Commun. math. Phys. 10, 93—113 (1968)

Die induzierten Darstellungen inhomogen ergänzter unitärer Symmetriegruppen

U. Gralewski und K. Westpfahl
Institut für Theoretische Physik
der Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i. Br.

Eingegangen am 29. April 1968

Herrn Prof. H. Hönl zum 65. Geburtstag gewidmet

Abstract. By Mackey's method all irreducible unitary representations of those groups are induced which are the semi-direct products of a $2\,mn$-dimensional real vector group $\mathscr{X}(mn)$ and $\mathscr{S}\mathscr{U}(m) \oplus \mathscr{U}(n)$. These groups can be gained by contraction from the non-compact groups $\mathscr{S}\mathscr{U}(m, n)$. The representation spaces are explicitely constructed in terms of generalized spherical harmonics.

1. Einleitung

In den letzten Jahren haben die unitären Darstellungen nichtkompakter Gruppen in der Theorie der Elementarteilchen zunehmend an Bedeutung gewonnen. Dabei steht der Gedanke im Vordergrund, die empirisch bekannten kompakten Symmetriegruppen der Hadronen durch Aufnahme von Nichtsymmetrie-Elementen derart zu einer nichtkompakten Gruppe zu erweitern, daß *eine* der irreduziblen, unitären Darstellungen dieser Gruppe *alle* zulässigen Darstellungen der kompakten Symmetriegruppen zu einem quantenmechanischen Hilbertraum verschmilzt [1—12]. Den Prototyp einer derartigen spektrumerzeugenden Nichtsymmetriegruppe liefert bekanntlich das Wasserstoffatom: Das Coulomb-Potential führt über die Kugelsymmetrie hinaus zur dynamischen Symmetriegruppe $\mathscr{S}\mathscr{O}(4)$, deren endlichdimensionale Darstellungen durch eine unitäre, irreduzible Darstellung der Nichtsymmetriegruppe $\mathscr{S}\mathscr{O}(4,1)$ zum Hilbertraum der gebundenen Zustände des nichtrelativistischen H-Atoms verschmolzen werden [13—22].

In der Theorie der Elementarteilchen hat man zunächst alle diejenigen nichtkompakten Gruppen als spektrumerzeugend in Betracht zu ziehen, welche die Symmetrieelemente als kompakte Untergruppen enthalten. Dabei liegt es einmal in Analogie zum H-Atom nahe, die unitären, irreduziblen Darstellungen der zulässigen nichtkompakten halbeinfachen klassischen Gruppen zu untersuchen. Als derartige Grundbausteine sind in den letzten Jahren z. B. einige Serien unitärer Darstellungen der pseudounitären Gruppen $\mathscr{S}\mathscr{U}(m, n)$ konstruiert worden [23—34]. Zum anderen ist zwar der naheliegende Gedanke, die spektrumerzeugende Gruppe der Hadronen durch Verschmelzung der Poincaré-Gruppe mit den inneren Symmetriegruppen zu gewinnen, durch eine Reihe von Mißerfolgen diskreditiert worden (s. z. B. [35]). Immerhin dürfte die Wignersche Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe zumindest in formaler Hinsicht bemerkenswerte Ansatzpunkte liefern (vgl. auch [36]). Im Hinblick darauf konstruieren wir in der vorliegenden Arbeit *sämtliche* irreduziblen, unitären Darstellungen derjenigen Gruppen $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$, die aus den pseudounitären Gruppen $\mathcal{S}\mathcal{U}(m, n)$ dadurch hervorgehen, daß die Kommutatoren ihrer nichtkompakten Generatoren durch Kontraktion zum Verschwinden gebracht werden. $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$ kann auch als halbdirektes Produkt einer $2mn$-dimensionalen Translationsgruppe mit der zu $\mathcal{S}\mathcal{U}(m, n)$ gehörigen maximalen kompakten Untergruppe $\mathcal{S}\mathcal{U}(m) \oplus \mathcal{U}(n)$ aufgefaßt werden.

Der methodische Vorteil dieser formal wohl einfachsten Ergänzung einer beliebigen unitären zu einer nichtkompakten Gruppe besteht darin, daß wir in der Tat sämtliche irreduziblen, unitären Darstellungen von $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$ mittels des von G. W. Mackey entwickelten Induktionsverfahrens [37–40] explizit konstruieren können: Zunächst wird die Menge der unitären Darstellungen des abelschen Normalteilers mittels der maximalen kompakten Untergruppe gefasert (Klassifizierung der orbits). Daraufhin lassen sich die zugehörigen Isotropiegruppen (little groups) bestimmen, deren irreduzible, unitäre Darstellungen mit Hilfe des Cartanschen Gewichtskalküls konstruiert werden. Schließlich führen wir auf den Fasern ein gegenüber $\mathcal{S}\mathcal{U}(m) \oplus \mathcal{U}(n)$ invariantes Maß ein, wobei eine geeignete Teilmenge der bezüglich dieses Maßes quadratisch integrierbaren Funktionen den induzierten Darstellungsraum bildet, in dem Kombinationen höherdimensionaler Kugelfunktionen (Gegenbauersche Polynome) eine Basis aufspannen.

Abschließend gehen wir kurz auf die Möglichkeit ein, mittels des Gell-Mann-Hermann-Verfahrens (GMH-Verfahren [1 und 41, 42]) von den unitären $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$-Darstellungen zu denjenigen von $\mathcal{S}\mathcal{U}(m, n)$ aufzusteigen. Es zeigt sich, daß diese Möglichkeit auf den Fall $m = n$ beschränkt ist, wobei die sich ergebende einparametrige Darstellungsschar die von Hermann [41] angegebene Darstellung enthält.

2. Definition der Gruppen $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$

Die Gruppe der $(m + n)$-dimensionalen, unimodularen, pseudounitären Matrizen[1] $\tilde{U}$

$$\mathcal{S}\mathcal{U}(m, n) = \{\tilde{U} \,|\, \tilde{U}^\dagger g \tilde{U} = g\,, \quad \det(\tilde{U}) = 1\} \tag{2.1 a}$$

mit[2]

$$g = E_m \oplus (-E_n) \tag{2.1 b}$$

[1] Die Tilde ($\sim$) soll auf die Unimodularität der Matrizen U hinweisen.

[2] E_k ist die k-reihige Einheitsmatrix.

hat die maximale kompakte Untergruppe

$$\mathscr{K}(m, n) = \{K = \tilde{U}_m \oplus U_n | \tilde{U}_m \in \mathscr{S}\mathscr{U}(m),\ U_n \in \mathscr{U}(n)\} \tag{2.2}$$

Ferner ist die Matrizenmenge[3]

$$\mathscr{X}(mn) \doteq \left\{X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^\dagger & 0 \end{pmatrix} \middle| x \text{ beliebige, komplexe } (m \times n) \text{ Matrix}\right\} \tag{2.3}$$

bezüglich der Matrizenaddition ersichtlich eine reelle, abelsche Lie-Gruppe der Dimension $2mn$. Führt man nun in $\mathscr{X}(mn)$ durch

$$(X_1, X_2) \doteq \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(X_1 X_2) \tag{2.4}$$

eine positiv definite Metrik ein, so ist $\mathscr{X}(mn)$ isomorph zur Vektorgruppe eines $2mn$-dimensionalen, reellen, euklidischen Raumes. Wir definieren jetzt die Gruppe $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ als halbdirektes Produkt der Gruppen (2.2) und (2.3):

$$\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n) \doteq \mathscr{X}(mn) \boxtimes \mathscr{K}(m, n)\,. \tag{2.5a}$$

Die Elemente $V \in \mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ sind die Matrizenpaare $V = (X, K)$, die gemäß

$$V_1 V_2 = (X_1, K_1)(X_2, K_2) \doteq (X_1 + K_1 X_2 K_1^{-1}, K_1 K_2) \tag{2.5b}$$

zu multiplizieren sind, so daß die Elemente von $\mathscr{K}(m, n)$ als bistetige Automorphismen auf $\mathscr{X}(mn)$ wirken, und $\mathscr{X}(mn)$ isomorph zum Normalteiler

$$\{(X, E) | X \in \mathscr{X}(mn)\}$$

von $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ ist.

Wir wollen nun zeigen, daß $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ durch Kontraktion aus $\mathscr{S}\mathscr{U}(m, n)$ entsteht. Dazu betrachten wir die zu (2.1) gehörige Lie-Algebra

$$\mathfrak{su}(m, n) = \{\tilde{u} | \tilde{u}^\dagger g + g \tilde{u} = 0\,, \quad \operatorname{Sp}(\tilde{u}) = 0\}\,, \tag{2.6}$$

welche die Cartan-Zerlegung [43]

$$\mathfrak{su}(m, n) = \mathscr{k}(m, n) \oplus \mathscr{P}(mn) \tag{2.7a}$$

mit

$$[k_1, k_2] \subset \mathscr{k}(m, n)\,, \quad [k, P] \subset \mathscr{P}(mn)\,, \quad [P_1, P_2] \subset \mathscr{k}(m, n) \tag{2.7b}$$

hat, wobei

$$\mathscr{k}(m, n) \doteq \{k = \tilde{u}_m \oplus u_n | \tilde{u}_m \in \mathfrak{su}(m)\,, \quad u_n \in \mathfrak{u}(n)\} \tag{2.7c}$$

die Lie-Algebra von $\mathscr{K}(m, n)$ ist und

$$\mathscr{P}(mn) \doteq \left\{P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \middle| p \text{ beliebige, komplexe } (m \times n) \text{ Matrix}\right\} \tag{2.7d}$$

ein zu $\mathscr{X}(mn)$ isomorpher Vektorraum. Führen wir nun in $\mathfrak{su}(m, n)$ eine einparametrige, umkehrbare, lineare Transformationsschar $A \to A_\varepsilon$ gemäß

$$\begin{aligned} k_\varepsilon &= k \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathscr{k}(m, n) \\ P_\varepsilon &= \varepsilon P \qquad \text{für alle} \quad P \in \mathscr{P}(mn) \end{aligned} \tag{2.8a}$$

[3] Die Bezeichnung $a \doteq b$ bedeutet, daß a durch b definiert ist.

ein, so liefert die Kontraktion

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]' \doteq \lim_{\varepsilon\to 0} [(\tilde{u}_1)_\varepsilon, (\tilde{u}_2)_\varepsilon]_{\varepsilon^{-1}} \tag{2.8b}$$

die Lie-Algebra $\mathfrak{su}'(m, n)$ mit dem gleichen Vektorraum wie $\mathfrak{su}(m, n)$ und den folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[k_1, k_2]' = [k_1, k_2], \qquad [k, P]' = [k, P], \qquad [P_1, P_2]' = 0 . \tag{2.9}$$

Das ist aber die zu (2.5) gehörige Lie-Algebra.

3. Mathematische Hilfsmittel

3.1. Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $\mathscr{X}(mn)$ und $\mathscr{U}(n)$

3.1.1. Die irreduziblen, unitären Darstellungen der Vektorgruppe $\mathscr{X}(mn)$ lassen sich über das sog. SNAG Theorem [44] mittels ihrer Lie-Algebra $\mathscr{P}(mn)$ sämtlich auf die folgende Form bringen:

$$\mathscr{U}(P) = \left\{U_X(P) = \exp\left[\frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}(PX)\right] | X \in \mathscr{X}(mn)\right\}. \tag{3.1}$$

Dabei sind Darstellungen mit verschiedenen P paarweise inäquivalent.

3.1.2. Ferner sind die irreduziblen, unitären Darstellungen der kompakten Gruppe $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$ sämtlich endlichdimensional und jede solche Darstellung von $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$ ist einer unitären äquivalent, die überdies vollständig reduzibel ist. Nach Cartan wird aber eine endlichdimensionale, irreduzible Darstellung von $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$ eindeutig durch ihr dominantes Gewicht Λ^n charakterisiert, dessen $n-1$ Komponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{n-1}$ nichtnegative, ganze Zahlen sind. Umgekehrt entspricht jedem vorgegebenen Λ^n eindeutig eine irreduzible, unitäre Darstellung[4] [45]

$$\mathscr{U}(\Lambda^n) = \{U_{\tilde{U}_n}(\Lambda^n) | \tilde{U}_n \in \mathscr{S}\mathscr{U}(n)\} \tag{3.2}$$

Eine Basis des zugehörigen Darstellungsraumes $\mathfrak{U}(\Lambda^n) \doteq \{|\Lambda^n\rangle\}$ wird von den Vektoren

$$|\Lambda^n; \lambda^n, \Lambda^{n-1}, \ldots, \Lambda^2\rangle \doteq |\Lambda^n; A_N\rangle \tag{3.3}$$

aufgespannt. Dabei ist λ^n ein Gewicht der Darstellung (3.2), d. h. ein $(n-1)$-dimensionaler Vektor mit ganzzahligen Komponenten. Ferner sind $\Lambda^{n-1}, \ldots, \Lambda^2$ die dominanten Gewichte derjenigen Darstellungen der Untergruppen $\mathscr{S}\mathscr{U}(n-1), \ldots, \mathscr{S}\mathscr{U}(2)$ von $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$, in deren Darstellungsräumen der Vektor (3.3) bei Anwendung des Weylschen Verzweigungssatzes [46] als Basisvektor auftritt. Der Index $A_N = 1, 2, \ldots, N$ schließlich zählt die durch die Quantenzahlsätze $(\lambda^n, \Lambda^{n-1}, \ldots, \Lambda^2)$ charakterisierten Basisvektoren ab, deren Anzahl N die Dimension von $\mathfrak{U}(\Lambda^n)$ bestimmt.

---

[4] Das darzustellende Gruppenelement lassen wir häufig weg.

Neben der Darstellung (3.2) benötigen wir später die dazu kontragrediente

$$\mathscr{U}({}^n\Lambda) \doteq \{U_{\bar{U}_n}({}^n\Lambda) \doteq U^\dagger_{\bar{U}_n}(\Lambda^n)\}\,, \qquad (3.2^\dagger)$$

die auf dem zu $\mathfrak{U}(\Lambda^n)$ dualen Vektorraum $\mathfrak{U}^\dagger({}^n\Lambda) \doteq \{\langle {}^n\Lambda|\}$ gemäß $\langle {}^n\Lambda|U^\dagger_{\bar{U}_n}(\Lambda^n)$ wirkt. Als Basis in $\mathfrak{U}^\dagger({}^n\Lambda)$ wählen wir die Vektoren $\langle A_N;\,{}^n\Lambda|$, die zusammen mit (3.3) der folgenden Normierungsbedingung genügen:

$$\langle A_N;\,{}^n\Lambda|\Lambda^n;\,A'_N\rangle = \delta_{A_N A'_N}\,.$$

3.1.3 Schließlich ergeben sich für $\mathscr{U}(n) = \mathscr{U}(1) \otimes \mathscr{S}\mathscr{U}(n)$ die irreduziblen, unitären Darstellungen in der Form

$$\mathscr{U}(\underset{\cdot}{\Lambda}^n) = \{U_{U_n}(\underset{\cdot}{\Lambda}^n) = e^{i\Lambda_0\varphi}\,U_{\bar{U}_n}(\Lambda^n)|0 \leqq \varphi < 2\pi\}\,, \qquad (3.4)$$

mit

$$\underset{\cdot}{\Lambda}^n = (\Lambda_0, \Lambda_n) \quad \text{und} \quad \Lambda_0 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Der zu (3.4) gehörige Darstellungsraum stimmt mit $\mathfrak{U}(\Lambda^n)$ überein.

3.2. Zum Mackeyschen Induktionsverfahren

Nach Definition von $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m,n)$ wirkt jedes $K \in \mathscr{K}(m,n)$ auf der Gruppe $\mathscr{X}(mn)$ in der Form des äußeren Automorphismus $X \to KXK^{-1}$. Das ermöglicht in $\mathscr{X}(mn)$ die Einführung der Äquivalenzklassen

$$\mathscr{X}_X \doteq \{KXK^{-1}|K \in \mathscr{K}(m,n)\}\,. \qquad (3.5)$$

Daraus resultiert auf der Menge $\mathscr{U}$ aller Darstellungen (3.1) von $\mathscr{X}(mn)$ in natürlicher Weise die folgende Faserung [5]:

$$\mathscr{U}_P \doteq \{\mathscr{U}(KPK^{-1})|K \in \mathscr{K}(m,n)\}\,. \qquad (3.6)$$

Zur Klassifizierung dieser Fasern von $\mathscr{U}$ ist es notwendig, in einer jeden Faser einen durch sie eindeutig bestimmten Repräsentanten [6] $\mathscr{U}(P(r))$ auszuwählen.

Jeder Darstellung $\mathscr{U}(P)$ von $\mathscr{X}(mn)$ läßt sich gemäß

$$\mathscr{K}_P \doteq \{K \in \mathscr{K}(m,n)|U_{KXK^{-1}}(P) = U_X(P) \text{ für alle } X \in \mathscr{X}(mn)\} \qquad (3.7)$$

eine abgeschlossene Gruppe, die sog. Isotropiegruppe [7] von $\mathscr{U}(P)$ zuordnen, wobei die zu verschiedenen Elementen einer Faser gehörigen Isotropiegruppen zueinander isomorph sind. Die paarweise nicht isomorphen Isotropiegruppen (3.7) wollen wir durch einen geeigneten Indexsatz J abzählen und mit $\mathscr{K}_J$ bezeichnen, entsprechend ein beliebiges $P \in \mathscr{P}(mn)$, das eine zu $\mathscr{K}_J$ isomorphe Isotropiegruppe liefert,

---

[5] MACKEY verwendet hierfür die Bezeichnung „orbit".

[6] Es wird sich zeigen, daß der Repräsentant durch einen Parametersatz r charakterisiert ist.

[7] In der Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe verwendet WIGNER hierfür den Terminus „little group".

mit P_J. Um das Verfahren der induzierten Darstellungen auf die Gruppe $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ anwenden zu können, müssen die irreduziblen, unitären Darstellungen der Gruppen $\mathcal{S}\mathcal{U}'_J(m,n) \doteq \mathcal{X}(mn) \boxtimes \mathcal{K}_J$ und deren Darstellungsräume bekannt sein. Diese ergeben sich aber aus den leicht bestimmbaren, irreduziblen, unitären Darstellungen $\mathcal{U}(\mathcal{K}_J)$ der Isotropiegruppen $\mathcal{K}_J$ und den Darstellungen (3.1) von $\mathcal{X}(mn)$ zu:

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(\mathcal{S}\mathcal{U}'_J(m,n)) \\ &= \left\{U_{V_J} = \exp\left[\frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}(P_J(r)\,X)\right] U_{K_J} \middle| \mathcal{X} \in X(mn),\, K_J \in \mathcal{K}_J\right\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sei nun $|V\rangle$ eine Funktion auf $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ mit Werten in dem Darstellungsraum einer der Darstellungen (3.8), $\langle V|$ die dazu konjugiert komplexe Funktion und $d\Omega_J$ ein gegenüber den Transformationen von $\mathcal{K}(m,n)$ invariantes Maß auf der Menge $\mathcal{K}^J \doteq \mathcal{K}(m,n)/\mathcal{K}_J$ der Rechtsnebenklassen von $\mathcal{K}(m,n)$ nach $\mathcal{K}_J$. Dann wird von dieser Darstellung der Untergruppe $\mathcal{S}\mathcal{U}'_J(m,n)$ eine irreduzible, unitäre Darstellung der vollen Gruppe $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ über einem separablen Hilbertraum induziert, der von denjenigen Funktionen $|V\rangle$ gebildet wird, die für alle $V \in \mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ und $V_J \in \mathcal{S}\mathcal{U}'_J(m,n)$ der Bedingung

$$|V_J V\rangle = U_{V_J}|V\rangle \tag{3.9a}$$

genügen und in folgendem Sinne quadratisch integrierbar sind:

$$\int_{K^J} \langle V|V\rangle\, d\Omega_J < +\infty\,. \tag{3.9b}$$

Der Operator U_{V_0} eines beliebigen $V_0 \in \mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ wirkt in dem Hilbertraum (3.9) gemäß

$$U_{V_0}|V\rangle = |V V_0\rangle \tag{3.10a}$$

wobei folgende Produktregel zu beachten ist:

$$U_{V_1} U_{V_2}|V\rangle \doteq U_{V_2}|V V_1\rangle = |V V_1 V_2\rangle = U_{V_1 V_2}|V\rangle \tag{3.10b}$$

Da $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ von der Struktur eines halbdirekten Produktes mit abelschem Normalteiler ist, sind nach MACKEY die von den Darstellungen (3.8) der Gruppen $\mathcal{S}\mathcal{U}'_J(m,n)$ induzierten Darstellungen irreduzibel, unitär und paarweise inäquivalent. Umgekehrt ist jede irreduzible, unitäre Darstellung von $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m,n)$ einer induzierten äquivalent.

4. Faserung der Darstellungen von $\mathcal{X}(mn)$

Zwischen den Fasern (3.6) und den Untermengen

$$\mathcal{P}_P \doteq \{K P K^{-1} | K \in \mathcal{K}(m,n)\} \tag{4.1}$$

von $\mathcal{P}(mn)$ besteht ersichtlich eine bijektive Abbildung. Die Menge (4.1) ist aber ihrerseits wegen $P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \tilde{U}_m \oplus U_n$ bijektiv auf

$$\mathscr{p}_P \doteq \{\tilde{U}_m p U_n^\dagger | \tilde{U}_m \in \mathcal{S}\mathcal{U}(m),\, U_n \in \mathcal{U}(n)\} \tag{4.2}$$

abbildbar. Die Klassifizierung der Fasern (3.6) reduziert sich daher auf die Bestimmung einer in der Menge (4.2) eindeutig ausgezeichneten Matrix. Als solche wollen wir eine reelle Matrix mit möglichst vielen Nullelementen wählen. Es zeigt sich, daß diese Matrix folgende Gestalt hat[8]

$$p_{A_m}(r) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} r_1 & & & 0 \\ r_2 & r_3 & & \vdots \\ \cdot\;\;\cdot & \cdot\;\;\cdot & & \vdots \\ r_{2(A_m-1)} & r_{2A_m-1} & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \end{array}\right)_{\begin{array}{l} A_m \\ m \end{array}} \\ \quad A_m \qquad\qquad n \end{array}, \tag{4.3a}$$

wobei die Komponenten von

$$r \doteq (r_1, r_2, \ldots, r_{2A_m-1}) \tag{4.3b}$$

reelle Zahlen sind, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &r_1 > 0, \quad r_3 > 0, \quad r_A \geqq 0 \qquad\qquad (A = 2, 4, 5, \ldots, 2A_m - 1) \\ &r_{2A} + r_{2A+1} > 0,\ r_{2(A-1)} + r_{2A+1} > 0 \ \ (2 \leqq A \leqq A_m - 1)\,. \end{aligned} \tag{4.3c}$$

Setzen wir nämlich $m < n$ voraus, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, so läßt sich die Matrix (4.3) durch folgende eindeutige Schritte konstruieren:

4.1.

Besitzt p eine oder mehrere Null-Zeilen, so gibt es stets eindeutig eine Matrix $\tilde{U}_m \in \mathcal{S}\mathcal{U}(m)$, welche alle Null-Zeilen nach unten bringt, ohne die übrigen Elemente zu ändern. Die Reihenfolge der nicht aus lauter Nullen bestehenden Zeilen von p ist hingegen innerhalb von $\not{p}_P$ eindeutig.

4.2.

Mögen in der nach 4.1 konstruierten Matrix genau die ersten A_m Zeilen nicht aus lauter Nullen bestehen. Dann können wir von dieser innerhalb von $\not{p}_P$ eindeutig zu einer Matrix der Gestalt (4.3a) übergehen, wobei die Komponenten von r zunächst durch $r_1 > 0$ und $r_A \geqq 0$ für $A = 2, 3, \ldots, 2A_m - 1$ eingeschränkt sind. Hierzu müssen wir nur auf die Matrix aus 4.1. die folgenden Matrizenpaare gemäß (4.2) anwenden:

Schritt $2A - 1$: $(A = 1 \ldots A_m)$

$$\tilde{U}_m = E_m\,, \qquad U_n = E_{A-1} \oplus U_{n-A+1}$$

Schritt $2A$: $(A = 1 \ldots A_m - 1)$

$$\tilde{U}_m = E_A \oplus U_{A_m-A} \oplus \det{}^*(U_{A_m-A})\, E_{m-A_m}\,, \qquad U_n = E_n\,.$$

Bei diesen können wir die Matrizen U_{n-A+1} und U_{A_m-A} wegen der Transitivität von $\mathcal{U}(n)$ auf den $(2n-1)$-dimensionalen, reellen Sphären eindeutig so bestimmen, daß sich nach den angegebenen $2A_m - 1$ Schritten die Gestalt (4.3a) ergibt.

[8] Wir bezeichnen generell einen Indexsatz $(1, 2, \ldots, k)$ durch A_k.

4.3.

Ist in der Matrix (4.3a) eine der Bedingungen

$$r_3 = 0,\ r_{2A} + r_{2A+1} = 0,\ r_{2(A-1)} + r_{2A+1} = 0\ \ (2 \leqq A \leqq A_m - 1) \quad (4.4)$$

erfüllt, so kann man innerhalb von $\not{p}_P$ eindeutig zu einer Matrix der Gestalt (4.3a) übergehen, in der nur die ersten $A_m - 1$ Zeilen nicht aus lauter Nullen bestehen. Man überzeugt sich leicht, daß durch (4.4) alle Fälle gegeben sind, in denen eine solche, weitere Reduktion der Matrix aus 4.2 möglich ist.

4.4.

Wir zeigen nun noch, daß r auf $\mathscr{P}_P$ invariant ist, womit zugleich nachgewiesen ist, daß jedes $p \in \not{p}_P$ zur selben Matrix (4.3) führt. Sei nämlich P ein beliebiges Element der durch $P_{Am}(r)$ gehenden Faser, so existiert eindeutig ein $KP \in \mathscr{K}(m, n)$ mit $P = K_P P_{A_m}(r)\, K_P^{-1}$. Führen wir jetzt die $2m - 1$ Matrizen

$$\hat{p}_{2A-1} \doteq \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ A \\ \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & A & & n \end{array} & \end{array}, \qquad \hat{p}_{2A} \doteq \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & 0 \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ A \\ \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & A & & n \end{array} & \end{array}$$

ein, so lassen sich die $r_A\,(A = 1 \ldots 2A_m - 1)$ für alle P aus (4.1) in der folgenden Form darstellen:

$$2r_A = \mathrm{Sp}(P_{A_m}(r)\, \hat{P}_A) = \mathrm{Sp}(K_P^{-1} P K_P \hat{P}_A) = \mathrm{Sp}(P K_A \hat{P}_A K_P^{-1})\,.$$

Bezeichnen wir nun die durch $P = 0$ charakterisierte Faser $\{\mathscr{U}(0) = 1\}$ mit $\mathscr{U}_0$ und die übrigen Fasern mit

$$\mathscr{U}_{A_m}(r) \doteq \{\mathscr{U}(K P_{A_m}(r)\, K^{-1} | K \in \mathscr{K}(m, n)\} \quad (4.5)$$

so erhalten wir für die Menge $\mathscr{U}$ aller irreduziblen, unitären Darstellungen von $\mathscr{X}(mn)$ die Faserung

$$\mathscr{U} = \bigcup_{A_m, r} \mathscr{U}_{A_m}(r) \cup \mathscr{U}_0\,. \quad (4.6)$$

5. Die Isotropiegruppe $\mathscr{K}_J$

5.1.

Zur Klassifizierung der Isotropiegruppen $\mathscr{K}_J$ genügt es, zu untersuchen, welche der Darstellungen $\mathscr{U}(0)$ und $\mathscr{U}(P_{A_m}(r))$ von $\mathscr{X}(mn)$ nichtisomorphe Isotropiegruppen liefern, da die von den Elementen einer Faser (3.6) gegebenen zueinander isomorph sind. Zunächst folgt aus (3.7) für die Isotropiegruppe $\mathscr{K}_0$ bezüglich $\mathscr{U}(0)$ sofort

$$\mathscr{K}_0 = \mathscr{K}(m, n)\,. \quad (5.1)$$

5.2.

Zur Bestimmung der nichtisomorphen Isotropiegruppen der Darstellungen $\mathscr{U}(P_{A_m}(r))$ führen wir zunächst den sog. Defektindex d ein. Dieser gibt an, wieviele der ersten A_m Spalten von $p_{A_m}(r)$ aus lauter Nullen bestehen. Er kann bei vorgegebenem A_m einen der ganzzahligen Werte aus dem Intervall $\left[0, \frac{1}{3} A_m\right]$ annehmen.

Setzen wir nun voraus, daß die restlichen „Nebendiagonalelemente" von (4.3a) nicht verschwinden, so liefern alle Darstellungen $\mathscr{U}(P_{J_0}(r))$ mit gleichem Index $J_0 \doteq (A_m, d)$ unabhängig von den Werten der übrigen Komponenten von r zueinander isomorphe Isotropiegruppen:

$$\mathscr{K}_{J_0}(m, n) = \{K_{J_0} = U_{m-A_m} \oplus U_{n-Am+d}\} . \tag{5.2}$$

In der Tat ist ein $K \in \mathscr{K}(m, n)$ wegen (3.7), (3.1) und (4.1,2) genau dann Element der zu $\mathscr{U}(P_{J_0}(r))$ gehörigen Isotropiegruppe, wenn für $p_{J_0}(r)$ die folgende Invarianzbedingung gilt:

$$\tilde{U}_m p_{J_0}(r)\, U_n^\dagger = p_{J_0}(r) . \tag{5.3}$$

Denken wir uns jetzt die d Null-Spalten von $p_{J_0}(r)$ durch eine innerhalb (4.2) mögliche Transformation nach rechts gebracht, so lassen ersichtlich genau die folgenden Elemente $\tilde{U}_m \oplus U_n$ aus $\mathscr{K}(m, n)$ die Matrix $p_{J_0}(r)$ gemäß (5.3) invariant (und zwar unabhängig von den Werten der Komponenten von r):

$$\tilde{U}_m = \eta E_{A_m} \oplus U_{m-A_m} , \qquad \eta = [\det{}^* (U_{m-A_m})]^{\frac{1}{A_m}}$$

$$U_n = \eta E_{A_m - d} \oplus U_{n - A_m + d}$$

Die Menge dieser Matrizen ist aber isomorph zu Isotropiegruppe (5.2).

5.3.

Für den Fall beliebiger „Nebendiagonalelemente" erweist sich folgende Nomenklatur als zweckmäßig: Wir bezeichnen einen Zeilenindex von $p_{J_0}(r)$ dann mit B, wenn in der B-ten Zeile und B-ten Spalte nur das „Diagonalelement" r_{2B-1} von Null verschieden ist. Die Anzahl e solcher B-Indizes ist eine der ganzen Zahlen aus dem Intervall $[0, A_m - 2d]$. Alle B-Indizes, für welche die „Diagonalelemente" r_{2B-1} übereinstimmen, fassen wir zu einer Klasse zusammen. Dann ergibt sich für e die Summendarstellung $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_E (E \leqq A_m)$, wobei e_k die Anzahl der B-Indizes der k-ten Klasse ist. Den Indexsatz[9] $(e_1 \ldots e_E) = e$ bezeichnen wir als Entartungsindex von $p_{J_0}(r)$.

[9] Wir verwenden den Buchstaben e sowohl als Inbegriff der Zahlen e_k als auch für ihre Summe.

Die Isotropiegruppen aller Darstellungen $\mathscr{U}(P_J(r))$ mit dem gleichen Indextripel $(A_m, d, e) \doteq J$ (aber beliebigen damit verträglichen Werten von r) sind zueinander isomorph. Die durch J eindeutig bestimmten nichtisomorphen Isotropiegruppen von $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ ergeben sich daher zu

$$\mathscr{K}_J(m, n) = \{K_J = U_e \oplus U_{m-A_m} \oplus U_e \oplus U_{n-A_m+d}\} . \tag{5.4a}$$

Hierbei ist U_e folgendermaßen definiert:

$$U_e = \bigoplus_{k=1}^{E} U_{e_k} \quad \text{für} \quad e < A_m \tag{5.4b}$$

und

$$U_e = \tilde{U}_{e_1} \oplus \bigoplus_{k=2}^{E} U_{e_k} \quad \text{für} \quad e = A_m . \tag{5.4c}$$

Die durch die B-Indizes der k-ten Klasse bestimmte Untermatrix von $p_J(r)$ ist nämlich ein Vielfaches der ,,Einheitsmatrix" und damit gegenüber Ähnlichkeitstransformationen mit den Matrizen $U_{e_k} \in \mathscr{U}(e_k)$ invariant. Dann ist aber ersichtlich die Menge der Matrizenpaare $(\tilde{U}_m, U_n)$, die $p_J(r)$ im Sinne von (5.3) invariant lassen im Falle $e < A_m$ zur Menge der Matrizenpaare

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \eta E_{A_m-e} \oplus \bigoplus_{k=1}^{E} U_{e_k} \oplus U_{m-A_m}, \quad \eta = \left[\prod_{k=1}^{E} \det{}^*(U_{e_k}) \det{}^*(U_{m-A_m})\right]^{\frac{1}{A_m-e}} \\ U_n &= \eta E_{A_m-e-d} \oplus \bigoplus_{k=1}^{E} U_{e_k} \oplus U_{n-A_m+d} \end{aligned} \tag{5.5a}$$

und im Falle $e = A_m$ zu der folgenden Menge isomorph:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \eta \tilde{U}_{e_1} \oplus \bigoplus_{k=2}^{E} U_{e_k} \oplus U_{m-A_m}, \quad \eta = \prod_{k=2}^{E} \det{}^*(U_{e_k}) \det{}^*(U_{m-A_m}) \\ U_n &= \eta \tilde{U}_{e_1} \oplus \bigoplus_{k=2}^{E} U_{e_k} \oplus U_{n-A_m} . \end{aligned} \tag{5.5b}$$

Die mit diesen Matrizenpaaren gebildeten Gruppen $\{\tilde{U}_m \oplus U_n\}$ sind aber ihrerseits zu den Isotropiegruppen (5.4) isomorph.

6. Die Mengen der Rechtsnebenklassen

6.1.

Wir wollen jetzt den Mengen der Rechtsnebenklassen $\mathscr{K}^J = \mathscr{K}(m, n)/\mathscr{K}_J$ dadurch eine geometrische Deutung geben, daß wir jedem $\mathscr{K}^J$ bijektiv einen Punktraum $\mathfrak{R}^J$ zuordnen. Dies ermöglicht es uns, im nächsten Abschnitt auf jedem $\mathscr{K}_J$ ein gegenüber $\mathscr{K}(m, n)$ invariantes Maß $d\Omega_J$ einzuführen. Da die Elemente der Isotropiegruppe $\mathscr{K}_J$ die Matrix $P_J(r)$ invariant lassen, können wir durch[10] $K^J \leftrightarrow P^J(r)$

[10] ${}^{-1}K^J \doteq (K^J)^{-1}$.

$= {}^{-1}K^J P_J(r) K^J$ eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen $\mathscr{K}^J$ und $\mathscr{P}^J(r) \doteq \mathscr{P}_{P_J}(r)$ definieren. Wegen (4.1,2) besteht dann auch eine bijektive Abbildung zwischen $\mathscr{K}^J$ und der Menge $\not{p}^J(r) \doteq \not{p}_{P_J}(r)$. Jeder der Mengen $\not{p}^J(r)$ läßt sich nun auf Grund des folgenden Sachverhalts ein geometrischer Raum bijektiv zuordnen (vgl. [47 und 48]):

6.1.1. $\mathscr{U}(n)$ ist auf jeder $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre $\mathfrak{S}^{2n-1}$ transitiv. Ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{S}^{2n-1}$ hat als Fixgruppe eine zu $\mathscr{U}(n-1)$ isomorphe Untergruppe von $\mathscr{U}(n)$, so daß zwischen $\mathfrak{S}^{2n-1}$ und dem Raum der Rechtsnebenklassen $\mathscr{U}(n)/\mathscr{U}(n-1)$ eine bijektive Abbildung besteht.

6.1.2. $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$ ist auf dem $(n-1)$-dimensionalen, komplexen, projektiven Raum transitiv. Ein beliebiger Punkt dieses Raumes hat als Fixgruppe eine zu $\mathscr{U}(n-1)$ isomorphe Untergruppe von $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)$. Daher ist $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)/\mathscr{U}(n-1)$ bijektiv auf den $(n-1)$-dimensionalen, komplexen, projektiven Raum abbildbar. Da aber eine bijektive Abbildung besteht zwischen letzterem und der $2(n-1)$-dimensionalen, reellen Sphäre $\tilde{\mathfrak{S}}^{2(n-1)}$ mit identifizierten antipodischen Punktepaaren, so besteht auch zwischen $\mathscr{S}\mathscr{U}(n)/\mathscr{U}(n-1)$ und $\tilde{\mathfrak{S}}^{2(n-1)}$ eine bijektive Abbildung.

6.2.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $e = 0$. Dann läßt sich die Menge $\mathscr{K}^{J_0}$ bijektiv auf den Raum

$$\mathfrak{R}^{J_0} = \prod_{A=1}^{A_m-1} \mathfrak{S}^{2(m-A_m+A)-1} \times \tilde{\mathfrak{S}}^{2(m-1)} \times \prod_{A=1}^{A_m-d} \mathfrak{S}^{2(n-A_m+d+A)-1} \tag{6.1}$$

abbilden, wobei alle auftretenden Sphären als Einheitssphären gewählt werden können.

Zum Beweis müssen wir nach 6.1 nur zeigen, daß zwischen dem Raum (6.1) und der Menge $\not{p}^{J_0}(r)$ eine von den zulässigen r unabhängige bijektive Abbildung besteht. Dazu erzeugen wir $\not{p}^{J_0}(r)$ auf folgende Weise:

Zunächst wenden wir auf $p_{J_0}(r)$ (mit nach rechts gebrachten Null-Spalten) gemäß (4.2) sukzessive die nachstehenden $A_m - 1$ Transformationsklassen an[11]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \eta_A E_{A_m-A} \oplus U^R_{m-A_m+A}, \quad \eta_A = [\det{}^*(U^R_{m-A_m+A})]^{\overline{A_m-A}^{\,1}} \\ U_n &= \eta_A E_{A_m-A} \oplus E_{n-A_m+A}, \quad A = 1 \dots A_m - 1\,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Der erste Schritt liefert eine Matrizenmenge, die wegen 6.1.1 bijektiv auf die $[2(m - A_m + 1) - 1]$-dimensionale Sphäre vom Radius[12] r_{2A_m-1} abgebildet werden kann. Diese ist aber ihrerseits bijektiv auf die Ein-

[11] Wir wollen allgemein einen Rechtsvertreter von $\mathscr{U}(k)$ bezüglich der Untergruppe $\{E_1 \oplus U_{k-1}\}$ mit U^R_k und von $\mathscr{S}\mathscr{U}(k)$ bezüglich der gleichen Untergruppe mit $\tilde{U}^R_k$ bezeichnen.

[12] Ist $r_{2A_m-1} = 0$, so hat diese Sphäre den Radius $r_{2(A_m-1)} \neq 0$.

heitssphäre $\mathfrak{S}^{2(m-A_m+1)-1}$ abbildbar. Wenden wir auf ein beliebiges Element dieser Matrizenmenge die Transformation der zweiten Klasse von (6.2) an, so erhalten wir analog eine Menge, die bijektiv auf die Einheitssphäre $\mathfrak{S}^{2(m-A_m+2)-1}$ abgebildet werden kann. Daher ist die nach zwei Schritten konstruierte Menge bijektiv abbildbar auf den Produktraum $\mathfrak{S}^{2(m-A_m+1)-1} \times \mathfrak{S}^{2(m-A_m+2)-1}$. Nach den $A_m - 1$ Schritten (6.2) ergibt sich eine Matrizenmenge, welche auf die ersten $A_m - 1$ Faktorräume von (6.1) bijektiv abbildbar ist. Auf diese Menge wenden wir nun die Transformationen

$$\tilde{U}_m = \tilde{U}_m^R, \qquad U_n = E_n \tag{6.3}$$

an und danach sukzessive die folgenden $A_m - d$ Transformationsklassen:

$$\tilde{U}_m = E_m, \qquad U_n = E_{A_m-d-A} \oplus U^R_{n-A_m+d+A}. \tag{6.4}$$

Dann erhalten wir eine Matrizenmenge, die sich mittels 6.1.1 und 6.1.2 bijektiv auf den Raum (6.1) abbilden läßt. Diese Matrizenmenge ist aber mit $\not{p}^{J_0}(r)$ identisch, da sich jedes Element von $\not{p}^{J_0}(r)$ durch ein Produkt von Transformationen (6.2,3,4) aus $p_{J_0}(r)$ erzeugen läßt.

6.3.

Zur Betrachtung des allgemeinen Falles setzen wir voraus, daß die Isotropiegruppen $\mathscr{K}_J$ durch die Matrizen (5.5a, b) gegeben seien, so daß in $p_J(\mathrm{r})$ genau die Zeilenindizes $A_m - e + 1, A_m - e + 2, \ldots, A_m$ B-Indizes sind. Dann ist folgende Nomenklatur zweckmäßig: Jeder ganzen Zahl A aus dem Intervall $[1, e]$ ordnen wir die ebenfalls ganze Zahl $A^e \doteq A - \Sigma e_k$ zu, wobei Σe_k die größte der Teilmengen e_E, $e_E + e_{E-1}, \ldots, e_E + \ldots + e_2$ bedeutet, die echt kleiner als A ist. Demnach durchläuft A^e sukzessive das Indextupel $(1 \ldots e_E;\ 1 \ldots e_{E-1};\ \ldots;\ 1 \ldots e_1)$, wenn A die Werte 1 bis e annimmt.

Ist nun $e < A_m$, so zeichnen wir in den e ersten Transformationsklassen (6.2) und (6.4) die folgenden Unterklassen aus[13]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \bar{\eta}_A E_{A\,m-A} \oplus U^R_{A^e} \oplus E_{m-A_m+A-A^e} \\ U_n &= \bar{\eta}_A E_{A_m-A} \oplus E_{n-A_m+A}, \quad \bar{\eta}_A = [\det{}^*(U^R_{A^e})]^{\frac{1}{A_m-A}} \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\tilde{U}_m = E_m, \; U_n = E_{A_m-d-A} \oplus U^R_{A^e} \oplus E_{n-A_m+d+A-A^e} \tag{6.6}$$

Ist dagegen $e = A_m$, so zeichnen wir darüber hinaus von den Transformationen (6.3) und der A_m-ten Transformationsklasse (6.4) die folgenden Untergruppen aus:

$$\tilde{U}_m = \tilde{U}^R_{e_1} \oplus E_{m-e_1}, \qquad U_n = E_n \tag{6.7}$$

$$\tilde{U}_m = E_m, \qquad U_n = \tilde{U}^R_{e_1} \oplus E_{n-e_1}. \tag{6.8}$$

Denken wir uns jetzt die zu (6.1) führende Konstruktion wiederholt, so werden in den Faktorräumen von $\mathfrak{R}^{J_0}$ durch die Transformationen

[13] Ist $A^e = 1$, so entfällt der Index R.

(6.5,6) $(2A^e-1)$-dimensionale Untersphären und durch (6.7,8) die Unterräume $\tilde{\mathfrak{S}}^{2(e_1-1)}$ ausgezeichnet, was wir durch die folgende Schreibweise zum Ausdruck bringen:

$$\mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(m-A_m+A)-1}, \quad \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(n-A+d+A)-1}; \quad \tilde{\mathfrak{S}}_{2(e_1-1)}^{2(m-1)}, \quad \mathfrak{S}_{2(e_1-1)}^{2n-1}$$

Zwischen zwei Punkten sich entsprechender ausgezeichneter Unterräume soll die Gleichheitsrelation gelten, wenn diese Punkte durch solche Transformationspaare (6.5,6) bzw. (6.7,8) entstehen, bei denen die Matrizen $U^R_{A^e}$ bzw. $\tilde{U}^R_{e_1}$ gleich sind. Definieren wir nun die speziellen Produkträume

$$\mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(m-A_m+A)-1} * \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(n-A_m+d+A)-1}; \quad \tilde{\mathfrak{S}}_{2(e_1-1)}^{2(m-1)} * \mathfrak{S}_{2(e_1-1)}^{2n-1},$$

als die Mengen derjenigen Punktepaare, für deren Punkte diese Gleichheitsrelation nicht besteht, so sind die Mengen $\mathscr{K}^J$ für $e < A_m$ bijektiv auf die Räume

$$\mathfrak{R}^J = \left(\prod_{A=1}^{A_m-1} \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(m-A_m+A)-1} \times \tilde{\mathfrak{S}}^{2(m-1)}\right) * \prod_{A=1}^{A_m-d} \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(n-A_m+d+A)-1} \tag{6.9a}$$

abbildbar und für $e = A_m$ auf die folgenden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^J = &\left(\prod_{A=1}^{A_m-1} \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(m-A_m+A)-1} \times \tilde{\mathfrak{S}}_{2(e_1-1}^{2(m-1)}\right)\\ &* \left(\prod_{A=1}^{A_m-1} \mathfrak{S}_{2A^e-1}^{2(n-A_m+A)-1} \times \mathfrak{S}_{2(e_1-1)}^{2n-1}\right)\end{aligned} \tag{6.9b}$$

Der Beweis hierfür ergibt sich analog zu dem von (6.1), wenn man noch berücksichtigt, daß die Produkte genau derjenigen Transformationspaare (6.5,6) bzw. (6.7,8) Elemente der Isotropiegruppe $\mathscr{K}_J$ sind, bei denen die gleichen Matrizen $\tilde{U}^R_{A^e}$ bzw. $U^R_{e_1}$ auftreten. Die ihnen entsprechenden Punktepaare von (6.1) müssen daher ausgelassen werden.

7. Die Maße $d\Omega^J$

7.1.

Wir betrachten zunächst die Räume (6.1). Jeden der Faktorräume von $\mathscr{K}^{J_0}$ denken wir uns in einen euklidischen Raum R^N minimaler Dimension N eingebettet. In diesem seien die Polarkoordinaten $(r, \vartheta_0, \vartheta_1 \ldots \vartheta_{N-2})$ eingeführt, welche die Werte

$$0 \leqq r < \infty\,, \quad 0 \leqq \vartheta_0 < 2\pi\,, \quad 0 \leqq \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2} \leqq \pi \tag{7.1}$$

annehmen können und mit den kartesischen Koordinaten $(x_1 \ldots x_N)$ von R^N in der üblichen Weise zusammenhängen:

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\vartheta_1\,, \quad x_k = r\prod_{A=1}^{k-1}\sin\vartheta_A\cos\vartheta_k\,, \quad (1 < k < N-1)\\ &x_{N-1} = r\prod_{A=1}^{N-2}\sin\vartheta_A\cos\vartheta_0\,, \quad x_N = r\prod_{A=1}^{N-2}\sin\vartheta_A\sin\vartheta_0\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Ein Koordinatensystem auf der $(N-1)$-dimensionalen Einheitssphäre um den Koordinatenursprung des R^N wird dann von den Winkeln $\vartheta^{N-1} \doteq (\vartheta_0, \vartheta_1 \ldots \vartheta_{N-2})$ gebildet. In diesen lautet das Volumenelement der Einheitssphäre

$$d\Omega^{N-1} = d\vartheta_0 \prod_{A=1}^{N-2} (\sin\vartheta_A)^{N-A-1} d\vartheta_A \,. \tag{7.3}$$

Identifizieren wir bei der $(N-1)$-dimensionalen Einheitssphäre antipodische Punktepaare:

$$(\vartheta_0, \vartheta_1 \ldots \vartheta_{N-2}) = (\vartheta_0 + \pi \operatorname{mod} 2\pi, \pi - \vartheta_1 \ldots \pi - \vartheta_{N-2}) \,, \tag{7.4}$$

so folgt aus (7.2) sofort, daß sich die Koordinaten $\tilde{\vartheta}^{N-1} \doteq (\tilde{\vartheta}_0, \tilde{\vartheta}_1 \ldots \tilde{\vartheta}_{N-2})$ von $\tilde{\mathfrak{S}}^{N-1}$ aus denen von $\mathfrak{S}^{N-1}$ durch folgende Einschränkung der Wertebereiche ergeben[14]:

$$0 \leqq \tilde{\vartheta}_1 < \frac{\pi}{2}, \ldots ; \tilde{\vartheta}_1 = \frac{\pi}{2}, 0 \leqq \tilde{\vartheta}_2 < \frac{\pi}{2}, \ldots ; \tag{7.5}$$

$$\tilde{\vartheta}_1 = \tilde{\vartheta}_2 = \frac{\pi}{2}, \; 0 \leqq \tilde{\vartheta}_3 < \frac{\pi}{2}, \ldots ; \ldots ; \tilde{\vartheta}_1 = \ldots = \tilde{\vartheta}_{N-2} = \frac{\pi}{2}, \; 0 \leqq \tilde{\vartheta}_0 < \pi \,.$$

Da $\tilde{\mathfrak{S}}^{N-1}$ nach (7.5) die „obere Halbsphäre" von $\mathfrak{S}^{N-1}$ ist, so ergibt sich das Volumenelement $d\tilde{\Omega}^{N-1}$, indem man in (7.3) die ϑ durch die $\tilde{\vartheta}$ ersetzt.

Definieren wir nun für $A = 1, 2, \ldots, A_m - 1$ die Winkelsätze

$$\vartheta_A^{m-A_m} \doteq (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{2(m-A_m+A-1)}) \tag{7.6a}$$

und entsprechend für $A = 1, 2, \ldots, A_m - d$

$$\vartheta_A^{n-A_m+d} \doteq (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{2(n-A_m+d+A-1)}) \tag{7.6b}$$

so erhalten wir als Koordinatensystem von $\mathfrak{R}^{J_0}$

$$\vartheta^{J_0} \doteq (\vartheta_A^{m-A_m}; \tilde{\vartheta}^{2(m-1)}; \vartheta_A^{n-A_m+d}) \,. \tag{7.7}$$

Mit den (7.6) entsprechenden Volumenelementen $d\Omega_A^{m-A_m}$, $d\tilde{\Omega}^{2(m-1)}$ und $d\Omega_A^{n-A_m+d}$ lautet dann das Volumenelement von $\mathfrak{R}^{J_0}$:

$$d\Omega^{J_0} \doteq \prod_{A=1}^{A_m-1} d\Omega_A^{m-A_m} d\tilde{\Omega}^{2(m-1)} \prod_{A=1}^{A_m-1} d\Omega_A^{n-A_m+d} \,. \tag{7.8}$$

7.2.

Das Koordinatensystem (7.7) kann auch in den Räumen $\mathfrak{R}^J$ aus (6.9) eingeführt werden. Es entsprechen jedoch denjenigen Koordinaten (7.7) keine Punkte von $\mathfrak{R}^J$, bei denen (wenigstens) ein Paar von Koordinatensätzen $(\vartheta_A^{m-A_m}, \vartheta_A^{n-A_m+d})$ bzw. $(\tilde{\vartheta}^{2(m-1)}, \vartheta_{A_m}^{n-A_m})$ zu Punkten der ausgezeichneten Unterräume gehört, zwischen denen die Gleichheitsrelation aus 6.3 gilt. Das auf den Raum $\mathfrak{R}^J$ eingeschränkte Koordi-

[14] Die durch Punkte angedeuteten $\tilde{\vartheta}$-Bereiche stimmen mit den entsprechenden ϑ-Bereichen von (7.1) überein.

natensystem (7.7) bezeichnen wir mit ϑ^J. Ersichtlich kann (7.8) auch als Volumenelement von $\mathfrak{R}^J$ gewählt werden, weshalb wir $d\Omega^J = d\Omega^{J_0}$ setzen.

7.3.

Wir zeigen nun, daß durch (7.8) ein gegenüber $\mathscr{K}(m, n)$ invariantes Maß auf den Räumen $\mathfrak{R}^J$ definiert wird. Zunächst folgt aus der in 6. durchgeführten Konstruktion dieser Räume sofort, daß $\mathscr{K}(m, n)$ erstens jeden Faktorraum von $\mathfrak{R}^J$ auf sich abbildet und zweitens auf diesem entweder wie eine unitäre Gruppe geeigneter Dimension oder wie $\mathscr{S}\mathscr{U}(m)$ wirkt. Nun ist aber das Volumenelement (7.3) mit $N = 2n$ gegenüber den Transformationen von $\mathscr{U}(n)$ invariant. Der n-dimensionale, komplexe Raum $x = (x_A) \doteq ('x_A + i x'_A)$ kann nämlich bijektiv auf den $2n$-dimensionalen, reellen Raum $X \doteq \begin{pmatrix} 'x_A \\ x'_A \end{pmatrix}$ abgebildet und in diesem durch

$$(X, Y) \doteq \sum_{A=1}^{n} ('x_A\, 'y_A + x'_A y'_A) = \mathrm{Re}\,(x^\dagger y) \tag{7.9}$$

eine euklidische Metrik eingeführt werden. Diese ist aber ersichtlich invariant gegenüber den Transformationen von $\mathscr{U}(n)$, so daß das nur aus Winkeln aufgebaute Volumenelement (7.3) ebenfalls invariant ist. Analog ergibt sich die Invarianz des Volumenelementes $d\tilde{\Omega}^{2(m-1)}$ gegenüber den Transformationen von $\mathscr{S}\mathscr{U}(m)$.

8. Die induzierten Darstellungsräume

8.1.

Wir bestimmen zunächst die irreduziblen, unitären Darstellungen von $\mathscr{S}\mathscr{U}'_J(m, n) = \mathscr{X}(mn) \boxtimes \mathscr{K}_J$ und die zugehörigen Darstellungsräume.

Die irreduziblen Darstellungen der Isotropiegruppen (5.4) lassen sich mit Hilfe von (3.2,4) sofort hinschreiben:

$$\mathscr{U}(\Lambda_J) = \{U_{K_J}(\Lambda_J) = U(\Lambda^e) \oplus U(\Lambda^{m-A_m}) \oplus U(\Lambda^e) \oplus U(\Lambda^{n-A_m+d})\}\,. \tag{8.1 a}$$

Hierbei ist $U(\Lambda^e)$ für $e < A_m$ gemäß

$$U(\Lambda^e) \doteq \bigoplus_{k=1}^{E} U(\Lambda^{e_k}) \tag{8.1 b}$$

und für $e = A_m$ folgendermaßen definiert:

$$U(\Lambda^e) \doteq U(\Lambda^{e_1}) \oplus \bigoplus_{k=2}^{E} U(\Lambda^{e_k})\,. \tag{8.1 c}$$

Nach 3.1.2 und 3.1.3 sind die zugehörigen Darstellungsräume $\mathfrak{U}(\Lambda_J) = \{|\Lambda_J\rangle\}$ gegeben durch

$$\mathfrak{U}(\Lambda_J) \doteq \bigoplus_{k=1}^{E} \mathfrak{U}(\Lambda^{e_k}) \oplus \mathfrak{U}(\Lambda^{m-A_m}) \oplus \bigoplus_{k=1}^{E} \mathfrak{U}(\Lambda^{e_k}) \oplus \mathfrak{U}(\Lambda^{n-A_m+d}) \tag{8.2}$$

und eine Basis in diesen durch die folgenden auf 1 normierten Vektoren:

$$|\Lambda_J; A_N\rangle \doteq \bigoplus_{k=1}^{E} |\Lambda^{e_k}; A_{N_{e_k}}\rangle \oplus |\Lambda^{n-A_m}; A_{N_n-A_m}\rangle \tag{8.3}$$

$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{E} |\Lambda^{e_k}; A_{N_{e_k}}\rangle \oplus |\Lambda^{n-A_m+d}; A_{N_n-A_m+d}\rangle .$$

Aus (3.8) ergeben sich dann die irreduziblen unitären Darstellungen von $\mathscr{S}\mathscr{U}'_J(m, n)$ zu:

$$\mathscr{U}(r, \Lambda_J) \doteq \left\{U_{V_J}(r, \Lambda_J) = \exp\left[\frac{i}{2}\operatorname{Sp}(P_J(r)\,X)\right] U_{K_J}(\Lambda_J)\right\} . \tag{8.4}$$

Die zugehörigen Darstellungsräume sind ersichtlich durch (8.2) gegeben.

8.2.

Wir wenden uns nun der Konstruktion der induzierten Darstellungen von $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ zu und betrachten zuerst den entarteten Fall der Isotropiegruppe $\mathscr{K}_0 = \mathscr{K}(m, n)$, bei dem die Menge $\mathscr{K}^0$ der Rechtsvertreter nur aus dem Einheitselement besteht. Hier ergeben sich die induzierten Darstellungen durch die folgende Erweiterung der Darstellungen

$$\mathscr{U}(\Lambda_0) = \{U_K(\Lambda_0) = U_{\bar{U}_m}(\Lambda^m) \oplus U_{U_n}(\Lambda^n)\} \tag{8.5}$$

von $\mathscr{K}_0$ auf die Gruppe $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$:

$$U_{(X,K)}(\Lambda_0) \doteq U_K(\Lambda_0) \qquad \text{für alle } X \in \mathscr{X}(mn) . \tag{8.6}$$

Diese Darstellungsmatrizen wirken irreduzibel auf dem Darstellungsraum $\mathfrak{U}(\Lambda_0) = \mathfrak{U}(\Lambda^m) \oplus \mathfrak{U}(\Lambda^n)$.

8.3.

Im Fall der Isotropiegruppe (5.4) wird der induzierte Darstellungsraum von denjenigen auf $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ definierten Funktionen gebildet, deren Werte Vektoren im Darstellungsraum $\mathfrak{U}(\Lambda_J)$ sind und die den Bedingungen (3.9) genügen. Zerlegt man nun ein beliebiges $V \in \mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ gemäß $V = V_J K^J$ mit $V_J = (X, K_J)$, so folgt aus (3.9a):

$$|r, \Lambda_J\rangle\, V\rangle = U_{V_J}(r, \Lambda_J)|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle . \tag{8.7}$$

Hierin sind die über $\mathscr{K}^J$ definierten Vektorfelder[15] $|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle$ noch völlig beliebig. Ihre Komponenten, die wir auf Grund von (8.3) mit[15] $|\Lambda_J; A_N|K^J\rangle$

[15] Durch die doppelte Ket-Klammer wollen wir andeuten, daß $|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle$ sowohl ein Vektor in dem endlich-dimensionalen Darstellungsraum $\mathfrak{U}(\Lambda_J)$ ist, als auch ein Hilbertvektor des induzierten Darstellungsraumes von $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$. Dagegen ist $|\Lambda_J; A_N|K^J\rangle$ ein skalarwertiger Hilbertvektor.

bezeichnen, sind daher beliebige komplexwertige Funktionen auf $\mathscr{K}^J$. Als Komponenten des Tensorfeldes $|r, \Lambda_J\rangle\, V\rangle$ können wir dann die auf $\mathscr{K}^J$ noch beliebigen komplexwertigen Funktionen

$$|r, \Lambda_J; A_N|V\rangle \doteq U_{V_J}(r, \Lambda_J)|\Lambda_J; A_N|K^J\rangle \tag{8.8a}$$

wählen. Die zu ihnen konjugiert komplexen Funktionen definieren wir durch

$$\langle V|A_{N;J}\,\Lambda, r| \doteq \langle K^J|A_{N;J}\,\Lambda|U^\dagger_{V_J}(r, \Lambda_J)\,, \tag{8.8b}$$

wobei $\langle K^J|A_{N;J}\,\Lambda|$ die zu $|\Lambda_J; A_N|K^J\rangle$ konjugiert komplexe Funktion sei.

8.3.1. Wegen der in 6. konstruierten bijektiven Abbildung zwischen $\mathscr{K}^J$ und dem Raum $\mathfrak{K}^J$, auf dem wir das Koordinatensystem ϑ^J aus (7.7) eingeführt haben, können wir anstelle von $|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle$ auch die über $\mathscr{K}^J$ definierten Vektorfelder $|\Lambda_J\rangle\, \vartheta^J\rangle$ betrachten. Wegen (8.8) ist nun (3.9b) genau dann erfüllt, wenn für alle A_N mit dem Volumenelement $d\Omega^J$ aus (7.8) gilt:

$$\int_{\mathfrak{K}^J} \langle \vartheta^J|A_{N;J}\,\Lambda|\Lambda_J; A_N|\vartheta^J\rangle\, d\Omega^J < +\infty\,. \tag{8.9}$$

Diese Bedingung besagt, daß jede Komponente $|\Lambda_J; A_N|\vartheta^J\rangle$ des Tensorfeldes $|\Lambda_J\rangle\, \vartheta^J\rangle$ eine bezüglich $d\Omega^J$ quadratisch integrierbare Funktion sein muß. Daher wird der durch die Darstellung $\mathscr{U}(r, \Lambda_J)$ von $\mathscr{S}\mathscr{U}'_J(m, n)$ induzierte Darstellungsraum der Gruppe $\mathscr{S}\mathscr{U}'(m, n)$ genau von den Funktionen

$$|r, \Lambda_J\rangle\, V\rangle \doteq U_{V_J}(r, \Lambda_J)|\Lambda_J\rangle\, \vartheta^J\rangle \tag{8.10}$$

gebildet, bei denen $|\Lambda_J\rangle\, \vartheta^J\rangle$ ein im Sinne von (8.9) quadratisch integrierbares Vektorfeld über $\mathfrak{K}^J$ ist.

8.3.2. Da nach 6.1 auch zwischen $\mathscr{P}^J(r) = \{P^J(r)\}$ und $\mathscr{K}^J$ eine bijektive Abbildung besteht, können wir anstelle von $|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle$ auch das über $\mathscr{P}^J(r)$ definierte Vektorfeld $|\Lambda_J|P^J(r)\rangle$ betrachten. Nun ist $\delta(P - P^J(r))\, dP$ ein gegenüber $\mathscr{K}(m, n)$ invariantes Volumenelement[16] von $\mathscr{P}^J(r)$. Analog zu 8.3.1 ist daher (3.9b) genau dann erfüllt, wenn alle Komponenten von $|\Lambda_J|P^J(r)\rangle$ in folgendem Sinne quadratisch integrierbar sind:

$$\int_{\mathscr{P}(mn)} \langle P^J(r)|A_{N;J}\,\Lambda|\Lambda_J; A_N|P^J(r)\rangle\, \delta(P - P^J(r))\, dP < +\infty \tag{8.11}$$

Anstelle der Funktionen (8.10) können wir daher als Elemente des induzierten Darstellungsraumes auch die folgenden wählen:

$$|r, \Lambda_J\rangle\, V\rangle \doteq U_{V_J}(r, \Lambda_J)|\Lambda_J\rangle\, P^J(r)\rangle\,. \tag{8.12}$$

[16] In der Tat stimmt $\delta(P - P^J(r))\, dP$ bis auf einen positiven, gegenüber $\mathscr{K}(m, n)$ invarianten Proportionalitätsfaktor mit $d\Omega^J$ überein.

9. Die Basen der induzierten Darstellungsräume

Eine beliebige Komponente des Tensorfeldes $|\Lambda_J\rangle\,\vartheta^J\rangle$ wollen wir jetzt mit $|\vartheta^J\rangle$ abkürzen und in dem von diesen Funktionen gebildeten Hilbertraum eine Basis einführen.

9.1.

Dazu gehen wir davon aus, daß die $(N-1)$-dimensionalen Hyperkugelfunktionen[17]

$$|l^{N-1}\rangle \doteq e^{im\vartheta_0} \prod_{A=0}^{N-3} (\sin\vartheta_{A+1})^{l_{A+1}}\, C_{l_A - l_{A+1}}^{l_{A+1}+\frac{1}{2}(N-2-A)} (\cos\vartheta_{A+1}) \tag{9.1a}$$

im Hilbertraum der auf $\mathfrak{S}^{N-1}$ quadratisch integrierbaren Funktionen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden [49]. Dabei können die Komponenten von

$$l^{N-1} \doteq (l_0, l_1 \ldots l_{N-2})\,, \qquad |m| = l_{N-2} \tag{9.1b}$$

alle ganzen Zahlen annehmen, die mit den folgenden Bedingungen verträglich sind:

$$l_0 = 0, 1, 2, \ldots; \qquad l_0 \geqq l_1 \geqq \ldots \geqq l_{N-2} \geqq 0\,. \tag{9.1c}$$

9.2.

Ein vollständiges Orthogonalsystem im Hilbertraum der über $\tilde{\mathfrak{S}}^{N-1}$ quadratisch integrierbaren Funktionen wird von denjenigen der Funktionen (9.1) gebildet, die auf den antipodischen Punktepaaren (7.4) von $\mathfrak{S}^{N-1}$ identische Werte haben. Da sich die Gegenbauerschen Polynome vom Rang n bei der Subtitution $\vartheta \to \pi - \vartheta$ nur mit dem Faktor $(-1)^n$ multiplizieren, führt das auf die Bedingung

$$1 = e^{\pm im\pi} \prod_{A=0}^{N-3} (-1)^{l_A - l_{A+1}} = e^{\pm im\pi} (-1)^{l_0 - l_{N-2}}\,,$$

die genau dann erfüllt ist, wenn l_0 und l_{N-2} gerade Zahlen sind. Ein vollständiges Orthogonalsystem im Hilbertraum der über $\tilde{\mathfrak{S}}^{N-1}$ quadratisch integrierbaren Funktionen wird daher von denjenigen auf den Argumentebereich (7.5) eingeschränkten Funktionen (9.1) gebildet, für deren Indexsätze $\tilde{l}^{N-1}$ zusätzlich zu (9.1b, c) gilt:

$$\tilde{l}^{N-1} \doteq (2l_0, l_1, \ldots, l_{N-3}, 2l_{N-2})\,. \tag{9.2}$$

In Analogie zu (9.1a) bezeichnen wir diese Funktionen mit $|\tilde{l}^{N-1}\rangle$.

[17] Die hierbei auftretenden Gegenbauerschen Polynome sind mittels der Legendreschen bzw. Tschebyscheffschen Polynome wie folgt definiert:

$$C_n^{k+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) \doteq \frac{2^k k!}{(2k)!} \frac{d^k}{d(\cos\vartheta)^k} P_{n+k}(\cos\vartheta)$$

$$C_n^{k+1}(\cos\vartheta) \doteq \frac{1}{2^k k!(n+k+1)} \frac{d^{k+1}}{d(\cos\vartheta)^{k+1}} T_{n+k+1}(\cos\vartheta)\,.$$

9.3.

Der Hilbertraum der über $\mathfrak{K}^J$ quadratisch integrierbaren Funktionen $|\vartheta^J\rangle$ ist nun das Tensorprodukt der Hilberträume über den Faktorräumen von $\mathfrak{K}^J$. Eine Basis dieses Raumes ist daher

$$|l^J\rangle \doteq |l^{2(m-A_m)+1}\rangle \ldots |l^{2m-3}\rangle |\tilde{l}^{2(m-1}\rangle |l^{2(n-A_m+d)+1}\rangle \ldots |l^{2n-1}\rangle \,. \quad (9.3)$$

Dies ist zunächst nur für J_0 richtig. Da sich jedoch die Räume $\mathfrak{K}^{J_0}$ und $\mathfrak{K}^J$ für alle zulässigen e hinsichtlich des Volumenelements (7.8) nur um ein Gebiet vom Maße Null unterscheiden, gilt (9.3) auch für beliebige Indexsätze J.

Nach 8.3.1 ist nun jede Komponente $|\Lambda_J; A_N|\vartheta^J\rangle$ eine auf $\mathfrak{K}^J$ quadratisch integrierbare Funktion. Eine Basis im Raum der Vektorfelder $|\Lambda_J\rangle\, K^J\rangle$ ist daher durch die Vektoren

$$|\Lambda_J; A_N|l^J\rangle \quad (9.4\text{a})$$

gegeben, mit denen sich dann die Basisvektoren in dem von den Funktionen (8.10) gebildeten induzierten Darstellungsraum von $\mathcal{S}\mathcal{U}'(m, n)$ folgendermaßen schreiben lassen:

$$|r, \Lambda_J; A_N|l^J\rangle \doteq U_{V_J}(r, \Lambda_J)|\Lambda_J; A_N|l^J\rangle \,. \quad (9.4\text{b})$$

10. Zur Durchführbarkeit des GMH-Verfahrens

Wir wollen abschließend kurz untersuchen, inwieweit sich mittels des GHM-Verfahrens antihermitische Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(m, n)$ konstruieren lassen. Unter GHM-Verfahren [41, 42] wollen wir folgendes verstehen: Seien die Vektoren einer (bisher nicht benötigten) orthogonalen Basis von $\mathfrak{k}(m, n)$ aus (2.7) mit k_k bezeichnet und ferner die Basisvektoren des durch (2.8) definierten Vektorraumes $\mathcal{P}(m\, n)$ jetzt mit P'_p bzw. P_p, wenn sie als Elemente von $\mathfrak{su}'(m, n)$ bzw. $\mathfrak{su}(m, n)$ aufgefaßt werden sollen. Ausgehend von den Darstellern[18] der k_k und P'_p lassen sich dann nach dem GHM-Verfahren die Darsteller der P_p gemäß

$$P_p \doteq c \sum_k k_k [k_k, P'_p] \,, \qquad c \text{ reelle Zahl} \quad (10.1)$$

gewinnen, falls die folgende (notwendige und hinreichende) Bedingung

$$[P_p, P_q] - c^2 [[P_p, P_J(r)], [P_q, P_J(r)]] - c^2 \big[P_{[p}, [[P_{q]}, P_J(r)], P_J(r)]\big] \in \mathfrak{k}_J \quad (10.2)$$

für beliebige P_p und P_q aus (10.1) erfüllt ist. Dabei sind die $P_J(r)$ jetzt mittels der Basis P_p aufzuspannen. Ferner ist $\mathfrak{k}_J$ eine antihermitesche Darstellung der Lie-Algebra der Isotropiegruppe $\mathcal{K}_J$. Die Darsteller

[18] Wir bezeichnen hier die Elemente der Lie-Algebra und ihre Darsteller durch den gleichen Buchstaben.

(10.1) sind zwar nicht antihermitesch, jedoch wird durch

$$\frac{1}{2}(P_p - P_p^\dagger) = \frac{c}{2}\left[\sum_k k_k k_{k'}, P'_p\right] \tag{10.3}$$

zusammen mit den k_k eine antihermitesche Darstellung der Basis von $\mathfrak{su}(m, n)$ gegeben.

Es läßt sich nun zeigen [50], daß das GMH-Verfahren nur auf den Fall $m = n$ anwendbar ist, wobei sich obendrein nur für

$$J = (A_m = m, d = 0, e_1 = m), \qquad r > 0 \text{ beliebig} \tag{10.4a}$$

antihermitesche Darstellungen von $\mathfrak{su}(m, n)$ ergeben. Die Matrix (4.3a) hat demnach hier die folgende Gestalt:

$$p_J(r) = r E_m, \qquad r > 0 \text{ beliebig.} \tag{10.4b}$$

Die Konstante c aus (10.1) ist dann

$$c = \frac{1}{2r}. \tag{10.5}$$

Die Darstellung mit $r = 1$ findet sich bereits bei HERMANN [41].

Literatur

1. DOTHAN, J., M. GELL-MANN, and Y. NE'EMAN: Phys. Letters **17**, 148 (1965).
2. BARUT, A. O., and A. BÖHM: Phys. Rev. **139**, B 1107 (1965).
3. MUKUNDA, N., L. O'RAIFEARTAIGH, and E. C. G. SUDARSHAN: Phys. Rev. Letters **15**, 1041 (1965).
4. COOK, T., C. J. GOEBEL, and B. SAKITA: Phys. Rev. Letters **15**, 35 (1965).
5. GOEBEL, C. J.: Phys. Rev. Letters **16**, 1130 (1966).
6. SINGH, V.: Phys. Rev. **144**, 1275 (1966).
7. BÖHM, A.: Phys. Rev. **145**, 1212 (1966).
8. BOSE, S. K.: Phys. Rev. **145**, 1247 (1966).
9. SINGH, V., and B. M. UDGAONKAR: Phys. Rev. **149**, 1164 (1966).
10. FAIRLIE, D. B.: Phys. Rev. **155**, 1694 (1967).
11. MUKUNDA, N., E. C. G. SUDARSHAN, and A. BÖHM: Phys. Letters **24 B**, 301 (1967).
12. KURIYAN, J. G., and E. C. G. SUDARSHAN: Phys. Rev. **162**, 1650 (1967).
13. SUDARSHAN, E. C. G., N. MUKUNDA, and L. O'RAIFEARTAIGH: Phys. Letters **19**, 322 (1965).
14. MALKIN, I. A., and V. I. MANKO: JETP Letters **19**, 322 (1965).
15. BARCY, H.: Nuovo Cimento **41 A**, 222 (1966).
16. BUDINI, P.: Nuovo Cimento **41 A**, 399 (1966).
17. BÖHM, A.: Nuovo Cimento **43 A**, 665 (1966).
18. BUDINI, P.: Nuovo Cimento **44 A**, 363 (1966).
19. BANDER, M., and C. ITZYKSON: Rev. Mod. Phys. **38**, 330, 346 (1966).
20. MUSTO, R.: Phys. Rev. **148**, 1274 (1966).
21. PRATT, R. H., and T. F. JORDAN: Phys. Rev. **148**, 1276 (1966).
22. HAN, M. Y.: Nuovo Cimento **42**, 367 (1966).
23. GELFAND, I. M., and M. L. ZETLIN: Dokl. Akad. Nauk. SSSR **71**, 825, 1017 (1950).
24. MURAI, Y.: Progr. Theor. Phys. **9**, 147 (1953).
25. GRAJEW, M. I.: Dokl. Akad. Nauk. SSSR **98**, 517 (1954).

26. — Mosk. Math. Soc. Trudy **7**, 335 (1958).
27. ESTEVE, A., and P. G. SONA: Nuovo Cimento **32**, 473 (1964).
28. GELFAND, I. M., and M. I. GRAJEW: Izv. Akad. Nauk. SSSR **29**, 1329 (1965).
29. SALAM, A., and J. STRATHDEE: Phys. Rev. **148**, 1352 (1966).
30. KIHLBERG, A., V. F. MÜLLER, and F. HALBWACHS: Commun. Math. Phys. **3**, 194 (1966).
31. RĄCZKA, R., and J. FISCHER: Commun. Math. Phys. **3**, 233 (1966).
32. FISCHER, J., and R. RĄCZKA: Commun. Math. Phys. **4**, 8 (1967).
33. ANDERSON, R. L., J. FISCHER, and R. RĄCZKA: Proc. Roy. Soc. **302**, 491, 501 (1967).
34. CAO CHI: Acta Phys. Polon. **33**, 3 (1967).
35. COLEMAN, S.: In: Symmetry principles and fundamental particles. San Francisco: W. H. Freeman and Comp. 1967.
36. NE'EMAN, Y.: Commun. Math. Phys. **3**, 181 (1966).
37. MACKEY, G. W.: Am. J. Math. **73**, 576 (1951).
38. — Ann. Math. **55**, 101 (1952).
39. — Ann. Math. **58**, 193 (1953).
40. — Bull. Am. Math. Soc. **69**, 628 (1963).
41. HERMANN, R.: Commun. Math. Phys. **2**, 155 (1966).
42. — Commun. Math. Phys. **2**, 251 (1966).
43. HELGASON, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York: Academic Press 1962.
44. RIESZ, F., u. B. NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
45. JACOBSON, N.: Lie algebras. New York: Interscience Publ. 1962.
46. BOERNER, H.: Representations of groups. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1963.
47. STEENROD, N.: Topology of fibre bundles. Princeton: Princeton University Press 1951.
48. HERMANN, R.: Lie groups for physicists. New York: W. A. Benjamin Inc. 1966.
49. ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, and TRICOMI: Higher transcendental functions, Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1953.
50. GRALEWSKI, U.: Die induzierten Darstellungen der kontrahierten pseudounitären Gruppen $\mathcal{SU}'(m, n)$. Freiburg/Br.: Dissertation 1967 (unveröffentlicht).

Prof. K. WESTPFAHL
Dr. U. GRALEWSKI
Institut f. theoret. Physik der Universität
7800 Freiburg i. Brsg.
Hermann-Herder-Str. 3