Commun. math. Phys. 11, 227—232 (1969)

Über die Vollständigkeit verallgemeinerter freier Felder in einer Zeitschicht

CLAUS MÖLLENHOFF
Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

Eingegangen am 16. August 1968

Abstract. A necessary and sufficient condition for the completeness of generalized free fields in a time-slice is established.

1. Einleitung

Es sei T eine Zeitschicht im vierdimensionalen Minkowskiraum, d. h.

$$T = \{x : |x_0| < |t_0|\} .$$

Dann erfüllt ein Feld $A(f)$ das Zeitschichtpostulat, (ZSP), falls für einen beliebigen beschränkten Operator C gilt:

Aus $[A(f), C] = 0$ für $\operatorname{supp} f \subset T$

folgt $[A(g), C] = 0$ für $\operatorname{supp} g$ beliebig.

Das heißt mit anderen Worten: Die ganze Algebra der Feldoperatoren läßt sich durch Operatoren erzeugen, deren Testfunktionen ihren Träger in T haben (Vollständigkeit).

Das verallgemeinerte freie Feld wird festgelegt durch ein positives, lorentzinvariantes Maß $\mu(p)$ (z. B. [3], [4]). H. J. BORCHERS zeigte in [1], daß das ZSP gilt, wenn für $\mu(p)$

$$\int e^{\lambda\sqrt{p^2}}\, d\mu(p) < \infty , \qquad \lambda > 0$$

erfüllt ist. HAAG und SCHROER zeigten in [2], daß das ZSP nicht gilt, wenn $\mu(p)$ im Unendlichen langsamer oder ebenso abfällt wie

$$\frac{1}{(1+|p|)^k} , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n < \infty .$$

Im folgenden soll eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des ZSP in Abhängigkeit von $\mu(p)$ gegeben werden.

2. Ergebnisse

Es sei T eine Zeitschicht, C sei ein beliebiger beschränkter Operator des Fockraumes

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n .$$

$A(f)$ sei ein verallgemeinertes freies Feld, definiert durch das Maß $\mu(p)$. Wir betrachten die Menge $\mathscr{D}(T)$ der Testfunktionen mit kompaktem Träger in T. Ihre Fouriertransformationen seien mit $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ bezeichnet, also

$$f(x) \in \mathscr{D}(T), \qquad \tilde{f}(p) \in \tilde{\mathscr{D}}(T).$$

Weiterhin sei

$$\mu_1(p) = \mu(p) + \mu(-p).$$

Dann gilt das folgende

Theorem 1. *Das Zeitschichtpostulat gilt dann und nur dann für das verallgemeinerte freie Feld $A(f)$, wenn $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ dicht in $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ ist.*

Aus Theorem 1 ist ersichtlich, daß das ZSP höchstens dann gelten kann, wenn $\mu(p)$ stärker als jedes Polynom abfällt. Aus diesem Grunde sind solche Felder und ihre zeitlichen Ableitungen zu einer scharfen Zeit wohldefiniert. Es ergibt sich folgende Verschärfung:

Theorem 2. *Gilt das ZSP für eine Zeitschicht der Dicke $|t_0| > 0$, so gilt es auch noch für eine δ-förmige Zeitschicht.*

3. Beweise

Zum Beweis unserer Theoreme formulieren wir mehrere Hilfssätze:

Lemma 1. *Sei $\tilde{\varphi}$ beliebig $\in \mathscr{L}_2(\mu_1)$. Aus $[\tilde{A}(\tilde{f}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})] = 0$ für $\tilde{f}(p) \in \tilde{\mathscr{D}}(T)$ folgt $[\tilde{A}(\tilde{g}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})] = 0$ für alle $\tilde{g} \in \mathscr{L}_2(\mu_1)$ dann und nur dann, wenn $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ dicht in $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ ist.*

Beweis. Es ist (s. [1])

$$(\Omega, [\tilde{A}(\tilde{f}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})]\, \Omega) = [\text{c-Zahl}]\, (\Omega, \Omega).$$

Statt der Kommutatoren können wir also auch deren Vakuumerwartungswerte betrachten.

a) Aus $[\tilde{A}(\tilde{f}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})] = 0$ möge $[\tilde{A}(\tilde{g}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})] = 0$ folgen. Für $\tilde{A}$ gilt nach Definition (s. [4])

$$\tilde{A}(\tilde{g}(p))\, \Omega = \tilde{g}(p) \in \mathscr{H}_1.$$

Also

$$\begin{aligned}(\Omega, [\tilde{A}(\tilde{f}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})]\, \Omega) &= (\Omega, \tilde{A}(\tilde{f})\, \tilde{\varphi}) - (\Omega, \tilde{A}(\tilde{\varphi})\, \tilde{f}) \\ &= \int \tilde{f}(-p)\, \tilde{\varphi}(p)\, d\mu(p) - \int \tilde{\varphi}(-p)\, \tilde{f}(p)\, d\mu(p) \\ &= \int \tilde{f}(p)\, \{\tilde{\varphi}(-p)\, \Theta(-p) - \tilde{\varphi}(-p)\, \Theta(p)\}\, d\mu_1(p) \\ &= \int \tilde{f}(p)\, \tilde{\varphi}'(p)\, d\mu_1 = 0\end{aligned}$$

mit $\tilde{\varphi}' \in \mathscr{L}_2(\mu_1)$ und $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{D}}(T)$.

Ebenso ist

$$[\tilde{A}(\tilde{g}), \tilde{A}(\tilde{\varphi})] = \int \tilde{g}(p)\, \tilde{\varphi}'(p)\, d\mu_1 = 0$$

für alle $\tilde{g} \in \mathscr{L}_2(\mu_1)$. Diese Integrale lassen sich als Skalarprodukt im $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ auffassen. Da $\tilde{\varphi}$ und damit $\tilde{\varphi}'$ beliebig gewählt waren, ist also $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ dicht in $\mathscr{L}_2(\mu_1)$.

b) Die Gegenrichtung ist trivial.

Lemma 2. *Aus* $[A(f), C] = 0$ *für* $f \in \mathscr{D}(T)$ *folgt* $(\Omega, [A(g), C]\,\Omega) = 0$ *für* supp$g$ *beliebig kompakt dann und nur dann, wenn* $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ *dicht in* $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ *ist.*

Beweis. Es treten hier Matrixelemente der Form

$$(\Omega, [\tilde{A}(\tilde{f}), C]\,\Omega)$$

auf, die sich leicht auf die in Lemma 1 verwendete Form bringen lassen:

$$\begin{aligned}(\Omega, \tilde{A}(\tilde{f})\, C\Omega) &- (\Omega, C\tilde{A}(\tilde{f})\,\Omega)\\ &= \int \tilde{f}(-p)\,\psi(p)\,d\mu - \int \overline{\psi(-p)}\,\tilde{f}(p)\,d\mu\,,\end{aligned}$$

wobei $\psi(p)$ die $\mathscr{H}_1$-Komponente von $C\Omega$ ist. Mit Lemma 1 folgt die Behauptung.

Durch die Bedingung, daß $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ dicht in $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ liegt, wird das Maß μ_1 bzw. μ festgelegt. Es ist jetzt noch zu zeigen, daß der Kommutator

$$[A(g), C]$$

selbst verschwindet, wenn das Matrixelement

$$(\Omega, [A(g), C]\,\Omega)$$

verschwindet.

Sei $A(x_0, \boldsymbol{f})$ das verallgemeinerte freie Feld zum Maß μ, das den Bedingungen aus Lemma 2 genügen möge. Das Feld sei in räumlicher Richtung schon mit einer Testfunktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit kompaktem Träger verschmiert. Sei

$$\begin{aligned}(\Omega, [A(x_0, \boldsymbol{f}), C]\,\Omega) &= (\Omega, A(x_0, \boldsymbol{f})\, C\Omega) - (\Omega, CA(x_0, \boldsymbol{f})\,\Omega)\\ &= F^+(x_0) - F^-(x_0)\,.\end{aligned}$$

Lemma 3. *Es gilt* $F^+(x_0) - F^-(x_0) = 0$ *für alle* x_0 *genau dann, wenn* $F^+(x_0) \equiv F^-(x_0) \equiv 0$.

Beweis. a) Gelte zunächst $F^+(x_0) - F^-(x_0) = 0$ für alle x_0.

$$F^+(x_0) = (\Omega, A(x_0, \boldsymbol{f})\, C\Omega) = (\Omega, A(0, \boldsymbol{f})\, U(-x_0)\, C\Omega)$$

ist Randwert einer in der unteren Halbebene analytischen Funktion. Ebenso ist $F^-(x_0)$ Randwert einer in der oberen Halbebene analytischen Funktion. Da diese beiden Funktionen auf der reellen Achse stetig und identisch gleich sind, kann man sie zu einer ganz-analytischen Funktion erweitern. Nach einem bekannten Satz ist die Fouriertransformation einer ganzen Funktion ein Maß. Die Fouriertransformationen der komplexen Erweiterungen von F^+ bzw. F^- haben ihren Träger in $\overline{V^+}$ bzw. $\overline{V^-}$, der gemeinsame Träger ist also nur der Nullpunkt im Impulsraum. Die Fouriertransformation der ganzen Funktion ist also ein δ-Maß. Also ist

$$F^+ = F^- = \text{const.}$$

Nach Konstruktion gilt für den Operator des verallgemeinerten freien Feldes

$$\begin{aligned}&(\Omega, A(f_1)\ldots A(f_n)\,C\Omega)\\ &= (\Omega, A(f_1)\ldots A(f_n)\,(E_0 + E_1 + \cdots + E_n)\,C\Omega),\end{aligned}$$

wobei E_i der Projektor auf den Teilraum $\mathscr{H}_i$ von

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathscr{H}_i$$

ist. Damit ist

$$F^+(x_0) = (\Omega, A(x_0, f)\,C\Omega) = (\Omega, A(x_0, f)\,(E_0 + E_1)\,C\Omega) = \text{const.}$$

Also müssen alle Beiträge bis auf den von E_0 verschwinden, d. h.

$$F^+(x_0) = (\Omega, A(x_0, f)\,\Omega) = 0\,.$$

Analog für $F^-(x_0)$.

Wir redefinieren jetzt C als

$$C \to \overline{C} = C - (\Omega, C\Omega)\,\mathbf{1}\,.$$

Kommutiert C mit irgend einem Operator, so tut es natürlich auch $\overline{C}$. Wir setzen Lemma 2 voraus und beweisen

Lemma 4. $(\Omega, [A(f), C]\,\Omega) = 0$ *für* $\operatorname{supp} f$ *beliebig dann und nur dann, wenn* $(\Omega, A(f_1)\ldots A(f_n)\,\overline{C}\Omega) = 0$ *für alle* n *und* $\operatorname{supp} f_i$ *beliebig.*

Beweis. a) Sei zunächst $(\Omega, [A(f), C]\,\Omega) = 0$.

Induktion: Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung direkt aus Lemma 3 durch Integration mit einer zeitabhängigen Testfunktion.

$n = 2$: Wir betrachten Matrixelemente

$$(\Omega, A(\varphi)\,A(f_2)\,C\Omega)$$

mit $\varphi \in \mathscr{D}(T)$ und $\operatorname{supp} f_2$ beliebig kompakt. Sei

$$C_2 := A(f_2)\,\overline{C}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(\Omega, [A(\varphi), C_2]\,\Omega) &= (\Omega, A(\varphi)\,A(f_2)\,\overline{C}\Omega) - (\Omega, A(f_2)\,A(\varphi)\,\overline{C}\Omega)\\ &\quad + (\Omega, A(f_2)\,A(\varphi)\,\overline{C}\Omega) - (\Omega, A(f_2)\,\overline{C}A(\varphi)\,\Omega)\,.\end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme verschwinden nach Lemma 2. Es bleibt

$$\begin{aligned}&(\Omega, [A(\varphi), A(f_2)]\,C\Omega) = [c\text{-Zahl}]\,(\Omega, \overline{C}\Omega)\\ &= [c\text{-Zahl}]\,(\Omega, C\Omega) - [c\text{-Zahl}]\,(\Omega, C\Omega) = 0\,.\end{aligned}$$

Wegen Lemma 2 verschwindet dieses Matrixelement auch für alle Testfunktionen f_1 mit beliebigem kompaktem Träger. Mit dem gleichen

Argument wie in Lemma 3 folgt dann, daß sogar gilt

$$(\Omega, A(f_1)\, C_1 \Omega) = (\Omega, A(f_1)\, A(f_2)\, \bar{C}\Omega) \equiv 0\,.$$

Der Induktionsschluß von $n-1$ auf $n+1$ verläuft ganz analog, dabei wird wesentlich ausgenutzt, daß sich der Kommutator des verallgemeinerten freien Feldes als c-Zahl herausziehen läßt.

b) Die Gegenrichtung von Lemma 4 ist trivial.

Es gilt also $\bar{C} = 0$, d. h.

$$C = (\Omega, C\Omega)\,\mathbf{1} = \lambda \cdot \mathbf{1}\,.$$

C kommutiert also mit allen Operatoren. Da das für beliebige Polynome von Feldern $A(f)$ bewiesen wurde, gilt

$$[A(f), C] \equiv 0$$

für alle Testfunktionen $f(x)$, denn die Testfunktionen mit kompaktem Träger bilden eine dichte Untermenge. Zusammenfassung von Lemma 2, 3 und 4 liefert den Beweis von Theorem 1.

Beweis von Theorem 2. Dazu benutzen wir in Lemma 2 Testfunktionen, deren Träger in zeitlicher Richtung δ-förmig und in räumlicher Richtung kompakt ist. Die Menge ihrer Fouriertransformationen sei mit $\tilde{\mathscr{D}}(\delta)$ bezeichnet. Wir setzen voraus, daß

$$[A(\delta(x_0 = 0), \boldsymbol{f}), C]$$

verschwindet, zusammen mit allen zeitlichen Ableitungen. Es ergeben sich dann Terme der Form

$$\int \psi(p)\, \tilde{f}(p)\, p_0^k\, d\mu_1\,, \qquad \psi \in \mathscr{H}_1\,.$$

Es sei nun μ_1 so ein Maß, daß das ZSP erfüllt ist für eine Zeitschicht T. Mit $f(x) \in \mathscr{D}(T)$ ist auch $e^{iz_0x_0} f(x) \in \mathscr{D}(T)$. Also läßt sich die Fouriertransformation

$$\tilde{f}(p_0 - z_0, \boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathscr{D}}(T)$$

zu einer ganzen Funktion erweitern und in eine Potenzreihe in z_0 entwickeln. Das Skalarprodukt mit einer beliebigen Funktion $\tilde{g}(p) \in L_2(\mu_1)$ ist

$$\int \tilde{g}(p)\, \tilde{f}(p_0 - z_0, \boldsymbol{p})\, d\mu_1 = \int \tilde{g}(p) \sum_n (p_0 - z_0)^n\, \tilde{f}_n(\boldsymbol{p})\, d\mu_1\,. \tag{1}$$

Wegen des starken Abfalles der $\tilde{f}_n(\boldsymbol{p})$ und von μ_1 (s. [2]) konvergiert das Integral gleichmäßig zumindest in einer Umgebung der Ebene $p_0 = z_0$. Also ergibt sich

$$= \sum_n \int \tilde{g}(p)\, \tilde{f}_n(\boldsymbol{p})\, (p_0 - z_0)^n\, d\mu_1(p)\,. \tag{2}$$

Offenbar ist $\tilde{f}_n(\boldsymbol{p})\,(p_0 - z_0)^n \in \tilde{\mathscr{D}}(\delta)$. Ist $\tilde{g}(p)$ eine beliebige zu $\tilde{\mathscr{D}}(\delta)$ orthogonale Funktion, so verschwindet jeder Summand in (2) und damit auch das Integral (1). $\tilde{g}(p)$ ist also auch zu $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ orthogonal. Da $\tilde{\mathscr{D}}(T)$ dicht in $\mathscr{L}_2(\mu_1)$ ist, trifft das auch für $\tilde{\mathscr{D}}(\delta)$ zu. Alle Feldoperatoren lassen sich also durch Testfunktionen zu einer scharfen Zeit erzeugen.

Herrn Professor Dr. H. J. BORCHERS danke ich herzlich für wertvolle Hinweise und Diskussionen.

Literatur

1. BORCHERS, H. J.: Three remarks on quantum field theory. New York University Progress Report 1963.
2. HAAG, R., and B. SCHROER: J. Math. Phys. **3**, 248 (1962).
3. GREENBERG, O. W.: Ann. Phys. **16**, 158 (1961).
4. JOST, R.: The general theory of quantized fields. Am Math. Soc. Providence: 1965.

C. MÖLLENHOFF
Universitäts-Sternwarte
3400 Göttingen, Geismarlandstr. 11