

Einsteinsche Gravitations-Vakuumpfelder, die eine expandierende, drehungs- und scherungsfreie Bewegung von Probeteilchen zulassen

HENNING MÜLLER ZUM HAGEN

Hamburg

Eingegangen am 1. Juli 1966

Abstract. The empty space field equations in Einstein's Theory of Gravitation are solved to determine all spaces admitting a timelike congruence without shear and rotation. The solutions belong to the class of degenerate static fields and their non-static extensions.

Einleitung

Es wird in dieser Arbeit untersucht, in welchen Vakuumpfeldern sich eine Wolke von Probeteilchen¹ expandierend ($\vartheta \neq 0$), rotationsfrei ($\Omega_{\mu\nu} = 0$) und scherungsfrei ($\Sigma_{\mu\nu} = 0$) bewegen kann, wie diese Bewegung erfolgt und inwieweit sie schon durch das Vorgeben von Anfangsbedingungen festgelegt ist. Es werden die gesuchten Vakuummetriken explizit angegeben, wie auch die dazu gehörigen Bewegungen (mit $\vartheta \neq 0$, $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\Sigma_{\mu\nu} = 0$).

Die hier vorgelegten Resultate vervollständigen die Untersuchungen der drehungs- und scherungsfreien Probekörperbewegungen in EINSTEINS Gravitations-Vakuumpfeldern. Die bisherige Untersuchung des *Falles* $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ ergab folgende Resultate:

I. Bewegt sich eine Wolke von Probeteilchen expansionsfrei und nichtisometrisch (Bezeichnung siehe [10]) in einem Vakuumpfeld ($R_{\mu\nu} = 0$), so ist dieses vom Petrov-Typ *D* (J. EHLERS und M. TRÜMPER 1960, siehe [4], [5]).

II. a) Unabhängig von möglichen Feldgleichungen sind die Felder immer vom Petrov-Typ *I* oder *D* (M. TRÜMPER [6], 1965).

b) Für $\vartheta \neq 0$ sind die Vakuumpfelder ($R_{\mu\nu} = 0$) vom Petrov-Typ *D* (siehe [4], [6]).

¹ Von den Probeteilchen wird hier, wie üblich, vorausgesetzt, daß sie sich infolge nichtgravischer Wechselwirkung auf nichtgeodätischen Weltlinien bewegen können und daß ihre gravitationsfelderzeugende Wirkung vernachlässigbar klein ist gegenüber dem als gegeben betrachteten Gravitations-Vakuumpfeld. Das gleiche soll natürlich auch für die gravitationsfelderzeugende Wirkung des Energie-Impulstensors der nichtgravischen Kräfte gelten.

III. 1965 geben F. B. ESTABROOK u. H. D. WAHLQUIST [1] alle Felder aus I.) explizit an. Es sind die ausgearteten statischen Vakuumfelder class B (zur Bezeichnung siehe [7]).

IV. In dieser Arbeit werden alle Felder aus II. b) explizit angegeben. Es sind die ausgearteten statischen Vakuumfelder class A und class C (zur Bezeichnung siehe [7]) und deren Erweiterung².

Bei Welten mit inkohärenter Materie ($R_{\mu\nu} \neq 0$) ergibt sich für den Fall $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ ein Friedmann-Lemaitre-Kosmos (siehe [8]). Das gilt auch für Feldgleichungen mit kosmologischem Glied. Die Scherung $\Sigma_{\mu\nu}$ und Rotation $\Omega_{\mu\nu}$ sind bezüglich der Kongruenz zu definieren, die durch die Weltlinien der Materieteilchen gebildet wird.

Sachverhalte, die den hier u. a. behandelten ähneln, sind bereits für starre ($\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $\vartheta = 0$) rotierende ($\Omega_{\mu\nu} \neq 0$) Bewegungen von Teilchenwolken³ untersucht worden: Für solche Bewegungen gilt nach einer in [1] angegebenen Erweiterung des Herglotz-Noether-Theorems in Räumen mit konstanter Krümmung — d. h. also auch in Minkowskiräumen—:

1. Die Bewegung verläuft nur isometrisch.
2. Die Rotation $\Omega_{\mu\nu}$ erfolgt konstant⁴.

In Einsteinräumen ($R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}$) — dazu gehören alle Räume mit $R_{\mu\nu} = 0$ — gilt für starre rotierende Bewegungen, daß aus 2. die Aussage 1. folgt.

Die Weltlinien einer Wolke von Probeteilchen bilden eine zeitartige Kongruenz mit dem Tangenten-Einheits-Vektor ${}_0\lambda_\nu$ (${}_0\lambda_\nu {}_0\lambda^\nu \equiv -1$). Die Voraussetzung

$$\Omega_{\mu\nu} = 0, \quad \Sigma_{\mu\nu} = 0, \quad \vartheta \neq 0 \quad (1)$$

bedeutet, daß ein Beobachter, der sich mit einem Probeteilchen mitbewegt, in seinem Ruhraum⁵ folgendes feststellt: Die infinitesimal benachbarten Teilchen bewegen sich nur isotrop von ihm weg (bzw. auf ihn zu), d. h. die Richtungen vom Beobachter zu seinen Nachbarteilchen bleiben konstant bezüglich eines Dreibeins, welches längs der Weltlinie des Beobachters fermi-verschoben ist. Ob das Dreibein im Ruhraum eines Beobachters fermi-verschoben ist, läßt sich nach SYNGE [2] durch Lichtsignale feststellen. Würde man auch noch $\vartheta = 0$ voraussetzen, so müßten zusätzlich die räumlichen Abstände vom Beobachter zum infinitesimal benachbarten Teilchen konstant sein; man hätte dann den Fall einer starren (also $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $\vartheta = 0$) und drehungsfreien ($\Omega_{\mu\nu} = 0$) Bewegung einer Probeteilchenwolke.

² Siehe Satz 3.1 in dieser Arbeit.

³ Für Vakuumfelder sollen die Teilchen natürlich Probeteilchen sein. — Für Räume mit Materie sollen die Teilchen die Materieelemente sein.

⁴ Das heißt die Fermiableitung von $\Omega_{\mu\nu}$ ist Null.

⁵ Das ist der raumartige dreidimensionale Vektorraum senkrecht zu ${}_0\lambda^\nu$.

Im ersten Kapitel wird man durch eine kurze zusammenfassende Darstellung in den Dyadenformalismus eingeführt, der sich beim Rechnen mit zeitartigen Kongruenzen gut bewährt hat. Das zweite Kapitel behandelt das eigentliche Problem, die Konstruktion der Vakuumfelder, die eine zeitartige Kongruenz (mit dem Tangentenvektorfeld ${}_0\lambda^\nu$) mit $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $\vartheta \neq 0$ zulassen. Zunächst zeichnet man im Raum senkrecht zu ${}_0\lambda^\nu$ ein Dreibein ${}_a\lambda^\nu$ ($a = 1, 2, 3$) invariant aus. Bei der Ermittlung der algebraischen Eigenschaften von ${}_a\lambda^\nu$ stellt man erneut fest, daß die Metrik vom Petrov-Typ D ist⁶. Nachdem man die kovarianten „Raum-Ableitungen“ von ${}_a\lambda^\nu$ berechnet hat, kann man mit Hilfe von ${}_a\lambda^\nu$ und ${}_0\lambda^\nu$ einen hyperflächennormalen Killingvektor ξ^ν konstruieren. Die gesuchten Felder gehören also zu den in [7] explizit angegebenen ausgearteten statischen Vakuummetriken, wenn ξ^ν zeitartig ist. Auf den Fall, daß ξ^ν raumartig ist, wird in Kapitel 3 das Ergebnis von Kapitel 2 analog erweitert. Außerdem wird in Kapitel 3 der Tangentenvektor ${}_0\lambda^\nu$ explizit angegeben. Bis zum Ende des Kapitels 3 ist gezeigt worden:

Die gesuchten Metriken gehören den Klassen A und C (zur Bezeichnung siehe [7]) der entarteten statischen Vakuumfelder (und deren nicht-statischer Fortsetzung) an.

Im Kapitel 4 wird bewiesen, daß *alle* Metriken dieser Klassen A und C zu den gesuchten Metriken gehören. Außerdem wird gezeigt, daß die ausgezeichnete Kongruenz ${}_0\lambda^\nu$ tatsächlich die in den Formeln von Kapitel 3 ausgedrückte Unbestimmtheit besitzt.

Bezeichnung (wie in [9], [14])

Griechische Indices: $\nu, \mu, \kappa \dots$ durchlaufen die Werte: 0, 1, 2, 3.

Lateinische Indices: $r, s, t \dots$ durchlaufen die Werte: 0, 1, 2, 3. Sie bezeichnen die nichtholonomen Komponenten T_{rs} eines Tensors $T_{\mu\nu}$ bezüglich eines ortho-normalen Vierbeins ${}_a\lambda^\nu$.

Lateinische Indices: $a, b, c \dots$ durchlaufen die Werte: 1, 2, 3. Sie bezeichnen die raumartigen Komponenten vom obigen T_{rs} .

\equiv bedeutet Gleichheit durch Definition.

\sim bedeutet Proportionalität, z. B. bedeutet $T_{\mu\nu} \sim S_{\mu\nu}$:

Es existiert ein $\varphi \neq 0$ mit $T_{\mu\nu} = \varphi S_{\mu\nu}$.

Signatur der Metrik: $- + + +$

$g_{\mu\nu}$ die Metrik

g deren Determinante

() bedeutet Symmetrisierung, z. B. $T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$

[] bedeutet Antisymmetrisierung, z. B. $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$

$\varepsilon^{rstu} \equiv \varepsilon^{[rstu]}$ und $\varepsilon^{0123} \equiv 1$

$\varepsilon^{abcd} \equiv \varepsilon^{[abcd]}$ und $\varepsilon^{123} \equiv 1$

⁶ Dies wurde ja schon in [6] bewiesen.

$R_{\mu\nu\kappa\tau}$ Krümmungstensor (Riemann-Tensor)

$C_{\mu\nu\kappa\tau}$ Konformtensor (Weyl-Tensor)

$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\kappa}^{\kappa}$ Ricci-Tensor

$R \equiv R_{\nu}^{\nu}$ Krümmungsskalar

$T_{\mu\nu;\kappa}$ kovariante Ableitung von $T_{\mu\nu}$ nach x^{κ}

$T_{\mu\nu,\kappa}$ partielle Ableitung von $T_{\mu\nu}$ nach x^{κ}

${}_0\lambda^{\nu}$ mit ${}_0\lambda^{\nu}{}_0\lambda^{\nu} \equiv -1$ sei die Tangente an eine zeitartige Kongruenz.

${}_a\lambda^{\nu}$ ($a = 1, 2, 3$) ergänze ${}_0\lambda^{\nu}$ zu einem orthonormierten Vierbein.

V^3 der Vektorraum senkrecht zu ${}_0\lambda^{\nu}$. V^3 ist der „Ruhraum“.

$V^3 \otimes V^3$ der Tensorraum der 2stufigen Tensoren bezüglich V^3 . Zu $V^3 \otimes V^3$ gehört z. B. $\Omega_{\mu\nu}$ (siehe unten).

$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + {}_0\lambda_{\mu}{}_0\lambda_{\nu}$ ist die Metrik von V^3 , d. h. h_{μ}^{ν} projiziert in den V^3 hinein.

$\dot{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu;\kappa}{}_0\lambda^{\kappa}$ bedeutet die kovariante Eigenzeit-Ableitung.

$\dot{K}_{ab} \equiv (K_{ab})' = (K_{ab})_{;\nu}{}_0\lambda^{\nu}$ wird die „Punktableitung“ von K_{ab} genannt. Dabei sei K_{ab} ein Skalar bezüglich Koordinatentransformationen, z. B. $K_{ab} = {}_a\lambda^{\nu}{}_b\lambda^{\mu}T_{\nu\mu}$.

Die kinematischen Größen (über deren Bedeutung: siehe [10] und [9]) von ${}_0\lambda^{\nu}$ sind:

$a_{\nu} \equiv {}_0\dot{\lambda}_{\nu}$ die Absolutbeschleunigung,

$\Omega_{\mu\nu} \equiv {}_0\lambda_{[\mu};{}_{\nu]} + {}_0\lambda_{[\nu}a_{\mu]}$ der Wirbeltensor (bei SYNGE [2] local angular velocity of the medium),

$\Omega^{\mu} \equiv \frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\tau}\Omega_{\nu\kappa}{}_0\lambda_{\tau}$ der Wirbelvektor,

$3\vartheta \equiv {}_0\lambda^{\nu}_{;\nu}$ der Expansionsskalar,

$\Sigma_{\mu\nu} \equiv {}_0\lambda_{(\mu};{}_{\nu)} + {}_0\lambda_{(\nu}a_{\mu)} - \vartheta h_{\mu\nu}$ der Scherungstensor,

$S_{\mu\nu} \equiv \Sigma_{\mu\nu} + \vartheta h_{\mu\nu}$.

Kapitel 1

Dieses Kapitel gibt in einer kurzen (und ausreichenden) zusammenfassenden Darstellung eine Einführung in den von ESTABROOK u. WAHLQUIST [9] angegebenen Dyadenformalismus, der in den nächsten Kapiteln verwendet wird. Beim Rechnen mit zeitartigen Kongruenzen empfiehlt sich die Anwendung des Dyadenformalismus aus folgenden Gründen:

Es sei eine Schar von zeitartigen Weltlinien mit dem Tangentenvektor ${}_0\lambda^{\nu}$ (${}_0\lambda^{\nu}{}_0\lambda_{\nu} \equiv -1$) und den kinematischen Größen⁸ K in einem Riemannschen Raum gegeben, dessen metrische Koeffizienten den Feldgleichungen genügen. Dann genügen die K gewissen Differentialgleichungen. G seien die Gleichungen, aus denen alle Gleichungen folgen, denen die K genügen. Diese G ⁹ (siehe (1.13 bis 27)) kann man auf folgenden Wegen erhalten:

⁷ Siehe Hilfssatz 1.3.

⁸ Das sind a_{ν} , $\Omega_{\nu\mu}$, $S_{\nu\mu}$, ϑ , $\Omega_{\nu\mu}$, $\Sigma_{\nu\mu}$.

⁹ Bei J. EHLERS [10] sind einige davon angegeben.

1. Man drückt die kinematischen Größen K (in einem Koordinatensystem ${}_0\lambda^\nu \sim \delta^\nu_\mu$) durch die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ und deren erste Ableitungen aus und schreibt für die $g_{\mu\nu}$ die Feldgleichungen und Bianchi-Identitäten auf. Dann treten in G *Ableitungen der Ordnung 1 bis 3 auf*.

2. Bezüglich eines Vierbeines, dessen zeitartiger Vektor der Tangentenvektor ${}_0\lambda^\nu$ ist, seien T_{rs}, R_{rstu} die anholonomen Koeffizienten vom Energieimpuls- bzw. Riemann-Tensor und Γ_{rst} RICCI's Rotations-Koeffizienten. Die Feldgleichungen und Bianchi-Identitäten lassen sich so schreiben, daß nur Γ_{rst}, R_{rstu} , deren erste Ableitungen und T_{rs} auftreten. Von den Γ_{rst} lassen sich $\Gamma_{00b}, \Gamma_{0ab}, \Gamma_{ab0}$ durch die kinematischen Größen K ausdrücken, so daß schließlich in den Gleichungen G nur die restlichen $\Gamma_{abc}, K, R_{rstu}$ und deren *erste Ableitungen* und T_{rs} auftreten.

Dieser Weg 2., um zu den Gleichungen G zu gelangen, wird im Dyadenformalismus benutzt. Das hat folgende *Vorteile*:

A. In den Gleichungen G treten nur *erste Ableitungen* (der $\Gamma_{abc}, K, R_{rstu}$) auf im Gegensatz zu 1. .

B. Die Beziehung zwischen den kinematischen Größen K und RICCI's *Rotations-Koeffizienten* Γ_{rst} ist wesentlich einfacher als bei Verwendung der Christoffelsymbole $\Gamma^\nu_{\mu\kappa}$ oder $g_{\nu\mu}$, da bei dem zugrunde gelegten *Vierbein* der zeitartige Vektor der Tangentenvektor ${}_0\lambda^\nu$ ist.

C. Durch die *im Dyadenformalismus verwendeten Größen und Operationen* lassen sich die Gleichungen G einfacher formulieren. Das gilt ganz besonders für die *nichtkovarianten Gleichungen unter den G*; weil man im Dyadenformalismus alle kovarianten Tensor-Operationen auch auf nichtkovariante Größen anwendet. Die Zweckmäßigkeit der Operationen und Größen des Dyadenformalismus liegt hauptsächlich an folgendem:

a) Die in 2. erwähnten Γ_{abc} beschreiben die „räumliche kovariante Differentiation des Ruhraumes V^3 “. Die restlichen $\Gamma_{00b}, \Gamma_{0ab}, \Gamma_{ab0}$ von den Γ_{rst} hängen umkehrbar eindeutig von den kinematischen Größen K ab.

b) *Da die kinematischen Größen K definitionsgemäß im Ruhraum V^3 liegen, rechnet man im Dyadenformalismus zweckmäßigerweise nur mit Größen und Operationen, die bezüglich V^3 definiert sind.* Dabei werden Größen, wie der Energieimpuls- und Riemann-Tensor durch h^ν_μ in den Ruhraum V^3 *projiziert*.

c) Durch den im Dyadenformalismus verwendeten Beinformalismus läßt sich das Dreibein in V^3 — der vierte Beinvektor ist ja der Tangentenvektor ${}_0\lambda^\nu$ — an invariante Gegebenheiten (*Eigenbein!*) anpassen.

Eine Kongruenz von zeitartigen Linien sei durch ihr *Tangentenvektorfeld* ${}_0\lambda^\nu$ mit

$${}_0\lambda^\nu {}_0\lambda_\nu \equiv -1 \quad (1.1)$$

gegeben. ${}_a\lambda^\nu$ ergänze ${}_0\lambda^\nu$ zu einem orthonormierten Vierbein, so daß also gilt

$$\eta_{rs} = {}_r\lambda^\nu {}_s\lambda^\mu g_{\nu\mu} \quad (1.2)$$

mit $\eta^{rs} \equiv \eta_{rs} \equiv$ Diagonalmatrix $(-1, 1, 1, 1)$.

Hilfssatz 1.1. Aus den anholonomen Koeffizienten $T_r^s \equiv {}_r\lambda^\nu {}_s\lambda^\mu T_{\nu\mu}^r$ eines Tensors $T_{\nu\mu}^r$ läßt sich wiederum $T_{\nu\mu}^r$ berechnen und umgekehrt. Und zwar ist $T_{\nu\mu}^r = {}_r\lambda^\nu {}_s\lambda^\mu T_{rs}^s$. Dabei ist ${}^r\lambda^\nu \equiv \eta^{rs} {}_s\lambda^\nu$. Außerdem sind $T^{rs} = \eta^{rt} T_t^s$ die anholonomen Koeffizienten von $T^{\nu\mu}$. Wie man sieht, kann man mit η^{rs} , bzw. η_{rs} die anholonomen Koeffizienten herauf- bzw. herunterziehen. Außerdem gilt $T_{rs} S^{rs} = T_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$.

Die ${}_a\lambda^\nu$ bilden in V^3 ein orthonormiertes Dreibein. Daher gilt der folgende

Hilfssatz 1.2. Projiziert man einen Tensor $T_{\mu\nu}$ in den V^3 , also $(\perp T)_{\nu\mu} \equiv h_\nu^\alpha h_\mu^\beta T_{\alpha\beta}$, so erhält man für die anholonomen Koeffizienten (bezüglich ${}_r\lambda^\nu$) $(\perp T)_{rs}$

$$(\perp T)_{r0} = (\perp T)_{0s} = 0, \quad (\perp T)_{ab} = T_{ab}. \quad (1.3)$$

Es ist also

$$\Sigma_{r0} = \Sigma_{0s} = S_{r0} = S_{0s} = \Omega_{0r} = \Omega_{0s} = \Omega_0 = a_0 = 0. \quad (1.4)$$

Daher werden im folgenden von den anholonomen Koeffizienten der projizierten Tensoren — im Dyadenformalismus kommen nur solche vor — nur die angegeben, die ungleich Null sind, d. h. deren Indices¹⁰ von 1 bis 3 (a, b, c, \dots) laufen.

Hilfssatz 1.3. a) Für die Fermi-Ableitung $(\perp \dot{T})_{\mu\nu} \equiv h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dot{T}_{\alpha\beta}$ eines Tensors $T_{\mu\nu}$ gilt

$$(\perp \dot{T})_{ab} = \dot{T}_{ab} + \varepsilon_a^{cd} \omega_c T_{ab} - T_{ac} \omega_d \varepsilon_b^{cd} \quad (1.5a)$$

mit $\omega_a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_a^{bc} {}_b\lambda_\nu {}_c\lambda_\mu {}_0\lambda^\nu {}_0\lambda^\mu$.

b) Für ein längs der Kongruenz ${}_0\lambda^\nu$ fermi-verschobenes Dreibein ${}_a\lambda^\nu$ — ein solches existiert immer — gilt $\omega_a = 0$. Dafür ist

$$(\perp \dot{T})_{ab} = \dot{T}_{ab}, \quad \omega_a = 0. \quad (1.5b)$$

Aus den zu Anfang dieses Kapitels erwähnten Gründen definiert man:

$$\Gamma_{rst} \equiv {}_r\lambda^\nu {}_s\lambda^\mu {}_t\lambda^\nu \text{ (RICCI'S Rotations-Koeffizienten)}, \quad (1.6)$$

$$M_{ab} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_b^{cd} \Gamma_{adc}, \quad (1.7)$$

$$\omega_a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_a^{bc} \Gamma_{0bc}, \quad (1.8)$$

$$T_{rs;t} \equiv T_{\mu\nu;\tau} {}_r\lambda^\mu {}_s\lambda^\nu {}_t\lambda^\tau = T_{rs,t} - \Gamma_{tru} T_s^u - \Gamma_{tsu} T_r^u, \quad (1.9)$$

$$K_{rs,t} \equiv (K_{rs})_{,t} \lambda^\nu. \quad (1.10)$$

¹⁰ Diese Indices werden in [9] ganz fortgelassen. Die indexfreien Größen werden dort „Dyaden“ genannt.

Außerdem führt man die folgenden *symmetrischen* Größen ein:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_{ab} &\equiv -\frac{1}{4} \varepsilon_{acd} \varepsilon_{bfg} R^{cdfg}, & \text{b) } Q_{cb} &\equiv R_{0c0b}, \\ \text{c) } B_{ab} &\equiv \frac{1}{2} \varepsilon_b{}^{cd} C_{0acd} (B_a^a = 0), & \text{d) } t_b &\equiv \frac{1}{2} R_{0b}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Aus den Bemerkungen in [9] erhält man die aus den obigen Definitionen folgenden vier Hilfssätze:

Hilfssatz 1.4. *Das obige Vierbein ${}_{\tau}\lambda^{\nu}$ ($\eta_{rs} = {}_{\tau}\lambda^{\nu} {}_s\lambda^{\mu} g_{\nu\mu}$) sei vorgegeben, dann läßt sich*

- a) $P_{ab}, Q_{ab}, B_{ab}, t_a$ aus $R_{\mu\nu\tau\kappa}$,
- b) Γ_{rst} aus $\Gamma_{\nu\tau}^{\mu}$ (der affine Zusammenhang bezüglich $g_{\mu\nu}$),
- c) Γ_{rst} aus $M_{ab}, S_{ab}, \Omega_a, a_a, \omega_a$,
- d) Γ_{abc} aus M_{ab} (siehe (1.7)),
- e) $\Gamma_{0rs}, \Gamma_{00s}, \Gamma_{r0s}$ aus $S_{ab}, \Omega_a, a_a, \omega_a$ (z. B. ist $a_a = \Gamma_{00a}$)

leicht berechnen¹¹ und umgekehrt.

Γ_{abc} bzw. M_{ab} bezeichnet den räumlichen affinen Zusammenhang; denn es gilt für die anholonomen Koeffizienten (siehe Hilfssatz 1.2) von $T_{\mu\nu; \alpha} h_{\tau}^{\mu} h_{\sigma}^{\nu} h_{\rho}^{\alpha}$

$$T_{ab;c} = T_{ab,c} - \Gamma_{cae} T_{\cdot b}^e - \Gamma_{cbe} T_{a \cdot}^e, \tag{1.12}$$

wo $T_{\mu\nu}$ Tensor bezüglich V^3 ist.

Hilfssatz 1.5. *Das obige ${}_{\tau}\lambda^{\nu}$ sei vorgegeben. Dann ist*

$$R^{\mu}{}_{\nu\tau\kappa} = -2(\Gamma_{\nu[\tau, \kappa]}^{\mu} + \Gamma_{\nu[\tau}^{\mu} \Gamma_{\kappa]}^{\mu})$$

mit

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} \equiv g^{\mu\rho} \left(g_{\rho(\nu, \kappa)} - \frac{1}{2} g_{\nu\kappa, \rho} \right)$$

äquivalent zu den unten angegebenen Differentialidentitäten (1.13 bis 16). Die dort auftretenden Größen sind in (1.6 bis 11) und (1.17, 18, 19) definiert. Aus den Identitäten (1.13 bis 16) lassen sich alle Gleichungen ableiten, die in einem Riemannschen Raum zwischen den kinematischen Größen, deren Ableitungen und den $R_{\mu\nu\tau\kappa}$ bestehen.

Den Hilfssatz 1.5 erhält man, wenn man Hilfssatz 1.4 und die Definitionen für die in (1.13 bis 1.16) auftretenden Größen berücksichtigt. Aus einer dieser Definitionsgleichungen, nämlich (1.6), folgt die Integrationsbedingung¹² (siehe [9])

$$[{}_{\nu}\lambda^{\nu} \Gamma_{[ts]}]_{r, \nu} = \frac{1}{3} \Gamma_{[\bar{s}\bar{p}]}^q \Gamma_{[\bar{q}t]r} e^{\bar{s}\bar{p}\bar{t}} \bar{t}^{13},$$

welche in etwas abgewandelter¹⁴ Form mit in den Differentialidentitäten (1.13 bis 16) enthalten sind (siehe z. B. (1.15)).

¹¹ Die in dieser Arbeit fehlenden Formeln sind in [9] angegeben.

¹² Integrationsbedingung von ${}_{\tau}\lambda_{(\mu, \nu)} \lambda^{\mu} \lambda^{\nu} = \Gamma_{[ts]r}$ (siehe [9] und (1.6)).

¹³ $\varepsilon^{\bar{s}\bar{p}\bar{q}}$ = Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} \bar{s} & \bar{p} & \bar{q} \\ s & p & q \end{pmatrix}$.

¹⁴ Es sind nur die Γ_{rst} nach Hilfssatz 1.4.c ersetzt worden.

Die in Hilfssatz 1.5 (oben) erwähnten Differentialidentitäten sind:

$$\begin{aligned} a_{b;a} - [\dot{S}_{ab} + 2\varepsilon_{(a}{}^{cd} \cdot S_{b)d} \omega_c] - \varepsilon_{ab}{}^c [\dot{\Omega}_c + \varepsilon_c{}^{eg} \omega_e \Omega_g] \\ = S_{ac} S_b^c - 2\varepsilon_{(a}{}^{cd} S_{b)d} \Omega_c + \Omega_a \Omega_b - \delta_{ab} (\Omega_c \Omega^c) - a_a a_b + Q_{ab}, \end{aligned} \quad (1.13)^{15}$$

$$\Omega_{b;a} + S_{ac};_d \varepsilon_b{}^{cd} = -2a_a \Omega_b + a_c \Omega^c \delta_{ab} + B_{ab} - \varepsilon_{ab}{}^c t_c, \quad (1.14)^{15}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{ab} + S_{ac}^* M_b^c = (S_{ca};_d + S_{ca}^* a_d) \varepsilon_b{}^{cd} + \\ + ((\Omega^c - \omega^c);_c + (\Omega^c - \omega^c) a_c) \delta_{ab}, \end{aligned} \quad (1.15)^{15}$$

$$\varepsilon_a{}^{cd} M_{ab;c} = -\frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{cd} \varepsilon_b{}^{eg} M_{ce} M_{dg} + E_{ab} - \Omega^c S_{ca}^* \varepsilon_{ab}{}^d. \quad (1.16)^{15}$$

Dabei ist

$$S_{ab}^* \equiv S_{ab} + (\Omega_c - \omega_c) \varepsilon_{ab}{}^c, \quad (1.17)$$

$$E_{ab} \equiv -P_{ab} - \frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{cd} \varepsilon_b{}^{eg} S_{ec} S_{dg} - \Omega_a \Omega_b - 2\omega_{(a} \Omega_{b)}, \quad (1.18)$$

$$M_{ab;c} \equiv M_{ab,c} - \Gamma_{cae} M_b^e - \Gamma_{cbe} M_a^e \quad (\text{siehe (1.12,9)}). \quad (1.19)$$

M_{ab} , $M_{ab;c}$ sind nicht die anholonomen Koeffizienten eines Tensors.

Hilfsatz 1.6. *Das obige Vierbein $\gamma^\lambda{}^\nu$ sei vorgegeben. Dann lassen sich die Feldgleichungen $-T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ umschreiben in die folgenden Gleichungen:*

$$\hat{T}_{ab} = \frac{1}{2} (-P_{ab} + Q_{ab} - Q_c^c \delta_{ab}), \quad (1.20)$$

$$\hat{T}_{0a} = t_a, \quad (1.21)$$

$$\hat{T}_{00} = \frac{1}{2} P_c^c, \quad (1.22)$$

mit

$$\hat{T}_{rs} \equiv -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \gamma_r{}^\mu \gamma_s{}^\nu. \quad (1.23)$$

Hilfsatz 1.7. *Das obige Vierbein $\gamma^\lambda{}^\nu$ sei vorgegeben. Dann sind die Bianchi-Identitäten gleichwertig mit den Gleichungen (1.24) bis (1.27):*

$$\begin{aligned} \varepsilon_a{}^{cd} Q_{ab;c} - [\dot{B}_{ab}^* + \varepsilon_a{}^{cd} \omega_c B_{db}^* - B_{ac}^* \omega_a \varepsilon_b{}^{cd}] = -\varepsilon_a{}^{cd} a_c Q_{ab} + \\ + P_{ac} a_d \varepsilon_b{}^{cd} - (S_a^d - S_c^c \delta_a^d - \varepsilon_a{}^{dc} \Omega_c) B_{db}^* - \\ - \varepsilon_a{}^{cd} \varepsilon_b{}^{eg} S_{ec} B_{gd}^* - \varepsilon_{ab}{}^c B_{cg}^* \Omega^g + 2\Omega_a t_b, \end{aligned} \quad (1.24)^{16}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a{}^{cd} B_{b;d;c} + [\dot{P}_{ab} + 2\varepsilon_{(a}{}^{cd} P_{b)d} \omega_c] = -\varepsilon_a{}^{cd} a_c B_{bd}^* + B_{ac}^* a_a \varepsilon_b{}^{cd} + \\ + (S_{ac} - S_g^g \delta_{ac} - \Omega_g \varepsilon_a{}^g) P_b^c + \varepsilon_a{}^{cd} \varepsilon_b{}^{eg} S_{ec} Q_{dg} + \varepsilon_{ab}{}^c Q_c^g \Omega_g, \end{aligned} \quad (1.25)^{16}$$

$$P_{a;c}^c = -(S_c^d - 3\Omega_g \varepsilon_c{}^d g) B_{de}^* \varepsilon_a{}^{ce}. \quad (1.26)^{16}$$

Dabei ist

$$B_{ab}^* \equiv B_{ab} + t_c \varepsilon_{ab}{}^c. \quad (1.27)^{16}$$

¹⁵ Die Gleichungen (1.13) bis (1.16) sind mit den Gleichungen D.22 bis D.31 auf Seite 1641 in [9] gleichwertig. Aus D.23 und D.31 erhält man z. B. (1.13) (siehe D.37). Das dort auftretende N_{ab} und L_a ist durch $N_{ab} - \frac{1}{2} N_c^c \delta_{ab} + \varepsilon_{ab}{}^c L_c = M_{ab}$ und $N_{[ab]} = 0$ definiert. Außerdem siehe Fußnote 10.

¹⁶ Wie in Fußnote 15 läßt sich zeigen, daß die Gleichungen (1.24 bis 1.27) mit den Bianchi-Identitäten auf S. 1642 in [9] gleichwertig sind.

Außer den Gleichungen (1.15, 16) — auf diese kann man aber nicht verzichten — lassen sich die Differentialidentitäten aus den Hilfs-sätzen 1.5 und 1.7 durch Multiplikation mit ${}^a\lambda_\nu = {}_a\lambda_\nu$ in gewöhnliche Tensorgleichungen (mit den Koordinatenindices $\nu, \mu, \kappa \dots$) umschreiben. Die bei den Identitäten (1.13, 24, 25) auftretenden eckigen Klammern enthalten nach Hilfssatz 1.3 Fermi-Ableitungen.

Beim Dyadenformalismus rechnet man also nur mit Größen und Operationen des *Ruhraumes* V^3 . Diese Größen (über deren Bedeutung: Hilfs-satz 1.4) sind die folgenden:

1. die in (1.11) durch *Projektion* (in den V^3) gebildeten Anteile des Riemann tensors: $P_{ab}, Q_{ab}, B_{ab}, t_b$,
2. die kinematischen Größen: $a_b, \Omega_b, S_{ab}, \vartheta$,
3. die *nichtkovarianten* Größen aus (1.7, 8): ω_a, M_{ab} .

Die Größen aus 1. und 2. sind die bezüglich eines *Drei-Beines* — der *vierte Beinvektor ist der Tangentenvektor* ${}_0\lambda^\nu$ — gebildeten anholonomen Koeffizienten von Tensoren aus V^3 bzw. $V^3 \otimes V^3$. Die bezüglich V^3 definierten Größen ω_a, M_{ab} sind nicht die anholonomen Koeffizienten von Tensoren.

Auf die Größen aus 1., 2. und 3. werden im Dyadenformalismus die folgenden *Operationen* angewandt:

- a) $K_{ab}, H_{ab} \rightarrow K_{ac} H_{cb}^e$ ($K_{\mu\sigma} H_{\tau\nu} h^{\sigma\tau}$ für Tensoren).
- b) $K_{ab}, H_{ab} \rightarrow K_{ae} H_{gb} \varepsilon^{e g}$. Für Tensoren entspricht das

$$K_{\mu\tau} H_{\sigma\nu} \varepsilon^{\sigma\tau\sigma\kappa} {}_0\lambda_\kappa |g|^{-\frac{1}{2}}.$$

- c) $K_{ab} \rightarrow \dot{K}_{ab}$. Über den Zusammenhang mit der Fermi-ableitung $K_{\mu\nu; \kappa} \lambda^\kappa h_\mu^\mu h_\nu^\nu$ siehe Hilfssatz 1.3.

- d) $K_{ab} \rightarrow K_{ab;c}$ (definiert in (1.12, 19)). Das ist für Tensoren die räumliche kovariante Differentiation: $K_{\mu\nu; \kappa} h_\mu^\mu h_\nu^\nu h_\rho^\rho$ (siehe Hilfssatz 1.4).

Kapitel 2

In diesem und dem nächsten Kapitel werden alle Vakuumfelder ($R_{\mu\nu} = 0$) gesucht, die eine expandierende ($\vartheta \neq 0$), scherungs- und wirbel-freie ($\Sigma_{\mu\nu} = 0, \Omega_{\mu\nu} = 0$), zeitartige Kongruenz enthalten.

I. Es werden alle Metriken $g_{\mu\nu}$ gesucht, die eine Kongruenz ${}_0\lambda^\nu$ (${}_0\lambda^\nu {}_0\lambda_\nu \equiv -1$) mit

$$\Omega_{\mu\nu} = 0, \quad \Sigma_{\mu\nu} = 0, \quad \vartheta \neq 0 \tag{2.1}$$

zulassen und für die

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa_{\mu\nu\kappa}, \tag{2.2}$$

$$-\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\kappa\tau} = \Gamma^\mu_{\nu[\kappa, \tau]} + \Gamma^\mu_{\nu[\kappa} \Gamma^\mu_{\tau]} \tag{2.3}$$

gilt. $\Gamma^\mu_{\nu\tau}$ ist der affine Zusammenhang von $g_{\mu\nu}$. Dieses Problem ist äqui-valent mit dem folgenden Problem:

II. Es werden alle Metriken gesucht, die den Differentialidentitäten (1.13 bis 16) und den folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{a) } \Omega_a = 0, \quad \text{b) } S_{ab} = \vartheta \delta_{ab}, \quad (2.4)$$

$$\text{a) } \vartheta \neq 0, \quad \text{b) } t_a = 0, \quad (2.5)$$

$$\text{a) } P_{ab} = Q_{ab} \ (P_{[ab]} = 0), \quad \text{b) } P_a^a = 0. \quad (2.6)$$

Die Äquivalenz der Probleme I. und II. folgt daraus, daß die folgenden Gleichungen gleichbedeutend sind:

(2.1) mit (2.4, 5a) nach Definition,

(2.2) mit (2.5 b, 6) nach Hilfssatz 1.6,

(2.3) mit den Differentialidentitäten (1.13 bis 16) nach Hilfssatz 1.5.

In den Kapiteln 2 und 3 wird also (2.4 bis 6) bzw. (2.1, 2) vorausgesetzt werden. Außerdem sei im folgenden $a\lambda^r$ ein Fermi-Bein, so daß also

$$\omega_a = 0 \quad (2.7)$$

gilt (siehe Hilfssatz 1.3).

Zunächst werden die Differentialidentitäten aus Kapitel 1 ausgewertet (siehe Hilfssatz 1.5 und 1.7): Setzt man (2.4 bis 2.7) in (1.14) ein, so erhält man $B_{ab} = -\vartheta_{,c} \varepsilon_{ab}{}^c$. Daraus folgt wegen $B_{[ab]} = 0$

$$\text{a) } B_{ab} = 0, \quad \text{b) } \vartheta_{,a} = 0. \quad (2.8)$$

Mit (2.8 b) und (2.4 bis 2.7) vereinfachen sich die Differentialidentitäten (1.13, 15, 16, 18) zu

$$a_{b;a} = (\dot{\vartheta} + \vartheta^2) \delta_{ab} - a_a a_b + P_{ab}, \quad (2.9)$$

$$\dot{M}_{ab} = \vartheta (-\varepsilon_{ab}{}^c a_c - M_{ab}), \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_a{}^{cd} \dot{M}_{db;c} = -\frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{cd} \varepsilon_b{}^{eg} M_{ce} M_{da} + E_{ab}, \quad (2.11)$$

$$E_{ab} = -P_{ab} - \vartheta^2 \delta_{ab}. \quad (2.12)$$

E_{ab} ist der Einstein-Tensor von \mathfrak{S}^3 (siehe den unten angegebenen Hilfssatz 2.1).

Setzt man die Gleichungen (2.4 bis 2.8) in die Bianchi-Identitäten (siehe Hilfssatz 1.7) (1.24 bis 26) ein, so erhält man

$$\varepsilon_a{}^{cd} (P_{db;c} + a_c P_{db}) = P_{ac} a_a \varepsilon_b{}^{cd}, \quad (2.13)$$

$$\dot{P}_{ab} = -3\vartheta P_{ab}, \quad (2.14)$$

$$P_{a;c}^c = 0. \quad (2.15)$$

Man benötigt noch die *Vertauschungsrelationen* zwischen den Raum- und Zeitableitungen: Die in [9] angegebenen Ricci-Identitäten vereinfachen sich mit (2.4 bis 7) und (2.8 b, 10) zu

$$(\phi, a) \cdot - \dot{\phi}_{,a} = a_a \dot{\phi} - \vartheta \phi, a, \quad (2.16)$$

$$(V_b; a) \cdot - (\dot{V}_b)_{;a} = a_a \dot{V}_b - \vartheta (V_b; a + V_a a_b - V_c a^c \delta_{ab}), \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_a{}^{cd} [(K_{db;c}) \cdot - \dot{K}_{db;c}] = \varepsilon_a{}^{cd} a_c \dot{K}_{db} + \quad (2.18)$$

$$+ \vartheta \varepsilon_a{}^{cd} [-K_{db;c} + a_c K_{db} + K_{cd} a_b] + \vartheta \varepsilon_{ab}{}^d K_{de} a^e.$$

(2.16, 17, 18) gelten für beliebiges ϕ, V_a, K_{ab} . Außerdem bestehen die folgenden leicht zu beweisenden Zusammenhänge:

Hilfssatz 2.1. *Wegen $\Omega_{\mu\nu} = 0$ ist ${}_0\lambda^\nu$ normal zu einer Hyperfläche \mathfrak{S}^3 . \mathfrak{S}^3 ist dann eine dreidimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Metrik $h_{\mu\nu}$. ∇_μ sei die kovariante Ableitung bezüglich $h_{\mu\nu}$. Dann gilt für $T_{\mu\nu}$ aus $V^3 \otimes V^3$ ($\nabla_\mu T_{\nu\kappa}$) ${}_a\lambda^\mu {}_b\lambda^\nu {}_c\lambda^\kappa = T_{bc;a}$. Dabei ist das anfangs definierte ${}_a\lambda^\nu$ ein orthonormiertes Dreibein (auch für $\Omega_{\mu\nu} \neq 0$) bezüglich $h_{\mu\nu}$. E_{ab} (siehe (1.18)) sind die anholonomen Koeffizienten des Einstein-Tensors ($E_{ab;c} = 0$) von \mathfrak{S}^3 , so daß die folgende Ricci-Identität gilt:*

$$({}_c^e)_{;a} = ({}_c^e)_{;c} + v^c (E_{ca} - \delta_{ca} E_c^e) \quad (2.19)$$

für alle v^c aus V^3 .

Durch Bildung der Punktableitungen von (2.13), Benutzung der Ricci-Identität (2.18) und Einsetzen von (2.14, 8b) (und $P_{[ab]} = 0$) erhält man

$$-{}_a^c \dot{a}^d \dot{a}_c P_{ab} + P_{ac} \dot{a}_d \dot{a}_b^c \dot{a}^d = 0. \quad (2.20)$$

Überschiebt man mit \dot{a}^b , so erhält man

$$P_c^a \dot{a}^c \sim \dot{a}^a. \quad (2.21)$$

Aus den Gleichungen (2.20, 21) folgt

$$P_c^a b^c \sim b^a \quad \text{für alle } b^a \text{ mit } b^c \dot{a}_c = 0. \quad (2.22)$$

Es gilt also der folgende

Satz 2.2. a) *Es ist*

$$u_b \equiv \dot{a}_b (\dot{a}_c \dot{a}^c)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

der nichtausgeartete Eigenvektor von P_{ab} . $2\alpha^3$ sei sein Eigenwert. $\dot{a}_c \dot{a}^c$ und α sind beide ungleich Null in einer nichtflachen Welt — eine solche soll im folgenden nur betrachtet werden. Außerdem gilt

$$P_{ab} = \alpha^3 (3u_a u_b - \delta_{ab}). \quad (2.24)$$

Ein orthonormiertes Eigendreibein von P_{ab} ist also nur bis auf Drehungen um die Achse u_a bestimmt. Der Eigenvektor u_a ist fermi-verschoben:

$$\dot{u}_a = 0. \quad (2.25)$$

b) *Der Weyl-Tensor $C_{\mu\nu\kappa\tau}$ ist vom Petrov-Typ D (zur Bezeichnung siehe [3]) — also ausgeartet — mit den reellen Eigenwerten $\pm\alpha^3, \pm 2\alpha^3$.*

c) u_a werde durch \tilde{v}_a, \tilde{w}_a zu einem orthonormierten Dreibein von V^3 ergänzt. Dann gilt

$$C_{rstu} \tilde{v}^{[t} \tilde{w}^{u]} \sim \tilde{v}_{[r} \tilde{w}_{s]}, \quad C_{rstu} {}_0\lambda^{[t} u^{u]} \sim {}_0\lambda_{[r} u_{s]}.$$

${}_0\lambda_{[r} u_{s]}, \tilde{v}_{[r} \tilde{w}_{s]}$ ist also der einfache zeit- bzw. raumartige Eigenbivektor von C_{rstu} .

Es muß noch (2.25) bewiesen werden: Aus (2.24) folgt $P_{ab} P^{ab} = 6\alpha^6$. Damit und mit (2.14) erhält man

$$\dot{\alpha} = -\vartheta \alpha. \quad (2.26)$$

Bildet man bei (2.24) die Punktableitung und setzt (2.26, 14) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung (2.25).

Teil b), c) aus Satz 2.2 folgt aus $0 = B_{eb} = \frac{1}{2} \varepsilon_b^{cd} C_{0ecd}$ (wegen (2.8 a), (1.11 c)) und aus (2.24) und aus

$$P_{eb} = C_{0e0b}. \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) erhält man aus (1.11 a) und (2.6).

Daß $\dot{a}_c \dot{a}^c \neq 0$, $\alpha \neq 0$ ist, zeigt man wie folgt: Angenommen, es wäre $0 = \dot{a}_c \dot{a}^c = \sum_{c=1}^3 (\dot{a}_c)^2$, so hätte man $\dot{a}_c = 0$. Bildet man die Punktableitung von (2.9), wendet (2.17) an und setzt $\dot{a}_c = 0$ und (2.14) ein, so bekäme man: Es existiert φ mit $\vartheta P_{ab} = \varphi \delta_{ab}$. Damit und mit (2.6 b) wäre $\varphi = 0$, d. h. wegen $\vartheta \neq 0$: $P_{ab} = 0$, was zusammen mit (2.8 a) eine flache Welt bedeuten würde. — Wäre $\alpha = 0$, dann hätte man mit (2.24) wieder $P_{ab} = 0$ und wie eben wieder eine flache Welt.

Der folgende Satz zeichnet ein Eigendreibein von P_{ab} aus:

Satz 2.3. *Es sei $\dot{a}_{[a} a_{b]} \neq 0$. Dann sind*

$$v_b \equiv [a_b - u_b (a_c u^c)] [a_c a^c - (u_c a^c)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

$$w_b \equiv \varepsilon_{bcd} u^c v^d \quad (2.29)$$

und u_b ein Eigendreibein von P_{ab} . Es ist festgelegt durch die folgenden Eigenschaften:

I. *Das orthonormierte Eigendreibein ist fermi-verschoben und 2-flächennormal (d. h. hyperflächennormal in \mathfrak{S}^3 , siehe Hilfssatz 2.1):*

$$\dot{u}_a = 0, \quad \dot{v}_a = 0, \quad \dot{w}_a = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{a) } u_{[a;b} u_{c]} = 0, \quad \text{b) } v_{[a;b} v_{c]} = 0, \quad (2.31)$$

$$w_{[a;b} w_{c]} = 0. \quad (2.32)$$

II. *Es existiert ein \hat{w}_a mit: \hat{w}_a ist parallel zu einem (das ist hier w_a) von den Beinen, aber nicht zu u_a . Und es gilt*

$$\hat{w}_{(a;b)} = 0. \quad (2.33a)$$

\hat{w}_a ist also ein Killing-Vektor bezüglich $h_{\mu\nu}$ (siehe Hilfssatz 2.1). Für dieses \hat{w}_a gilt

$$\hat{w}_a = w_a (a_c v^c) \alpha^{-1}. \quad (2.33b)$$

Beweis: Aus der Definition von v_b , w_b folgt nach Satz 2.2, daß sie u_a zu einem Eigendreibein von P_{ab} ergänzen. — Aus (2.25, 23) und den Definitionen (2.28, 29) folgt (2.30). Die Gleichungen (2.31, 32) bzw. (2.33) folgen aus (2.37, 39, 40)¹⁷ bzw. (2.40, 42, 44)¹⁷.

$\cos \varphi v_a - \sin \varphi w_a$, $\sin \varphi v_a + \cos \varphi w_a$, u_a sind alle orthonormierten Eigendreibeine von P_{ab} . Diese haben die kennzeichnenden Eigenschaften aus Satz 2.3 nur für $\varphi = 0$, wie man durch Verwendung von (2.30) bis (2.33) und (2.39, 40)¹⁷ feststellt.

Im folgenden werden die kovarianten Ableitungen von u_a , v_a , w_a bestimmt. Um die Fälle $\dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0$, $\dot{a}_{[c} a_{b]} = 0$ gemeinsam behandeln zu

¹⁷ Diese Gleichungen werden auf den nächsten Seiten ohne Benutzung des Satzes 2.3 hergeleitet.

können, führt man

$$\bar{v}_b \equiv a_a - u_b (u_c a^c) \quad (2.34)$$

ein. Es ist dann mit (2.23) und (2.25)

$$\bar{v}_b = v_b (\bar{v}_c \bar{v}^c)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[b} a_{c]} \neq 0, \quad (2.35a)$$

$$\bar{v}_b = 0 \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[b} a_{c]} = 0, \quad (2.35b)$$

$$\dot{\bar{v}}_b = 0. \quad (2.36)$$

Mit Hilfe der Punktableitung von (2.9) und Anwendung der Ricci-Identität (2.17) berechnet man $\dot{a}_{b;c}$. Setzt man darin (2.14, 24) ein und berücksichtigt man (2.23, 34), so erhält man

$$w_{b;a} = \gamma (\delta_{ab} - u_a u_b) - u_a \bar{v}_b. \quad (2.37)$$

Dabei ist

$$\gamma \equiv (\dot{a}_c \dot{a}^c)^{-\frac{1}{2}} [\ddot{\theta} + 3 \dot{\theta} \dot{\theta} + \dot{\theta}^3 + 2 \dot{\theta} \alpha^3 - \dot{\theta} (\bar{v}_c \bar{v}^c + (a_c u^c)^2)], \quad \gamma \neq 0^{18}. \quad (2.38)$$

Kovariante Differentiation der Definitionsgleichung (2.28) und Einsetzen von (2.9, 37, 24, 29) ergibt

$$v_{b;a} = -\gamma v_a u_b + (v_c a^c)^{-1} [-\alpha^3 + \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 - \gamma a_c u^c] w_a w_b + a_c v^c u_a u_b \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0. \quad (2.39)$$

Aus (2.37, 39) und der Definitionsgleichung (2.29) folgt

$$w_{b;a} = -\gamma w_a u_b + (v_c a^c)^{-1} \times [\alpha^3 - \dot{\theta} - \dot{\theta}^2 + \gamma a_c u^c] w_a w_b \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0. \quad (2.40)$$

Aus den kovarianten Ableitungen von a_b , u_b , v_b , w_b lassen sich die *räumlichen Gradienten* ($\dot{\theta}_{,a} = 0$ ist schon in (2.8b) angegeben) der *auf-tretenden Skalare bestimmen*. Setzt man in $(a_c u^c)_{,a} = a_{c;a} u^c + a_c u^c_{,a}$ (2.37, 9, 24) ein, so erhält man

$$(a^c u_c)_{,a} = [-a_c a^c + 2\alpha^3 + \dot{\theta} + \dot{\theta}^2] u_a - [a_c u^c - \gamma] \bar{v}_a. \quad (2.41)$$

Analog dazu berechnet man aus (2.39, 9, 24)

$$(a^c v_c)_{,a} = -[(a_c v^c)^2 + \alpha^3 + \gamma u_c a^c - \dot{\theta} - \dot{\theta}^2] v_a \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0. \quad (2.42)$$

Setzt man Gleichung (2.24) in (2.15) ein und berücksichtigt (2.37), so erhält man

$$\alpha^2 \alpha_{,b} + \alpha^3 \bar{v}_b - u_b (3\alpha^2 \alpha_{,c} u^c + 2\alpha^3 \gamma) = 0. \quad (2.43)$$

¹⁸ Dies gilt in einer nichtflachen Welt. Die Tatsache, daß $\gamma \neq 0$ ist, wird bei der Ableitung der Formeln (2.37 bis 48) nicht benutzt, so daß diese bei dem nun folgenden Beweis verwendet werden können: Man macht die gegenteilige Annahme, daß $\gamma = 0$ ist. Daraus folgt mit (2.47, 48) $\dot{\theta} = 0$, $a_c u^c = 0$. Das wird in die mit $(\dot{a}_c \dot{a}^c)^{\frac{1}{2}}$ multiplizierte Gleichung (2.38) eingetragen und $\gamma = 0$ gesetzt, so daß $0 = \dot{\theta}^3 + 2\dot{\theta}\alpha^3 - \dot{\theta}(\bar{v}_c \bar{v}^c)$ ist. Hiervon bildet man die Punktableitung und setzt (2.26, 36) ein und benutzt wieder $\dot{\theta} = 0$. Dann ist $0 = 6\dot{\theta}^2 \alpha^3$, d. h. es ist $\dot{\theta} = 0$ (wegen $\alpha \neq 0$), was nach (2.1) gerade nicht der Fall sein soll.

Das hieraus berechnete $\alpha_{,c} u^c$ setzt man in (2.43) ein und bekommt

$$\alpha_{,a} = -\alpha(\bar{v}_a + \gamma u_a). \quad (2.44)$$

Aus (2.37) folgt

$$u_{,c}^c = 2\gamma. \quad (2.45)$$

Wegen (2.34, 35 b) gilt für $\dot{a}_{[c} a_{b]} = 0$: $u_b = a_b (a_c u^c)^{-1}$. Setzt man dies in (2.45) ein und berücksichtigt (2.9, 41), so ist

$$\vartheta^2 - \alpha^3 = \gamma(a_c u^c) - \dot{\vartheta} \quad \text{für} \quad \dot{a}_{[c} a_{b]} = 0. \quad (2.46)$$

Wendet man die Ricci-Identität (2.19) auf $(u_{,c}^c)_{,a}$ an und setzt (2.12, 37) ein, so erhält man mit (2.45)

$$(2\gamma)_{,a} = (u_{,c}^c)_{,a} = [\gamma(\delta_a^c - u^c u_a) - \bar{v}^c u_a]_{,c} + u^c (-P_{ca} + 2\vartheta^2 \delta_{ca}).$$

Hierin setzt man (2.37) ein, und berücksichtigt man noch für $\dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0$ (2.35 a, 39, 42) bzw. für $\dot{a}_{[c} a_{b]} = 0$ (2.35 b, 46), dann folgt

$$\gamma_{,a} = (-\dot{\vartheta} + \gamma a_c u^c - \gamma^2) u_a. \quad (2.47)$$

Wegen (2.44, 36) ist $(\gamma \alpha^{-1})_{,c} = [(\alpha^{-1})_{,c} u^c]_{,c} = [(\alpha^{-1})_{,c}]_{,c} u^c$. Hieraus erhält man mit Hilfe der Ricci-Identität (2.16) und Einsetzen von (2.8, 26)

$$(\gamma \alpha^{-1})_{,c} = \alpha^{-1} \vartheta a_c u^c. \quad (2.48)$$

Aus der Definition der kinematischen Größen und den Gleichungen (2.4, 7) folgt sehr einfach der

Hilfssatz 2.4. *Ein beliebiger Vektor V_r läßt sich eindeutig wie folgt zerlegen: $V_r = W_r + \beta_0 \lambda_r$ mit W_r aus V^3 (d. h. $W_0 = 0$). $V_{r;s}$ zerfällt dann in:*

$$\begin{aligned} V_{b;a} &= W_{b;a} + \beta \vartheta \delta_{ab}, & V_{b;0} &= \dot{W}_b + \beta a_b, \\ V_{0;a} &= -\vartheta W_a - \beta_{,a}, & V_{0;0} &= -(a_c W^c + \dot{\beta}). \end{aligned}$$

Nun läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 2.5. *Aus den Gleichungen (2.1,2,3) folgt: Die Metrik $g_{\mu\nu}$ läßt den hyperflächennormalen Killing-Vektor*

$$\xi_r \equiv \alpha^{-1} (\vartheta u_r - \gamma_0 \lambda_r) \quad (2.49)$$

zu. Es ist also

$$\text{a) } \xi_{(r;s)} = 0, \quad \text{b) } \xi_{[r;s} \xi_{t]} = 0, \quad (2.50)$$

$$\xi_r \xi^r = \alpha^{-2} (\vartheta^2 - \gamma^2). \quad (2.50 \text{ c})$$

Für $\gamma^2 > \vartheta^2$ (gleichbedeutend mit $\xi_r \xi^r < 0$) ist die Metrik also statisch, und zwar ist sie Petrov-entartet (nach Satz 2.2 b). Darüber hinaus hat man

$$(2\alpha^3)_{,r} \xi^r = 0. \quad (2.50 \text{ d})$$

Beweis: Durch Anwendung des Hilfssatzes 2.4 auf $\xi_{(r;s)}$ erhält man

$$\xi_{(a;b)} = [\alpha^{-1} \vartheta u_{(a);b}] - \alpha^{-1} \gamma \vartheta \delta_{ab}, \quad (2.51)$$

$$2\xi_{(b;0)} = (\alpha^{-1} \vartheta u_b)_{,0} - \alpha^{-1} \gamma a_b - \alpha^{-1} \vartheta^2 u_b + (\alpha^{-1} \gamma)_{,b}, \quad (2.52)$$

$$-\xi_{(0;0)} = \vartheta \alpha^{-1} a_c u^c - (\alpha^{-1} \gamma)_{,0}. \quad (2.53)$$

Einsetzen der Gleichungen

$$(2.37, 44, 8b) \text{ in } (2.51) \text{ liefert } \xi_{(a;b)} = 0,$$

$$(2.25, 26, 44, 47) \text{ in } (2.52) \text{ ergibt } \xi_{(b;0)} = 0,$$

$$(2.48) \text{ in } (2.53) \text{ führt zu } \xi_{(0;0)} = 0.$$

Damit ist (2.50a) bewiesen.

Ebenso wendet man Hilfssatz 2.4 auf $[\alpha^2 \xi_{[r];s}]$ an und erhält einerseits $[\alpha^2 \xi_{[a];b}] = [\partial \alpha u_{[a];b}] = 0$ (wegen (2.37, 44, 8b)) und andererseits

$$2[\alpha^2 \xi_{[b];0}] = [(\partial \alpha u_b) \cdot - \alpha \gamma a_b + \vartheta^2 \alpha u_b - (\alpha \gamma)_{,b}] \sim u_b$$

wegen (2.25, 34, 44) und $\gamma_{,b} \sim u_b$ (aus (2.47)). Aus den beiden Gleichungen folgt $(\alpha^2 \xi_{[r];s}) \sim {}_0\lambda_{[r} u_s]$, woraus mit (2.49)

$$(\alpha^2 \xi_{[r];s} \alpha^2 \xi_{[t]}) \sim \alpha [{}_0\lambda_{[r} u_s u_t] \vartheta - {}_0\lambda_{[r} u_s |0| \lambda_{[t]} \gamma] = 0$$

wird. Es ist also $\alpha^2 \xi_r$ und damit auch ξ_r hyperflächennormal. — (2.50d) gilt, weil ξ_r ein Killing-Vektor und α^3 eine metrische Invariante ist. Damit ist also Satz 2.5 bewiesen.

Aus (2.44, 35a, 35b) folgt für $\dot{a}_{[c} a_b] = 0$:

$$\alpha_{,r} \tilde{v}^{[r} \tilde{w}^{s]} = 0, \quad (2.54)$$

für $\dot{a}_{[c} a_b] \neq 0$:

$$\alpha_{,r} v^{[r} w^{s]} \neq 0 \neq \alpha_{,r} (\eta^{rs}{}_{;tu} v^{[t} w^{u]}) \quad (2.55)$$

mit $\eta_{\nu\mu\kappa\tau} \equiv |g|^{1/2} \varepsilon_{\nu\mu\kappa\tau}$.

\tilde{v}^a, \tilde{w}^b sollen u^a zu einem Dreibein von V^3 ergänzen. Nach Satz 2.2 ist $v^{[t} w^{u]}$ bzw. $\tilde{v}^{[r} \tilde{w}^{s]}$ der raumartige Eigenbivektor und $\pm 2\alpha^3$ der nichtausgeartete Eigenskalar des Weyl-Tensors. Daher kann man mit (2.54, 55) die in [7] angegebene Charakterisierung der ausgearteten statischen Vakuummetriken — solche liegen nach Satz 2.5 für $\gamma^2 > \vartheta^2$ vor — anwenden und erhält:

Für $\gamma^2 > \vartheta^2$ gilt:

Für $\dot{a}_{[c} a_b] = 0$ liegen class A Metriken vor,

für $\dot{a}_{[c} a_b] \neq 0$ liegen class C Metriken vor.

Diese Metriken sind in [7] explizit angegeben, so daß man den folgenden Satz bekommt:

Satz 2.6. *Aus den Voraussetzungen (2.1, 2, 3) folgt für den Fall $\gamma^2 > \vartheta^2$, daß die gesuchten Metriken für $\dot{a}_{[c} a_b] \neq 0$ "class C" und für $\dot{a}_{[c} a_b] = 0$ "class A" angehören. Diese entarteten statischen Metriken (siehe [7]) sind die folgenden:*

I. Für $\dot{a}_{[c} a_b] \neq 0$: class C:

$$ds^2 = (x^1 + x^2)^{-2} [(f(x^2))^{-1} d(x^2)^2 + f(x^2) d(x^3)^2 + (-f(-x^1))^{-1} d(x^1)^2 - (-f(-x^1)) d(x^0)^2], \quad (2.56a)$$

$$f(y) \equiv \pm (y^3 + ay + b). \quad (2.56b)$$

Der nichtausgeartete Eigenskalar vom $C_{\nu\mu\kappa\tau}$ ist

$$2\alpha^3 = \pm (x^1 + x^2)^3. \quad (2.56c)$$

Die Koordinaten variieren wie folgt:

$$0 < x^1 + x^2, \quad f(x^2) > 0, \quad (2.56d)$$

$$-f(-x^1) > 0. \quad (2.56e)$$

II. Für $\dot{a}_{[a}a_{b]} = 0$: class A:

$$d_s^2 = (x^1)^2 [d(x^2)^2 + (\sin x^2)^2 d(x^3)^2] + \left(1 - \frac{b}{x^1}\right)^{-1} d(x^1)^2 - \left(1 - \frac{b}{x^1}\right) d(x^0)^2, \quad (2.57a)$$

$$0 < x^2 \leq \pi, \quad x^3 \bmod{2\pi}, \quad (2.57b)$$

$$0 < b < x^1 \quad \text{oder} \quad b < 0 < x^1, \quad (2.57c)$$

$$d_s^2 = (x^1)^2 [d(x^2)^2 + (\sinh x^2)^2 d(x^3)^2] + \left(\frac{b}{x^1} - 1\right)^{-1} d(x^1)^2 - \left(\frac{b}{x^1} - 1\right) d(x^0)^2, \quad (2.58a)$$

$$0 \leq x^2, \quad x^3 \bmod{2\pi}, \quad (2.58b)$$

$$0 < x^1 < b, \quad (2.58c)$$

$$d_s^2 = (x^1)^2 [d(x^2)^2 + (x^2)^2 d(x^3)^2] + x^1 d(x^1)^2 - (x^1)^{-1} d(x^0)^2, \quad (2.59a)$$

$$0 \leq x^2, \quad x^3 \bmod{2\pi}, \quad (2.59b)$$

$$0 < x^1. \quad (2.59c)$$

Für class A ist der nichtausgeartete Eigenskalär von $C_{\mu\nu\kappa\tau}$

$$2\alpha^3 = \pm b(x^1)^{-3} \quad (b = 1 \text{ für Metrik (2.59a)}). \quad (2.60)$$

$$\delta_2^{\nu} \delta_3^{\mu} \text{ ist der raumartige,} \quad (2.61a)$$

$$\delta_1^{\nu} \delta_0^{\mu} \text{ der zeitartige} \quad (2.61b)$$

Eigenbivector von $C_{\nu\mu\kappa\tau}$ für class A und C. Außerdem gilt

$$\xi^{\nu} \sim \delta_0^{\nu}; \quad (2.62)$$

denn ξ^{ν} aus (2.49) liegt nach Satz 2.2c im zeitartigen Bivektorelement, also in $\delta_1^{\nu} \delta_0^{\mu}$ (siehe (2.61b)), und es ist $(2\alpha^3)_{,\nu} \xi^{\nu} = 0$ wegen (2.50d).

Kapitel 3

Das für $\gamma^2 > \vartheta^2$ erhaltene Ergebnis des letzten Kapitels soll erweitert werden auf den Fall $\gamma^2 < \vartheta^2$, d. h. der hyperflächennormale Killingvektor ξ^{ν} aus (2.49) ist dann raumartig:

Satz 3.1. a) Der Satz 2.6 gilt analog für $\gamma^2 < \vartheta^2$, wenn man dort die Definitionsbereiche der metrischen Koeffizienten wie folgt abändert:

Anstelle von (2.56e) bzw. (2.57c) bzw. (2.59c) schreibe man $-f(-x^1) < 0$ bzw. $0 < x^1 < b$ bzw. $x^1 < 0$. Und anstelle von (2.58c) trage man ein: „ $x^1 > b > 0$ oder $x^1 > 0 > b$ “. Bei den so erhaltenen Metriken gilt für die metrischen Koeffizienten $g_{00} > 0$ und $g_{11} < 0$, d. h. x^1 übernimmt die Rolle der Zeitkoordinate. Die Metriken dieses Satzes, die den Linienelementen (2.57a, 58a) entsprechen, sind gerade die analytischen (nichtstatischen) Fortsetzungen (siehe [12]) von (2.57a, 58a).

b) Außerdem gilt für die Fälle $\vartheta^2 > \gamma^2$, $\vartheta^2 < \gamma^2$ gemeinsam:
Aus (2.1, 2, 3) folgt

1. für $\dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0$

$${}_0\lambda^\nu = (x^1 + x^2) [-\delta_1^\nu \vartheta + \delta_0^\nu (\vartheta^2 - f(-x^1))^{\frac{1}{2}} (f(-x^1))^{-1}], \quad (3.1)$$

2. für $\dot{a}_{[c} a_{b]} = 0$

$${}_0\lambda^\nu = x^1 [\delta_1^\nu \vartheta - \delta_0^\nu (\vartheta^2 - (x^1)^{-2} g_{00})^{\frac{1}{2}} g_{00}^{-1}]. \quad (3.2)$$

Dabei ist $f(-x^1)$ aus (2.56b) und g_{00} ist der metrische Koeffizient aus (2.57a) bzw. (2.58a) bzw. (2.59a). Die Koordinaten variieren so, wie es in Satz 2.6 und unter a) dieses Satzes angegeben ist. In diesen Koordinaten genügt der Expansionssskalar $\frac{1}{3} \vartheta$ der folgenden quasilinearen und homogenen Differentialgleichung:

I. Für $\dot{a}_{[c} a_{b]} \neq 0$

$$(\vartheta^2 - f(-x^1))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x^1} - \vartheta (f(-x^1))^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x^0} = 0, \quad (3.3)$$

$$\vartheta = \vartheta(x^1, x^0),$$

II. für $\dot{a}_{[c} a_{b]} = 0$

$$(\vartheta^2 - (x^1)^{-2} g_{00}(x^1))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x^1} - \vartheta (g_{00}(x^1))^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x^0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\vartheta = \vartheta(x^1, x^0).$$

ϑ und damit auch ${}_0\lambda^\nu$ sind also eindeutig bestimmt, wenn man ϑ längs einer Linie vorgibt. Diese Linie muß in der 2-Fläche liegen, die vom zeitartigen Eigenbivektor $\delta_{[1}^{\nu} \delta_0^{\kappa]}$ des Weyl-Tensors aufgespannt wird. Gibt man längs einer solchen Linie $\vartheta = \text{konstant}$ vor, so muß ϑ überall konstant sein.

Beweis von Teil a) des Satzes 3.1: Zunächst sei bemerkt, daß die in Satz 3.1 a) angegebenen Metriken natürlich auch der Feldgleichung, d. h. also $R_{\mu\nu} = 0$, genügen.

Denn: Denkt man sich für die in (2.56a, 57a, 58a, 59a) angegebenen Koeffizienten $g_{\nu\mu}(x^\nu)$, die rationale Funktionen in den x^ν sind, den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ ausgerechnet, so ist dieser ebenfalls rational in den x^ν , und zwar auch für solche x^ν , die in den von Satz 3.1 a) angegebenen Definitionsbereichen liegen. Für die x^ν aus den Definitionsbereichen von Satz 2.6 ist $R_{\mu\nu}(x^\nu) = 0$. Also muß die rationale Funktion $R_{\mu\nu}(x^\nu)$ auch Null sein für die anderen x^ν (die in Satz 3.1 a) angegebenen).

Es muß noch gezeigt werden, daß bei $\gamma^2 < \vartheta^2$ für die Metriken, die die Eigenschaften (2.1, 2, 3) haben, keine anderen in Frage kommen, als die in Satz 3.1 a) angegebenen. Nachdem man

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\alpha^3 (\bar{g}_{\mu\nu} + 3e_\mu e_\nu)^{19} \quad (3.5)$$

gezeigt hat (siehe unten) und für einen zeitartigen Eigenbivektor $V^{\mu\nu}$ von $C_{\mu\nu\kappa\tau}$ und dessen Eigenskalar $2\alpha^3$

$$\text{a) } {}_0\lambda^{[\nu} V^{\mu\nu]} = 0, \quad \text{b) } (2\alpha^3)_{, \nu} {}_0\lambda^\nu \neq 0 \quad (3.6)$$

nachgewiesen hat, geht man — analog zum Fall $\gamma^2 > \vartheta^2$ — wie folgt vor:

¹⁹ $\bar{g}_{\mu\nu}$ ist die in der Hyperfläche senkrecht zum hyperflächennormalen ξ^ν induzierte, indefinite Metrik und $\bar{R}_{\mu\nu}$ deren Ricci-Tensor.

Nach Satz 2.5 und 2.2 liegt eine ausgeartete Vakuummetrik mit dem hyperflächennormalen raumartigen Killing-Vektor ξ^v vor. Wenn man unter Berücksichtigung von (3.5, 6) die in [13] angegebene Konstruktion der Metriken auf den Fall eines raumartigen ξ^v — in [13] ist ξ^v zeitartig — analog umschreibt²⁰, dann erhält man für die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}(x^v)$ die gleichen Funktionen wie sie in [7] unter class C und A — das sind also die in Satz 2.6 aufgeführten — angegeben sind, nur daß jetzt die Variablen x^v dem in Satz 3.1a angegebenen Definitionsbereich angehören (es wird also $g_{11} < 0$, $g_{00} > 0$).

Es muß noch (3.6) abgeleitet werden: Nach Satz 2.2c ist ${}_0\lambda^{1\nu}u^{\mu 1}$ zeitartiger Eigenvektor, also gilt (3.6a). Wegen (2.26), $\vartheta \neq 0$ und $\alpha \neq 0$ ist $0 \neq \vartheta\alpha = -\dot{\alpha} \equiv -\alpha_{,v}{}_0\lambda^v$. Daraus folgt (3.6b).

Für den Beweis von (3.5) wechselt man auf das orthonormierte Vierbein $(\bar{\gamma}\lambda^v) \equiv (e^v, \bar{\gamma}\lambda^v, v^v, w^v)$ mit dem raumartigen $\bar{\gamma}\lambda^v \sim \xi^v$ über. Dabei sei für den Spezialfall $\dot{a}_{[c}a_{b]} = 0$: $v^v \equiv \bar{v}^v$, $w^v \equiv \bar{w}^v$ (\bar{v}^v, \bar{w}^v aus Satz 2.2c). Bezüglich dieses Vierbeins $\bar{\gamma}\lambda^v$ gilt²¹ für $\bar{R}_{\mu\nu}$ aus (3.5) wegen $R_{\mu\nu} = 0$

$$\bar{R}_{\bar{a}\bar{b}} = -C_{\bar{1}\bar{a}\bar{1}\bar{b}}, \quad e^{\bar{a}} \equiv {}_0\lambda^{\bar{a}} = \delta_{\bar{0}}^{\bar{a}} \quad (3.7)$$

mit $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \dots = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{3})$.

Und wegen (2.24, 27, 8a), (1.11c) und Satz 2.2c ist

$$-C_{\bar{1}\bar{1}\bar{b}}^{\bar{a}} = \alpha^3 (3\delta_{\bar{0}}^{\bar{a}}\delta_{\bar{b}}^{\bar{0}} - \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}});$$

daraus folgt mit (3.7) die Gleichung (3.5).

Nun wird noch Teil b) von Satz 3.1 bewiesen. Dazu führt man

$$\eta_r \equiv \alpha^{-1}(\gamma^2 - \vartheta^2)^{-1} [-\gamma u_r + \vartheta {}_0\lambda_r] \quad (3.8)$$

ein. Damit und mit (2.49) wird für die senkrecht aufeinander stehenden Einheitsvektoren u_r und ${}_0\lambda_r$

$${}_0\lambda_r = -\alpha [\vartheta \eta_r + \xi_r \gamma (\gamma^2 - \vartheta^2)^{-1}], \quad (3.9)$$

$$u_r = -\alpha [\gamma \eta_r + \xi_r \vartheta (\gamma^2 - \vartheta^2)^{-1}], \quad (3.10)$$

$$\text{a) } \xi_r \eta^r = 0, \quad \text{b) } \eta_r \eta^r = \alpha^{-2}(\gamma^2 - \vartheta^2)^{-1}. \quad (3.11)$$

Wegen (2.62, 49) läßt sich

$$\text{a) } \xi^v = \varphi \delta_0^v, \quad \varphi \neq 0 \quad \text{b) } \vartheta^2 - \gamma^2 = \alpha^2 \varphi^2 g_{00} \quad (3.12)$$

schreiben. Daraus und mit (3.8, 11) und (2.49) erhält man

$$\eta^v = (-g_{00}g_{11})^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-2} \varphi^{-1} \delta_1^v. \quad (3.13)$$

Nach (2.44), (3.10, 11b) ist $-\alpha \gamma = \alpha_{,a}u^a = \alpha_{,v}u^v = -\alpha \gamma \alpha_{,v}\eta^v$. Daraus berechnet man mit Hilfe von (2.56c, 60) und Satz 2.6 und 3.1a und

²⁰ Da ξ^v ein hyperflächennormaler raumartiger Killing-Vektor ist, existiert ein Koordinatensystem mit

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}(x^v) dx^\alpha dx^\beta + e^{2U(x^\alpha)} d(x^0)^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = (1, 2, 3)$$

und, wie immer, $\mu, \nu, \kappa \dots = (0, 1, 2, 3)$ und $\xi^v \sim \delta_0^v$, womit aus (3.5) $\bar{R}_{\alpha\beta} = -\alpha^3(\bar{g}_{\alpha\beta} + 3e_\alpha e_\beta)$ folgt. Diese drei Formeln bilden den Ausgangspunkt für die in [13] angegebene Konstruktion der Metriken.

²¹ Es wurden die Formel: „ $\epsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \bar{R}^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \epsilon^{\bar{d}\bar{c}\bar{d}} = \bar{R}_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} = C_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}$ für $R_{\mu\nu} = 0$ “ benutzt.

(3.13) die Gleichungen

$$\alpha\varphi = x^1 + x^2 \quad \text{für} \quad \dot{\alpha}_{[c}\alpha_{b]} \neq 0, \quad (3.14a)$$

$$\alpha\varphi = -(x^1)^{-1} \quad \text{für} \quad \dot{\alpha}_{[c}\alpha_{b]} = 0. \quad (3.14b)$$

Setzt man die Gleichungen (3.12, 13, 14) unter Berücksichtigung von Satz 2.6 und 3.1a in (3.9) bzw. in

$$-\alpha[\gamma\vartheta_{,v}\eta^v + (\gamma^2 - \vartheta^2)^{-1}\vartheta\vartheta_{,v}\xi^v] = \vartheta_{,v}u^v = \vartheta_{,a}u^a = 0$$

(wegen (2.8b), (3.10)) ein, so erhält man die Formeln (3.1, 2) bzw. (3.3, 4).

Außerdem folgt aus (2.8b): $0 = \vartheta_{,a}v^a = \vartheta_{,v}v^v$, $0 = \vartheta_{,v}w^v$. Also ist ϑ nach Satz 2.2c im raumartigen Eigenbivektorelement konstant, was mit (2.61a) (und Satz 3.1a) bedeutet, daß es in der von δ_2^2 , δ_3^3 aufgespannten 2-Fläche konstant ist, also: $\vartheta_{,2} = \vartheta_{,3} = 0$.

Kapitel 4

Bisher wurde bewiesen: Wenn $R_{\mu\nu} = 0$ und $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\vartheta \neq 0$ gilt, dann gehören die Metriken den in Satz 2.6 und 3.1a angegebenen Klassen an. Umgekehrt gilt

Satz 4.1. *Es seien*

I. *die Metriken $g_{\mu\nu}$ aus den Sätzen 2.6 und 3.1,*

II. *die Kongruenzen ${}_0\lambda^r$ aus Satz 3.1*

vorgelegt. Dann folgt für den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ und für die bezüglich ${}_0\lambda^r$ gebildeten kinematischen Größen $\Sigma_{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}$

$$a) R_{\mu\nu} = 0, \quad b) \Sigma_{\mu\nu} = 0 = \Omega_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Beweis: Die im Satz 2.6 angegebenen $g_{\mu\nu}$ sind nach [7] Vakuummetriken, d. h. $R_{\mu\nu} = 0$, was auch für die Metriken aus Satz 3.1 gilt wegen der Bemerkungen zu Beginn des Beweises von Satz 3.1.

Es muß noch (4.1b) bewiesen werden: Wegen der Voraussetzung I. und II. wird ${}_0\lambda^r$ durch

$${}_E\lambda^r \equiv (g_{EE})^{-\frac{1}{2}} \delta_E^r, \quad (E = 2, 3) \quad (4.2)$$

$${}_1\lambda_\mu \equiv |g|^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\nu\mu\kappa\tau} {}_0\lambda^\nu {}_2\lambda^\kappa {}_3\lambda^\tau \quad (4.3)$$

zu einem orthonormierten Vierbein ergänzt, so daß man für die Metrik $h_{\mu\nu}$ von V^3

$$h_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^3 a\lambda_\mu a\lambda_\nu \quad (4.4)$$

hat. Sei nun

$$\dot{\alpha}_{[c}\alpha_{b]} \neq 0 \quad (4.5)$$

vorausgesetzt (der Fall $\dot{\alpha}_{[c}\alpha_{b]} = 0$ läßt sich völlig analog behandeln). Aus der Voraussetzung I. und II. leitet man leicht ab:

$$a) \mathfrak{L}(x^1 + x^2) {}_E\lambda_\nu = 0, \quad b) \mathfrak{L} {}_E\tilde{\lambda}^v = 0 \quad (E = 2, 3) \quad (4.6)$$

mit ${}_r\tilde{\lambda}^v \equiv (x^1 + x^2)^{-1} {}_r\lambda^v$.

\mathfrak{L} ist die Lie-Ableitung bezüglich ${}_0\tilde{\lambda}^v$ (siehe [14]). Wegen (4.3, 6) ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(x^1 + x^2) {}_1\lambda_\mu &= \mathfrak{L}|g|^{\frac{1}{2}} (x^1 + x^2)^4 \delta_{\nu\mu\kappa\tau} {}_0\tilde{\lambda}^\nu {}_2\tilde{\lambda}^\kappa {}_3\tilde{\lambda}^\tau \\ &= [\mathfrak{L}|g|^{\frac{1}{2}} (x^1 + x^2)^4] \delta_{\nu\mu\kappa\tau} {}_0\tilde{\lambda}^\nu {}_2\tilde{\lambda}^\kappa {}_3\tilde{\lambda}^\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dabei wurde die Regel benutzt: „ $\hat{\mathfrak{L}}v^v = \hat{\mathfrak{L}}\delta_{\nu\mu\kappa\tau} = 0$ für alle v^v , $\hat{\mathfrak{L}}$ bezüg-

lich v^{μ} . Aus der Voraussetzung I. und II. folgt mit Berücksichtigung von (4.5) und der Tatsache, daß g eine skalare Dichte ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}|g|^{\frac{1}{2}}(x^1+x^2)^4 &= \mathfrak{L}\bar{\lambda}_{,\mu}^{\mu} = -\vartheta_{,1} + [(\vartheta^2 - f(-x^1))^{\frac{1}{2}}(f(-x^1))^{-1}]_{,0} \\ &= -\vartheta_{,1} + (\vartheta^2 - f(-x^1))^{-\frac{1}{2}}(f(-x^1))^{-1}\vartheta\vartheta_{,0} = 0. \end{aligned}$$

Damit und mit (4.7) erhält man $\mathfrak{L}(x^1+x^2)_1\lambda_{\nu} = 0$, woraus mit (4.6a, 4) $\mathfrak{L}(x^1+x^2)^2h_{\mu\nu} = 0$ folgt, d. h. es ist $\mathfrak{L}h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}$. Daraus erhält man $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, was zu zeigen war.

Nach Voraussetzung I. und II. gilt

$${}_{\circ}\lambda_{\nu} \sim \lambda_{\nu} \equiv e\delta_{\nu}^0 + c\delta_{\nu}^1 \quad (4.8)$$

mit gewissen e, c , die nur von x^1, x^0 abhängen, woraus folgt, daß $\lambda_{[\nu,\mu}\lambda_{\kappa]} = 0$ ist. λ_{ν} ist also hyperflächennormal, was daher auch für ${}_{\circ}\lambda_{\nu}$ der Fall ist wegen (4.8). Also gilt $\Omega_{\mu\nu} = 0$.

Aus den zu Beginn des Kapitels 4 gemachten Bemerkungen und aus den Sätzen 2.6, 3.1, 4.1 folgt der

Satz 4.2. *Alle Vakuumfelder ($R_{\mu\nu} = 0$), in denen sich eine Wolke von Probeteilchen expandierend ($\vartheta \neq 0$), rotations- ($\Omega_{\mu\nu} = 0$) und scherungsfrei ($\Sigma_{\mu\nu} = 0$) bewegen kann, sind in den Sätzen 2.6 und 3.1 angegeben. Die dazu gehörigen Tangentenvektoren ${}_{\circ}\lambda^{\nu}$ (${}_{\circ}\lambda^{\nu}{}_{\circ}\lambda_{\nu} \equiv -1$) an die Weltlinien der Probeteilchen sind vollständig in Satz 3.1 aufgeführt. Die ${}_{\circ}\lambda^{\nu}$ sind eindeutig bestimmt, wenn man den Expansionskalar $\frac{1}{3}\vartheta$ in der in Satz 3.1 angegebenen Weise längs einer Linie vorgibt. Außerdem gilt wegen (2.8b, 16)*

$$a_{\mu} = -h_{\mu}^{\nu}(\ln|\dot{\vartheta}|)_{,\nu} \quad \text{für } \dot{\vartheta} \neq 0. \quad (4.9)$$

Dabei ist ϑ durch Satz 3.1 bestimmt. Die von den nichtgravischen ($a_{\mu} = 0$ bedeutet: geodätische Bewegung) Kräften hervorgerufene Beschleunigung a_{μ} ist also dem räumlichen Gradienten der Expansionsgeschwindigkeit $\frac{1}{3}\dot{\vartheta}$ proportional.

Die Voraussetzung $\vartheta \neq 0$ geht dort ein, wo $\dot{\alpha}_c\dot{\alpha}^c \neq 0, \alpha \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ bewiesen wird. Wenn $\vartheta = 0$ wäre, wären diese Größen auch Null und damit auch der Killing-Vektor ξ^{ν} aus (2.49).

Wenn für ${}_{\circ}\lambda^{\nu}$ und $g_{\mu\nu}$: $\vartheta \neq 0, \Omega_{\mu\nu} = 0, \Sigma_{\mu\nu} = 0, R_{\mu\nu} = 0$ gilt, dann liegen nach Satz 4.2 die dort angegebenen statischen Vakuummetriken mit deren nichtstatischer Fortsetzung vor. Ebenfalls statisch sind nach Definition (siehe [15]) die Metriken für den Fall $\vartheta = 0, \Omega_{\mu\nu} = 0, \Sigma_{\mu\nu} = 0, R_{\mu\nu} = 0$, wenn die Kongruenz isometrisch (zur Bezeichnung: [10]) ist. Auch für nichtisometrische Kongruenzen liegen nach [1] für den Fall $\vartheta = 0, \Omega_{\mu\nu} = 0, \Sigma_{\mu\nu} = 0, R_{\mu\nu} = 0$ statische Metriken vor, und zwar class B Metriken (zur Bezeichnung: [7]). Also ergeben sich für den Fall $\Omega_{\mu\nu} = 0, \Sigma_{\mu\nu} = 0, R_{\mu\nu} = 0$ statische Metriken und deren nichtstatische Fortsetzung für den Fall $\vartheta \neq 0$.

Auf Grund dieser Bemerkungen läßt sich für den Fall $\Omega_{\mu\nu} = 0, \Sigma_{\mu\nu} = 0$ zusammenfassend folgendes sagen:

I. Bei einer Welt mit *inkohärenter Materie* ($R_{\mu\nu} \neq 0$) liegt ein Friedmann-Lemaître-Kosmos vor (siehe [8]). Das gilt auch für Feldgleichungen mit kosmologischem Glied. Die Scherung $\Sigma_{\mu\nu}$ und die Rotation $\Omega_{\mu\nu}$ sind bezüglich der Kongruenz zu definieren, die durch die Weltlinien der Materieteilchen bestimmt wird.

II. Die *Vakuummfelder* ($R_{\mu\nu} = 0$) sind *statische Petrov-Typ I und D* Metriken und deren nichtstatische Fortsetzungen für den Fall $\vartheta \neq 0$. Für diese Felder gilt die folgende Fallunterscheidung:

Ist das Feld *nichtentartet* (Petrov-Typ I), so gilt $\vartheta = 0$ und ${}_0\lambda^{\nu}{}_0\ddot{\lambda}^{\mu} = 0$, d. h. es liegen die nichtentarteten statischen Vakuummfelder vor (siehe [6]).

Die *entarteten* Felder sind die folgenden:

1. Für *isometrische* Kongruenzen sind (siehe [7]) es sämtliche entarteten statischen Vakuummetriken: class *A, B, C*.

2. Für *nichtisometrische* Kongruenzen sind es

a) für $\vartheta = 0$ die class *B* Metriken,

b) für $\vartheta \neq 0$ α) für $\dot{a}_{[c}a_{b]} = 0$ die class *A* Metriken und deren Erweiterung (siehe Satz 3.1),

β) für $\dot{a}_{[c}a_{b]} \neq 0$ die class *C* Metriken und deren Erweiterung (siehe Satz 3.1).

Damit ist eine vollständige Übersicht des Falles $\Omega_{\mu\nu} = 0$, $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, $R_{\mu\nu} = 0$ gegeben.

Herrn Professor P. JORDAN möchte ich für seine Förderung meinen Dank aussprechen. Für seine Anregungen und Hilfe danke ich Herrn Dr. M. TRÜMPER, sowie für Diskussionen den Mitgliedern des Hamburger Seminars für Allgemeine Relativitätstheorie.

Literatur

- [1] ESTABROOK, F. B., and H. D. WAHLQUIST (J. P. L.): Rigid motion in Einstein-spaces. Preprint 1965.
- [2] SYNGE, J. L.: Relativity: The General Theorie. Amsterdam: North Holland Publishing Company 1960.
- [3] JORDAN, P., J. EHLERS u. R. K. SACHS: Akad. Wiss., Mainz Abh. math.-nat. Kl. 1961 Nr. 1.
- [4] TRÜMPER, M.: Z. Physik **168**, 55—60 (1962).
- [5] — Diss., Hamburg 1961.
- [6] — J. Math. Phys. Vol. **6**, 584 (1965).
- [7] WITTEN, L. W. (Editor): Gravitation: An introduction to current res., p. 73. New York: Wiley 1962.
- [8] RAYCHAUDHURI: Phys. Rev. **98**, 1123 (1955).
- [9] ESTABROOK, F. B., and H. P. WAHLQUIST: J. Math. Phys., Vol. **5**, 1629 (1964).
- [10] EHLERS, J.: Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-nat. Kl. Nr. **11**, 798 (1961).
- [11] WITTEN, L. W. (Editor): Gravitation: An introduction to current res., p. 72. New York: Wiley 1962.
- [12] — Gravitation: An introduction to current res., p. 75. New York: Wiley 1962.
- [13] — Gravitation: An introduction to current res., p. 71. New York: Wiley 1962.
- [14] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
- [15] WITTEN, L. W. (Editor): Gravitation: An introduction to current res., p. 65. New York: Wiley 1962.