_2(E_2).$$

Damit ergibt sich

$$\hat{\varphi}(E_1) = \hat{\varphi}_1(E_1 \cdot E_1) = \hat{\varphi}(I)$$

entsprechend

$$\hat{\varphi}(E_2) = \hat{\varphi}(I)\,,$$

d. h.

$$\hat{\varphi}(I - E_1) = 0,\ \hat{\varphi}(I - E_2) = 0\,.$$

Für positive Funktionale gilt die Schwartzsche Ungleichung

$$|\hat{\varphi}(u^* v)|^2 \leqq \hat{\varphi}(u^* u)\ \hat{\varphi}(v^* v),\ u, v$$

beliebig in $\hat{\mathfrak{A}}$.

Für $u = I - E_1$ d. h. $u^* u = I - E_1$ und $v = I + E_2$ folgt

$$|\hat{\varphi}((I - E_1)\,(I + E_2))|^2 \leqq \hat{\varphi}(I - E_1)\ \hat{\varphi}((I + E_2)\,(I + E_2))\,.$$

Der erste Faktor rechts verschwindet. Wäre $E_1 \cdot E_2 = 0$, so folgte

$$|\hat{\varphi}(I - E_1 + E_2)|^2 = 0$$

oder

$$|\hat{\varphi}(E_2)| = \hat{\varphi}(I) = 0\,.$$

Das heißt, $\hat{\varphi}$ ist kein positives Funktional.

Die Eigenschaft der lokalen Unabhängigkeit entspricht der physikalischen Intuition, daß es experimentell möglich sein muß, die lokalen Eigenschaften der Zustände in raumartig zueinander gelegenen Gebieten unabhängig voneinander herzustellen. Insofern erscheint es befriedigend, daß man die Folgerung (d) aus den Grundannahmen ziehen kann.

Mehreren Kollegen des Max-Planck-Institutes bin ich für ihr Interesse an diesen Überlegungen dankbar; dieses gilt besonders für Herrn Reeh, der zu einer besseren Formulierung der Aussagen über die lokale Unabhängigkeit beigetragen hat.

Anhang

Wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen von (d) die Bedingung (1) gilt. Den einhüllenden Doppelkegel $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{R}_2$ können wir als abgeschlossen ansehen. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = \emptyset\,.$$

Da der 4-dimensionale Vektorraum regulär ist, gilt neben dem Hausdorffschen Trennungsaxiom auch noch die folgende Trennungseigenschaft: Zu jedem Punkt u und jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, die u nicht enthält, gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V}$ von u und eine offene Menge $\mathfrak{O} \supset \mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{V} = \emptyset$. Es soll mit Hilfe dieser Eigenschaft gezeigt werden, daß $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ einen von Null verschiedenen Mindestabstand besitzen. Hierzu betrachte man zu jedem $u_j \in \mathfrak{R}_1$ eine kugelförmige Umgebung $\mathfrak{V}_j$ (diese bilden ja ein Fundamentalsystem von Umgebungen), welche $\mathfrak{K}_2$ nicht trifft; falls $\mathfrak{V}_j$ den Radius a_j besitzt, so führen wir zu jedem u_j

eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_j$ mit Radius $a_j/2$ ein. Das System U aller $\mathfrak{U}_j$ überdeckt $\mathfrak{R}_1$; da $\mathfrak{R}_1$ kompakt ist, kann man ein endliches $\mathfrak{R}_1$ überdeckendes System $\hat{U}$ auswählen. In $\hat{U}$ gibt ès eine (oder mehrere) Kugeln mit einem kleinsten Radius ϱ. Es sei nun u ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_1$, v ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}_2$; u liegt in mindestens einer Kugel $\hat{U}_m \in \hat{U}$ mit Mittelpunkt u_m und Radius a_m. Es folgt aus

$$d(u_m, v) \geqq 2a_m \quad \text{und} \quad d(u_m, u) < a_m\,,$$

$$d(u_m, u) + d(u, v) \geqq d(u_m, v) \geqq 2a_m\,,$$

$$d(u, v) \geqq a_m \quad \text{und damit} \quad d(u, v) \geqq \varrho\,.$$

$\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ besitzen also mindestens einen Abstand $\varrho \neq 0$. Wegen der Lokalitätsbedingung gilt daher z. B. mit $\varepsilon = \varrho \neq 0$

$$[E_t, F]_- = 0 \quad \text{für} \quad |t| < \varepsilon\,.$$

Literatur

1. Haag, R., u. D. Kastler: J. Math. Phys. **5**, 848—861 (1964).
2. Von den zahlreichen frühen diesbezüglichen Arbeiten von I. E. Segal und R. V. Kadison: seien genannt: z. B. Segal, I. E.: Ann. Math. **48**, 930 (1947); — Colloque Int. sur les Problèmes de la Théorie Quantique des Champs, Lille, 1957, Paris: CNRS 1958. — Kadison, R. V.: Ann. Math. **66**, 304—379 (1956).
3. Siehe z. B. [1], weiter Araki, H.: Progr. Theoret. Phys. **32**, 844—854 (1964), — Misra, B.: Helv. Phys. Acta **38**, 189—206 (1965); — Borchers, H. J.: Commun. Math. Phys. **1**, 49—56 und 57—79 (1965); **2**, 49—54 (1966).
4. Dixmier, J.: Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien, Paris: Gauthier-Villars 1957.
5. Borchers, H. J.: Commun. Math. Phys. **4**, 315—223 (1967).
6. Siehe z. B. Gelfand, I. M., u. G. E. Schilow: Verallgemeinerte Funktionen, Bd. I, Kap. II, § 1. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960.
7. Borchers, H. J.: On the convergence of the Reeh-Schlieder theorem, Reprint 1968.
8. Siehe z. B. Riesz, F., u. B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis, Kap. X. Ergodensätze, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
9. Vergleiche mit (d), (e) und (f), Kraus, K.: Z. Physik **181**, 1—12 (1964); dort werden aus einer zusätzlichen Annahme die entsprechenden Schlüsse gezogen. Siehe hierzu auch Schoch, A.: Int. J. Theoret. Phys. **1**, 107—113 (1968).
10. z. B. Dixmier, J.: Les C-Algèbres et leurs Représentations, Paris: Gauthier-Villars 1964.
11. Borchers, H. J.: Nuovo Cimento **19**, 787—793 (1961).
12. Knight, J. M.: J. Math. Phys. **2**, 459—471 (1961); Licht, A. L.: J. Math. Phys. **4**, 1443—1447 (1963).

S. Schlieder
Max-Planck-Institut
f. Physik u. Astrophysik
8000 München 23, Föhringer Ring 6