Commun. math. Phys. 2, 31—48 (1966)

C^*-Algèbres des systèmes canoniques. I

G. LOUPIAS et S. MIRACLE-SOLE

Physique Théorique, Université D'Aix-Marseille

Reçu le 15 août 1965

Abstract. The "twisted convolution" associated with the Weyl form of the canonical commutation relations for n degrees of freedom is decribed using ordinary convolution on a nilpotent central extension of additive phase space by the one-dimensional torus. Twisted convolution determines several C^*-algebras of quantum mechanical observables amongst which we study especially the algebra $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ consisting of the $\mathscr{L}_2$- functions on phase space and mapped isometrically onto the Hilbert-Schmidt-operators by the Schrödinger representation. The two last sections of the paper deal with "phase space quantum mechanics" from the point of view of twisted convolution: the WIGNER-MOYAL formalism and the entire function formalism of BARGMANN and SEGAL.

Introduction

Dans un article récent [1], D. KASTLER décrit diverses C^*-algèbres associées à un champ de bosons libres. Il les construit comme l'analogue des algèbres de mesure sur un groupe grâce au formalisme de la «convolution gauche».

Dans la section I nous montrons qu'il est possible d'obtenir les principaux résultats de [1] dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté à l'aide d'une technique différente consistant à interpréter la représentation projective du groupe abélien R^n qu'est en fait la forme de WEYL des relations de commutation ([1], équation 3), comme une représentation d'une extension centrale de ce groupe par le cercle [2].

Dans la section II, nous étudions la représentation régulière gauche des relations de commutation. On y trouvera une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt et une nouvelle démonstration du fait que la représentation de Schrödinger applique $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ sur les opérateurs compacts.

Dans la section III, nous montrons que les résultats de WIGNER [3], MOYAL [3a] et BAKER [4] découlent facilement et naturellement du formalisme de la convolution gauche.

La section IV est indépendante des précédentes. On y décrit l'espace de la représentation de Schrödinger comme un espace de fonctions analytiques, rejoignant ainsi le formalisme proposé par BARGMANN [5] et SEGAL [5a].

Sauf mention du contraire, les notations sont les mêmes que dans [1].

Section I

Les algèbres $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ et $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ en tant qu'idéaux des algèbres $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ et $\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})$.

$(\mathfrak{E}, \sigma)$ désignant un espace symplectique de dimension finie et $\mathfrak{T}$ le tore à une dimension, soit

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{E} = \{(\alpha, \psi), \alpha \in \mathfrak{T}, \psi \in \mathfrak{E}\} \tag{1}$$

l'ensemble produit. Muni de la loi de composition:

$$(\alpha, \psi)\,(\beta, \varphi) = (\alpha + \beta + \sigma(\psi, \varphi), \psi + \varphi); \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{T}, \psi, \varphi \in \mathfrak{E}; \tag{2}$$

$\mathfrak{W}$ est un groupe, d'élément neutre $(0, 0)$, de centre isomorphe à $\mathfrak{T}$. L'homomorphisme de $\mathfrak{W}$ sur $\mathfrak{E}$:

$$(\alpha, \psi) \in \mathfrak{W} \to \psi \in \mathfrak{E} \tag{3}$$

montre alors que $\mathfrak{W}$ est l'extension centrale de $\mathfrak{E}$ par $\mathfrak{T}$ définie par le système facteur $\sigma(\psi, \varphi)$ [6]. Equipé de la topologie produit des topologies usuelles sur $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{W}$ devient un groupe topologique localement compact séparé sur lequel la mesure $d(\alpha, \psi) = d\alpha \cdot d\psi$, où $d\alpha$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{T}$ (normalisée à 1) et $d\psi$ la mesure symplectique sur $(\mathfrak{E},\sigma)$ [1], est une mesure invariante à gauche et à droite: $\mathfrak{W}$ est unimodulaire.

$\mathfrak{W}$ est donc un groupe de Lie, réel, connexe, et en outre nilpotent [7] car la suite de ses sous-groupes centraux:

$$C^0(\mathfrak{W}) = (0, 0);$$

$$C^{n+1}(\mathfrak{W}) = \{(\alpha, \psi) \in \mathfrak{W} : (\alpha, \psi)\,(\beta, \varphi)\,(\alpha, \psi)^{-1}\,(\beta, \varphi)^{-1} \in C^n(\mathfrak{W}), (\beta, \varphi) \in \mathfrak{W}\}$$

est telle que $C^1(\mathfrak{W}) = \mathfrak{T}$ et $C^2(\mathfrak{W}) = \mathfrak{W}$.

Sa C^*-algèbre $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})}$ ([8], § 13.9) est donc liminaire ([8]. § 13, 11.12), [9].

Si nous posons

$$U\{\alpha, \psi\} = e^{-i\alpha}\, U\{\psi\} \tag{4}$$

nous obtenons une représentation unitaire fidèle de $\mathfrak{W}$. Plus généralement nous pouvons énoncer:

Théorème 1. *Les représentations unitaires π de $\mathfrak{W}$ sont de la forme*

$$\pi(\alpha, \psi) = \bigoplus_n e^{in\alpha}\, \pi_n(0, \psi), \quad n \text{ entier } > 0, < 0 \text{ ou } = 0\,. \tag{5}$$

Seule la composante $n = -1$ constitue une représentation des relations de commutation.

La restriction de π à $\mathfrak{T}$ compact abélien est réductible à une somme directe de caractères $e^{in\alpha}$ d'où une décomposition de l'espace $\mathscr{H}$ de re-

[1] Nous notons simplement par $d\psi$ la mesure symplectique de $(\mathfrak{E}, \sigma)$ (au lieu de $dm_\sigma(\psi)$ comme dans [1]).

présentation selon

$$\mathscr{H} = \underset{n}{\oplus} \mathscr{H}_n \quad \text{avec} \quad \pi(\alpha, 0) = \underset{n}{\oplus} e^{in\alpha} 1_n .$$

Chaque sous-espace $\mathscr{H}_n$ est alors stable pour π car si $\xi_n \in \mathscr{H}_n$ et $\eta = \pi(\beta, \varphi) \xi_n$, on a $\pi(\alpha, 0) \eta = e^{in\alpha} \eta$.

A $\mathfrak{W}$ on sait associer les algèbres de convolution $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ (*-algèbre de Banach des mesures bornées sur $\mathfrak{W}$) et $\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})$ (*-algèbre de Banach des fonctions intégrables sur $\mathfrak{W}$, que l'on peut considérer comme plongée dans $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ en tant qu'idéal des mesures absolument continues ([10], Chapitre V, Théorème (19.18)). Pour les mêmes raisons que dans [1] nous devons préférer $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ à $\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})$.

Le paramètre α étant dépourvu de signification mécanique, seules nous intéressent les représentations unitaires d'indice $n = -1$ de $\mathfrak{W}$, lesquelles déterminent des *-représentations continues de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ selon

$$\pi(\mu) = \int \pi(\alpha, \psi)\, d\mu(\alpha, \psi) = \int e^{in\alpha} \pi_n(0, \psi)\, d\mu(\alpha, \psi) , \tag{6}$$

représentations qui ne sauraient être fidèles car toute mesure de la forme $\sigma \otimes \mu$ (au sens usuel du produit des mesures sur $\mathfrak{T} \times \mathfrak{E}$) où le coefficient de Fourier d'ordre $-n$ de σ:

$$\hat{\sigma}_{-n} = \int e^{+in\alpha}\, d\sigma(\alpha) \quad ([10], \text{chapitre VI}, (23.9)) \tag{7}$$

est égal à zéro est annulée par π.

Ceci nous conduit à considérer l'ensemble $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ défini par

$$\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma) = \{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu,\ \mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)\} . \tag{8}$$

Théorème 2. *$\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ est un *-idéal bilatère fermé de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ qui admet comme idéal complémentaire $\mathscr{J}$ l'ensemble des mesures bornées sur $\mathfrak{W}$ de coefficient de Fourier $n = +1$ suivant $\mathfrak{T}$ égal à zéro:*

$$\hat{\mu}_1 = \int e^{-i\alpha\psi}\, d\mu(\alpha, \psi) = 0 . \tag{9}$$

$\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ avec sa structure de sous--algèbre de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$ est isomorphe à l'*-algèbre des mesures bornées sur $\mathfrak{E}$ munie du produit de convolution gauche introduite dans* [1]. *Elle contient évidemment à titre d'idéal $e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mathscr{L}_1(\mathfrak{E})$, lui-même isomorphe à $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$.*

Grâce à ce transport de structure, les théorèmes 0 *à* 5 *de* [1] *découlent alors des théorèmes classiques correspondants sur $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$* ([10], chapitre V).

Toute mesure du type $\sigma \otimes \mu$ peut être écrite:

$$\sigma \otimes \mu = \hat{\sigma}_1 e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu + \nu \otimes \mu \tag{10}$$

où $\nu = \sigma - \hat{\sigma}_1 e^{i\alpha}\, d\alpha$ et $\hat{\nu}_1 = 0$, et l'ensemble de ces mesures est dense dans $\mathscr{M}_1(\mathfrak{W})$. On a donc la décomposition en somme directe:

$$\mathscr{M}_1(\mathfrak{W}) = \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma) \otimes \mathscr{J}$$

selon deux idéaux fermés car le projecteur sur $\mathscr{J}$ (par exemple) est continu. Les mesures $\sigma \otimes \mu$ étant complètement définies par leurs valeurs sur la famille de fonctions dense dans $\mathscr{C}_0(\mathfrak{W})$: $\varphi \otimes f$, $\varphi \in \mathscr{C}_0(\mathfrak{T})$, $f \in \mathscr{C}_0(\mathfrak{E})$, un calcul facile donne les formules suivantes:

$$\{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu\} * \{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \lambda\} = e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \nu,\ \mu,\ \lambda \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E})\,, \tag{11}$$

où $\quad \nu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}) \quad$ avec $\quad \nu(f) = \int e^{-i\sigma(\psi,\varphi)} f(\psi + \varphi)\, d\mu(\psi)\, d\lambda(\varphi)$

$$\{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu\}^* = e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu^*\,, \tag{12}$$

$$\{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu\} * \lambda(\beta, \varphi) = e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \nu,\ \lambda \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{W})\,, \tag{13}$$

où

$$\nu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}) \quad \text{avec} \quad \nu(f) = \int e^{-i\beta}\, e^{-i\sigma(\psi,\varphi)} f(\psi + \varphi)\, d\mu(\psi)\, d\lambda(\beta, \varphi)\,,$$

avec une formule analogue pour la multiplication à gauche. On reconnait dans (11) la convolution gauche sur $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E})$.

En outre seules les représentations fidèles d'indice $n = -1$ de $\mathfrak{W}$ détermineront selon (6) une représentation fidèle et non triviale de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ et de $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$.

$(\mathfrak{E}, \sigma)$ étant maintenant équipé d'une structure préhilbertienne σ-permise ([1], § 3), la fonction continue de carré sommable sur $\mathfrak{W}$:

$$\Omega^-(\alpha, \psi) = \frac{1}{a}\, e^{-i\alpha}\, e^{-\frac{1}{2} s(\psi,\psi)}\,, \quad a = \int e^{-s(\psi,\psi)}\, d\psi \tag{14}$$

est une fonction de type positif car

$$\Omega^{-*} * \Omega^- = \Omega^- \quad ([8], \S\, 13\text{-}4\text{-}11)\,. \tag{15}$$

Elle définit une représentation unitaire π_{Ω^-} de $\mathfrak{W}$, de vecteur cyclique ξ, de la forme

$$\pi_{\Omega^-}(\alpha, \psi) = e^{-i\alpha}\, \pi_{\Omega^-}(0, \psi) \tag{16}$$

et donc une représentation non triviale de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$, de vecteur cyclique ξ car

$$\{\pi_{\Omega^-}(e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mu)\, \xi\} \supset \{\pi_{\Omega^-}(e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \delta_\psi)\, \xi\} \equiv \{\pi_{\Omega^-}(0, \psi)\, \xi\} \tag{17}$$

telle que

$$(\xi \mid \pi_{\Omega^-}(e^{i\alpha} d\alpha \otimes \mu)\, \xi) = \frac{1}{a}\, \mu\left(e^{-\frac{1}{2} s(\psi,\psi)}\right) = \frac{1}{a}\, \omega(\mu) \tag{18}$$

([1], formule (50))

donc unitairement équivalente à la représentation de Schrödinger π_ω ([1], § 3). Le théorème d'unicité ([1], théorème 15a) se démontre comme dans [1] et permet d'affirmer que toute représentation unitaire irréducible de $\mathfrak{W}$ est du type:

$$e^{in\alpha}\, \pi_{\Omega^-}(0, \psi)\,. \tag{19}$$

La norme minimale régulière sur $\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})$ coïncide donc sur l'idéal $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma) = e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mathscr{L}_1(\mathfrak{E})$ avec la norme de Schrödinger ([1], formule (69)) et la C^*-algèbre $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ est isomorphe à l'idéal $\overline{e^{i\alpha}\, d\alpha \otimes \mathscr{L}_1(\mathfrak{E})}$ de $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{W})}$. Elle est par conséquent liminaire et l'on retrouve ainsi ([1], théorème 19).

Section II

Représentation régulière gauche et opérateurs de Hilbert-Schmidt

Ce qui suit nous a été inspiré par la lecture du paragraphe 14 de [8]. En adaptant la démonstration usuelle à la présence du facteur $e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}$ on prouve aisément que $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)$ possède une unité approchée, et donc que la représentation des relations de commutation associée grâce à ([1], théorème 7) à la représentation régulière gauche (essentielle) π_2 ([1], théorème 5) est la représentation:

$$\psi\in(\mathfrak{E},\sigma)\to\pi_2\{\psi\}: f\in\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)\to\pi_2\{\psi\}f=\delta_\psi\times f\in\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)\,^2\,.$$

Sur le sous-espace $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$ de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ des fonctions continues à support compact l'inégalité de Schwartz fournit

$$\|f\times g\|_\infty\leqq\|f\|_2\,\|g\|_2,\quad f,g\in\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma) \tag{20}$$

ce qui permet, par prolongement continu, de définir le produit de convolution gauche de deux fonctions $f,g\in\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ comme la fonction de $\mathscr{C}_0(\mathfrak{E})$:

$$(f\times g)(\psi)=\int e^{-i\sigma(\xi,\psi)}f(\xi)\,g(\psi-\xi)\,d\xi\,. \tag{21}$$

Lemme. *Pour* $h\in\mathscr{L}_2(E,\sigma)$, $\|h\|_2^2=\{h^*\times h\}(0)=\{\bar h\times\check h\}(0)$ *et pour* $f\in\mathfrak{J}_\Omega\subset\mathscr{L}_2(E,\sigma)$ ([1], formule (58)), $\omega(f^*\times f)=a\{f^*\times f\}(0)=\|f\|^2$. La première égalité est évidente. D'autre part:

$$\omega(f^*\times f)=\{f^*\times f\}(a\Omega)=a\{f^*\times f\times\Omega\}(0)=a\{f^*\times f\}(0)$$

et

$$\|f\|^2=\|f^*\times f\|=\|\Omega\times f^*\times f\times\Omega\|=\omega(f^*\times f)\,\|\Omega\|=\omega(f^*\times f)\,.$$

L'espace hilbertien $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ complété de $\mathfrak{J}_\Omega$ est donc identique à l'idéal $\overline{\mathfrak{J}_\Omega}$ ([1], théorème 18). C'est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ sur lequel le lemme est encore vrai par prolongement continu.

Théorème 3. $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ *est une *-algèbre de Banach pour la convolution gauche et la représentation* π_ω *définit un isomorphisme d'*-algèbre de Banach de* $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ *sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur* $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ *(On a donc* $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)\subset\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)}$, (21) *coïncidant sur* $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ *avec la convolution gauche définie dans* [1] *sur* $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)}$*). Dans cet isomorphisme, les*

$$\pi_\omega(f\times g^*)=|f)\,(g|\quad f,g\in\overline{\mathfrak{J}_\Omega} \tag{22}$$

sont des opérateurs de rang fini, et en particulier

$$\pi_\omega(f)=\pi_\omega(f\times\Omega)=|f)\,(\Omega|\,,\quad f\in\mathfrak{J}_\Omega\,. \tag{23}$$

[2] Nous utiliserons la notation $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ au lieu de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},dm_\sigma)$ comme dans [1], $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ étant, de même que $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)$, une algèbre pour la convolution gauche (voir théorème suivant).

Tout projecteur orthogonal de rang 1 sur $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ est de la forme $\pi_\omega(\varphi \times \varphi^*)$ où $\varphi \in \overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ avec $\omega(\varphi^* \times \varphi) = 1$ car si $\chi \in \mathscr{I}_\Omega$ il vient

$$\pi_\omega(\varphi \times \varphi^*)\chi = \varphi \times \Omega \times \varphi^* \times \chi \times \Omega = \omega(\varphi^* \times \chi)\varphi = (\varphi|\chi)\varphi$$

ceci s'étendant à $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ par continuité. En outre

$$\mathrm{Tr}[\pi_\omega(\varphi \times \varphi^*)] = 1 = \omega(\varphi^* \times \varphi) = a\{\varphi^* \times \varphi\}(0) = a\|\varphi\|_2^2 .$$

π_ω est donc une isométrie de la fermeture linéaire de $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega} \times \overline{\mathfrak{Z}_\Omega^*}$ munie de la norme $\sqrt{a}\|\ \|_2$ sur les opérateurs de rang fini sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ munis de la norme de Hilbert-Schmidt [3]. Le sous-espace fermé de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ engendré par $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega} \times \overline{\mathfrak{Z}_\Omega^*}$ est en fait tout $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ car il contient toutes les translatées

$$\Omega\{\xi - 2\psi\} = \{\delta_\psi \times \Omega \times (\delta_{-\psi} \times \Omega)^*\}(\xi), \quad \psi \in (\mathfrak{E}, \sigma)$$

de Ω, fonction dont la transformée de Fourier ne s'annule nulle part ([11], Chapitre VII, théorème (7.2.9)). Par prolongement, π_ω définit donc une structure d'*-algèbre de Banach sur $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ pour le produit de convolution gauche, et détermine un isomorphisme de cette dernière sur l'*-algèbre de Banach des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ [4].

Cette propriété n'a pas son équivalent avec la convolution usuelle. Il est donc intéressant de la présenter comme une conséquence du théorème d'unicité ([1], théorème 15a). En vertu de ce dernier, π_2 est factorielle de type I et $U(A)$, algèbre de Von Neumann associée à l'algèbre hilbertienne achevée A des éléments bornés de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ est un facteur de type I ([8], § 13.10). (Nous rappelons en appendice les principaux résultats relatifs aux algèbres hilbertiennes). L'unicité de la trace sur $U(A)$ prouve alors que A est isomorphe à l'algèbre hilbertienne complète des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur un certain espace de Hilbert, donc que $A \equiv \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ et par conséquent que:

$$\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \times \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \cap \mathscr{C}_0(\mathfrak{E}, \sigma).$$

$U(A)$ étant l'algèbre de Von Neumann fermeture faible de $\pi_2(\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma))$ et π_2 étant un multiple de la représentation de Schrödinger π_ω, $U(A)$ est isomorphe à la fermeture faible de $\pi_\omega(\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma))$ ([12], Prop. 1, p. 18) qui n'est autre que l'ensemble des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$: nous désignerons cette dernière par $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ et l'appelerons à la suite de SEGAL l'algèbre de Weyl sur $(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Théorème 4. *Toute fonction continue de type positif φ sur $(\mathfrak{E}, \sigma)$ ([1], (37)) est de carré intégrable.*

[3] Nous utilisons le fait que tout opérateur de rang fini peut, par polarisation, s'écrire sous forme d'une somme de projecteurs.

[4] (23) révèle a postériori la raison pour laquelle les normes $\|f\|$, $\sqrt{a}\|f\|_2$, $(f|f)^{\frac{1}{2}}$ coïncident sur $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ (c'est même le cas sur tous les opérateurs de rang 1).

La représentation π_φ associée à φ est contenue dans π_2 (car $\mathscr{H}_{\pi_\varphi}$ est séparable puisque $\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ l'est [8; 2.3.3]). Or, pour tout $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ on a $(f \mid \pi_2\{\psi\} f) = \{\check{f} \times \bar{f}\}(\psi)$ et $\check{f} \times \bar{f} \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Proposition. *Les coefficients de* π_ω:

$$\psi \in (\mathfrak{E}, \sigma) \to \varpi_{\xi,\eta}(\psi) = (\eta \mid \pi_\omega\{\psi\}\xi) = a\{\check{\xi} \times \bar{\eta}\}(\psi);\ \xi, \eta \in \mathscr{H}_{\pi_\omega} \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \quad (24)$$

vérifient

$$\int \overline{\varpi_{\xi',\eta'}(\psi)}\, \varpi_{\xi,\eta}(\psi)\, d\psi = a(\xi' \mid \xi)(\eta \mid \eta') \quad (25)$$

et l'ensemble des $\check{\varpi}_{\xi,\eta}$ *engendre* $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$.

(25) peut se démontrer en adaptant ([8], 14.3.3.]) mais découle aussi du lemme prédécent:

$$\begin{aligned} a^2 \int \overline{\{\check{\xi}' \times \bar{\eta}'\}(\psi)}\, \{\check{\xi} \times \bar{\eta}\}(\psi)\, d\psi &= a^2\{\check{\eta}' \times \bar{\xi}' \times \check{\xi} \times \bar{\eta}\}(0) \\ &= a^2\{\Omega \times \bar{\eta} \times \check{\eta}' \times \Omega \times \Omega \times \bar{\xi}' \times \check{\xi} \times \Omega\}(0) \\ &= a\, \omega(\bar{\eta} \times \check{\eta}')\, \omega(\bar{\xi}' \times \check{\xi}) = a(\eta \mid \eta')(\xi' \mid \xi)\,. \end{aligned}$$

La dernière affirmation a déjà été prouvée théorème 3, et provient aussi de ce que l'ensemble des $\xi \times \eta^*$ est stable pour les représentations régulières gauche et droite, ainsi que le sous-espace fermé $K \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ qu'il engendre. Le projecteur P_K appartient donc au centre du facteur $U(\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ d'où $P_K = I$.

La correspondance

$$\xi \otimes \eta \to \sqrt{\frac{1}{a}}\, \check{\varpi}_{\xi,\eta} \quad (26)$$

détermine grâce à (25) un isomorphisme d'espace de Hilbert unique Φ de $\mathscr{H}_{\pi_\omega} \otimes \overline{\mathscr{H}_{\pi_\omega}}$ (identique à l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$) sur $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ tel que [5]

$$\Phi(u^*) = \{\Phi(u)\}^*;\ \Phi(u \cdot v) = \sqrt{\frac{1}{a}}\, \Phi(u) \times \Phi(v);\ u, v \in \mathscr{H}_{\pi_\omega} \otimes \overline{\mathscr{H}_{\pi_\omega}}\,. \quad (27)$$

Si pour tout $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ nous désignons par $\pi_\omega(f)$ la restriction à $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ de $U_f \in U(\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ il en résulte grâce au lemme ([8], § 14.4.1) que l'application

$$f \to \pi_\omega(f) \quad (28)$$

est un isomorphisme de l'algèbre $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ sur l'algèbre des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ et que

$$(g \mid f)_2 = \{g^* \times f\}(0) = \frac{1}{a}\operatorname{Tr}[\pi_\omega(g^*)\, \pi_\omega(f)]\,. \quad (29)$$

[5] En comparant avec la démonstration du théorème 3, on voit que $\Phi = \sqrt{a}\,\pi_\omega^{-1}$, et que l'on en fournit ainsi une nouvelle démonstration.

Le théorème ([1], théorème 19) est alors immédiat: $\pi_\omega(\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)})$ contient les opérateurs compacts d'après ([8], § 4.1.10) et l'inclusion inverse provient de la densité de $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$ dans $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma)}$.

Théorème 5. *Soit f et $f' \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$, $g = f' \times f$ et $g^\theta = \delta_{-\theta} \times g \times \delta_\theta$ pour tout $\theta \in (\mathfrak{E},\sigma)$. $\pi_\omega(g)$ est un opérateur à trace (et inversement tout opérateur à trace est de ce type) et, pour tout $\xi \in \mathscr{H}_{\pi_\omega}$ avec $\|\xi\|^2 = 1$:*

$$a \operatorname{Tr} \pi_\omega(g) = \int (\xi \mid \pi_\omega(g^\theta)\xi)\, d\theta\,. \tag{30}$$

Si donc en particulier $\xi = \Omega$, il vient:

$$a \operatorname{Tr} \pi_\omega(g) = \int ({}^\theta\Omega \mid \pi_\omega(g)\, {}^\theta\Omega)\, d\theta \quad \text{([1], formule (64))}\,. \tag{31}$$

En effet $(\xi \mid g^\theta \times \xi) = a \int e^{-2i\sigma(\varphi,\theta)} g(\varphi) \{\check{\xi} \times \bar{\xi}\}(\varphi)\, d\varphi$ et

$$g \cdot \{\check{\xi} \times \bar{\xi}\} \in \mathscr{C}_0(\mathfrak{E}) \cap \mathscr{L}_1(\mathfrak{E},\sigma) \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)\,.$$

La formule de réciprocité de Fourier est donc valide et

$$\int (\xi \mid \pi_\omega(g^\theta)\xi)\, d\theta = \{\pi\}^{\dim \mathfrak{E}} a g(0) \{\check{\xi} \times \bar{\xi}\}(0) = a^2 g(0) = a \operatorname{Tr} \pi_\omega(g)\,.$$

Appendice. Algèbre hilbertienne associée à la représentation régulière gauche des relations de commutation

L'*-algèbre $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$ des fonctions continues à support compact équipée du produit scalaire

$$(g \mid f) = \int \bar{g}(\psi) f(\psi)\, d\psi; \quad f, g \in \mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$$

jouit de manière évidente des 4 propriétés:

i) $(g \mid f) = (f^* \mid g^*)$,

ii) $(g \mid h \times f) = (h^* \times g \mid f)$, $h \in \mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$,

iii) Les applications de $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$:

$$f \to h \times f, \quad f \to f \times h$$

sont continues.

iv) L'ensemble des $f \times g$ est dense dans $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$.

C'est donc une algèbre hilbertienne [6].

Les applications définies en (iii) se prolongent en des opérateurs U_h et V_h sur $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ dont l'ensemble forme une *-algèbre d'opérateurs. On note $U(\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma))$ et $V(\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma))$ les algèbres de Von Neumann qu'ils engendrent et on montre que $U(\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)) = V(\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma))'$. On désigne par A l'ensemble des $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ tels que les applications

$$g \to f \times g \quad \text{et} \quad g \to g \times f, \quad g \in \mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$$

soient continues (les f sont dit éléments de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ bornés relativement à $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma)$). On a $\mathscr{K}(\mathfrak{E},\sigma) \subset A \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ et le produit $\times$ fait de A

[6] On trouvera les théorèmes généraux et leurs démonstrations dans [12] et [8, Appendice A].

une algèbre hilbertienne achevée [7]. Enfin $U(A)$ est identique à l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche des relations de commutation car $U(A) = U(\mathscr{K}(\mathfrak{E}, \sigma))$.

La forme linéaire sur $U(A)^+$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(S) = (a \mid a) \quad \text{s'il existe } a \in A \text{ tel que } S^{\frac{1}{2}} = U_a \\ &\varphi(S) = +\infty \quad \text{dans le cas contraire} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

est une trace fidèle, semi-finie, normale sur $U(A)$ par rapport à laquelle les U_f, $f \in A$, forment l'idéal n_φ des $T \in U(A)$ tels que $\varphi(T^* T) < +\infty$, isomorphe à A. Inversement étant donnée algèbre de Von Neumann et une trace normale, fidèle, semi-finie φ, l'idéal n_φ est une algèbre hilbertienne achevée.

Si $U(A)$ est un facteur de type I, il est isomorphe à l'algèbre des opérateurs bornés sur un certain espace de Hilbert $\mathscr{K}$ et A est isomorphe à l'algèbre hilbertienne complète des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{K}$. Inversement si A est une algèbre hilbertienne complète et si $U(A)$ est un facteur, c'est un facteur de type I et A est isomorphe à l'algèbre hilbertienne des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur un certain espace de Hilbert.

Section III

Interprétation statistique

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ des éléments de $\overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ qui sont antiimages des opérateurs à trace par la représentation de Schrödinger π_ω. Tout opérateur à trace étant un produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, les éléments de $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sont de la forme $f \times g^*$ avec $f, g \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$. Les opérateurs à trace positifs, de la forme $f \times f^*$, $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$, représentent des matrices densités, la valeur moyenne de l'observable $\mu \in \overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ dans l'état représenté par $f \times f^*$ étant donnée grâce à (29) par

$$\operatorname{Tr}\{\pi_\omega(\mu)\, \pi_\omega(f \times f^*)\} = a\{\mu \times f \times f^*\}(0) = a\, \mu(\check{f} \times \bar{f})\,. \tag{33}$$

A noter que $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ est une $*$-algèbre de Banach pour le produit $\times$, l'adjonction $*$ (ou, ce qui revient au même, le produit des opérateurs et le passage à l'adjoint dans la représentation de Schrödinger) et pour la norme de la trace

$$\|f \times g^*\|_{\mathscr{T}} = \operatorname{Tr} |\pi_\omega(f \times g^*)| \tag{34}$$

où $|\pi_\omega(f \times g^*)|$ désigne la valeur absolue de l'opérateur $\pi_\omega(f \times g^*)$, laquelle est égale pour une matrice densité à la norme de l'état correspondant ([15], p. 288). On obtiendra donc des matrices densités normées $f \times f^*$ en prenant f tel que $\omega(f \times f^*) = 1$.

[7] Voir note page précédente.

Le formalisme de WIGNER-MOYAL consiste à travailler avec les transformées de Fourier symplectiques des observables $\mu \in \overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ et des états $f \times f^*$:

Définitions: *Nous appelons transformée de Fourier symplectique d'échelle k de $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ la fonction de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$:*

$$\{\mathscr{F}_k f\}(\eta) = \int e^{ik\sigma(\eta,\xi)} f(\xi)\, d\xi\,, \quad k \in R\,. \tag{35}$$

On notera $\mathscr{F}_k$ l'application biunivoque de $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ sur $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ qu'elle définit.

$\overline{\overline{\mathscr{F}}}_k = \left(\frac{|k|}{2\pi}\right)^{\dim \mathfrak{E}} \mathscr{F}_k$ est la transformation inverse de $\mathscr{F}_k$ et on peut écrire la formule de Parseval qui assure que $\mathscr{F}_{\pm 2\pi}$ est une isométrie.

(35) jouit des propriétés suivantes:

$$\mathscr{F}_k(f^*) = \overline{\mathscr{F}_k f} \tag{36}$$

$$(\mathscr{F}_k f)^{\vee} = \mathscr{F}_k \check{f} = \mathscr{F}_{-k} f \tag{37}$$

$$\{\mathscr{F}_k(f \times g)\}(\eta) = \{\mathscr{F}_1(f \times g)\}(k\eta) = \{\mathscr{F}_1 f \times \check{g}\}(k\eta) = \{f \times \mathscr{F}_1 g\}(k\eta) \tag{38}$$

$$\mathscr{F}_1 e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\xi)} = a(\sqrt{2})^{\dim \mathfrak{E}}\, e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\xi)} \tag{39}$$

$$\mathscr{F}_k\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^j}\right) = -ik\sigma(\eta, e_j)\, \mathscr{F}_k f \quad f, \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \tag{40}$$

$$\mathscr{F}_k(ik\sigma(e_j, \xi) f) = \frac{\partial}{\partial \eta^j} \mathscr{F}_k f \quad f, \sigma(e_j, \xi) f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma) \tag{41}$$

où (e_j) désigne une base quelconque de $(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Puisque $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ est appliquée par π_ω sur la C^*-algèbre des opérateurs compacts, il est bien connu que $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ s'identifie à son dual fort. Son bidual fort (c'est-à-dire le dual fort de $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$) est alors isomorphe à l'algèbre de Von Neumann enveloppante de $\overline{\mathscr{L}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ (avec sa topologie de C^*-algèbre) ([8] § 12), laquelle n'est autre que le facteur $U(\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma))$ défini dans la section II. Ce dernier contient évidemment $\overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ puisqu'il s'identifie à l'ensemble $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ des opérateurs bornés sur $\mathfrak{F}_\Omega$ dans la représentation de Schrödinger.

Proposition: $\mathscr{F}_k$ *et* $\overline{\overline{\mathscr{F}}}_k$ *sont deux applications linéaires biunivoques, inverses l'une de l'autre et faiblement continues de $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sur elle-même.*

Puisque $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma) \subset \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$, $\mathscr{F}_k$ et $\overline{\overline{\mathscr{F}}}_k$ sont évidemment linéaires, biunivoques et inverses l'une de l'autre. Elles appliquent alors $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sur elle-même grâce à (38). Montrons qu'elles sont continues, ce qui entrainera la continuité faible ([14], § 8). En vertu du théorème du graphe fermé ([14], § 2, 6), il suffit de voir que si les suites

$$\{f_n \in \mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)\} \quad \text{et} \quad \{\mathscr{F}_k f_n \in \mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)\}$$

sont telles que

$$\|f_n - f\|_{\mathscr{T}} \xrightarrow[n=\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\mathscr{F}_k f_n - g\|_{\mathscr{T}} \xrightarrow[n=\infty]{} 0 \tag{42}$$

où f et g sont dans $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$, alors $g = \mathscr{F}_k f$.

Puisque la norme de Hilbert-Schmidt est inférieure à celle d'opérateur à trace, il résulte du théorème 3 que (42) implique

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n=\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\mathscr{F}_k f_n - g\|_2 \xrightarrow[n=\infty]{} 0$$

d'où $g = \mathscr{F}_k f$ grâce à la continuité de $\mathscr{F}_k$ sur $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Corollaire: *$\mathscr{F}_k$ et $\overline{\mathscr{F}}_k$ se transposent en deux applications linéaires, biunivoques, inverses l'une de l'autre et bicontinues de $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ sur $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ munie de la topologie de la norme.*

C'est là un résultat classique de la théorie de la transposition ([14] § 8) quand on sait que le dual fort de $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$ est $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ munie de la topologie de la norme ([8]. § 12).

Nous savons donc définir $\mathscr{F}_k^t \mu$ pour tout $\mu \in \overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$ comme l'élément de $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ tel que

$$\{\mathscr{F}_k^t \mu\}(g) = \mu\{\overline{\mathscr{F}}_k g\}, \quad g \in \mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma). \tag{43}$$

Sur $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ cette définition coincïde avec

$$\{\overline{\mathscr{F}}_k^t \mu\}(\eta) = \int e^{-i\, k\sigma(\eta, \xi)}\, d\mu(\xi) \tag{44}$$

et $\overline{\mathscr{F}}_k^t \mu$ est dans ce cas une fonction continue bornée; $\overline{\mathscr{F}}_k^t$ est alors identique à $\mathscr{F}_{-k}$ telle qu'on sait la définir d'emblée de $\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ dans elle-même, où elle vérifie encore (36), (37), (38) [8].

Nous sommes maintenant techniquement en mesure de décrire en termes de convolution gauche le formalisme de Wigner-Moyal.

Si nous posons

$$\left.\begin{aligned} P &= a\, \mathscr{F}_{-\sqrt{2}}(f \times f^*) = a\, \mathscr{F}_{\sqrt{2}}(\check{f} \times \bar{f}) \in \mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma) \\ \varrho &= \overline{\mathscr{F}}^t_{+\sqrt{2}}\, \mu \in \mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

où $f \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)$ et $\mu \in \overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$, (33) s'écrit encore:

$$\mathrm{Tr}\{\pi_\omega(\mu)\, \pi_\omega(f \times f^*)\} = \varrho(P) \left(= \int P(\eta)\, \varrho(\eta)\, d\eta \quad \text{si} \quad \mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)\right) \tag{46}$$

P est d'après (36) une fonction réelle et, d'après la formule de réciprocité, il vient

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^{\dim \mathfrak{E}} \int P(\eta)\, d\eta = a(f \times f^*)(0) = \omega(f \times f^*) = 1\,. \tag{47}$$

[8] Dans cet article nous définissons la transformée de Fourier sur $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ par transposition à partir de $\mathscr{T}(\mathfrak{E}, \sigma)$. Ce procédé est l'analogue de celui employé classiquement en théorie des distributions (voir [14]). Nous montrerons dans un article à venir qu'on peut interpréter les éléments de $\mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$ (et donc ceux de $\overline{\mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)}$) comme des distributions sur l'espace $\mathfrak{E}$ appartenant à l'ensemble $\mathscr{D}'_{\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}, \sigma)}$ ([16] — chap. VI — p. 55), le produit des opérateurs s'interprétant comme la convolution gauche étendue aux distributions.

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^{\dim \mathfrak{E}}$ P est donc la distribution de quasiprobabilité dans l'espace de phase correspondant à l'état $f \times f^*$ telle qu'on la trouve définie dans [3], [3a] et [4].

Suivant ([13], p. 274) nous pouvons considérer que l'analogie entre

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\mu) &= \int \pi_\omega(\delta_\psi)\, d\mu(\psi) = \int e^{iA\{\psi\}}\, d\mu(\psi) \\ &= \int e^{i\sqrt{2}[\psi'^i q_i - \psi^i p_i]}\, d\mu(\psi)\end{aligned} \tag{48}$$

où $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$, $\psi = \psi^i e_i + \psi'^i f_i$, $p_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} A(e_i)$, $q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} A(f_i)$ et

$$\varrho(\eta) = \int e^{-i\sqrt{2}\,\sigma(\eta,\psi)}\, d\mu(\psi) = \int e^{-i\sqrt{2}\sum\limits_i [\psi'^i \eta^i - \psi^i \eta'^i]}\, d\mu(\psi) \tag{49}$$

où $\eta = \eta^i e_i + \eta'^i f_i$ ((e_i, f_i) désigne ici une base symplectique de $(\mathfrak{E}, \sigma)$) permet d'interpréter $\pi_\omega(\mu)$ comme l'opérateur associé à la grandeur classique ϱ. Alors (46) exprime que la valeur moyenne de l'observable μ est identique à celle de la quantité classique ϱ qu'elle représente, calculée en considérant que P est une densité de probabilité (on notera que P peut toutefois être négative).

La condition nécessaire et suffisante pour que $F = f \times f^*$ soit un état pur est qu'il existe un $\varphi \in \overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ unitaire tel que $F = \varphi \times \varphi^*$. F est alors idempotente et on a pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ une formule analogue à ([1], formule (49)):

$$F \times \mu \times F = a\mu(\check{F})F\,. \tag{50}$$

En effet:

$$\varphi = \varphi \times \Omega$$

et

$$\begin{aligned}\Omega \times \varphi^* \times \mu \times \varphi \times \Omega &= \omega(\varphi^* \times \mu \times \varphi)\Omega = a\{\mu \times \varphi \times \varphi^*\}(0) \\ &= a\mu(\check{\varphi} \times \bar{\varphi})\end{aligned}$$

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de P, nous remarquons que le produit de convolution gauche de deux fonctions peut s'écrire:

$$\{f \times g\}(\xi) = \exp i\sigma\left(\frac{\partial}{\partial_{\mathscr{F}_1 f}\xi}, \frac{\partial}{\partial_g \xi}\right)\{\mathscr{F}_1 f\}(\xi)\, g(\xi) \tag{51}$$

où

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial_f \xi} \frac{\partial}{\partial_g \xi}\right) f \cdot g = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i}\frac{\partial g}{\partial \xi'^i} - \frac{\partial f}{\partial \xi'^i}\frac{\partial g}{\partial \xi^i}\,, \quad \xi = \xi^i e_i + \xi'^i f_i \tag{52}$$

(on reconnait le crochet de Poisson de f et g).

Cette formule s'obtient formellement grâce à (41) en substituant à g son développement de Taylor dans (21), et fournit également d'après (33):

$$\{\mathscr{F}_1(f \times g)\}(\eta) = \exp i\sigma\left(\frac{\partial}{\partial_{\mathscr{F}_1 f}\eta}, \frac{\partial}{\partial_{\mathscr{F}_1 g}\eta}\right)\{\mathscr{F}_1 f\}(\eta)\,\{\mathscr{F}_1 g\}(\eta)\,. \tag{53}$$

Supposons maintenant que les $\varphi_i \in \overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ soient solution de l'équation de Schrödinger:

$$i\dot{\varphi}_i = h \times \varphi_i \tag{54}$$

où $\mathscr{F}_{-\sqrt{2}}h$ est l'hamiltonien classique et $h \in \mathscr{W}(\mathfrak{E}, \sigma)$, et où le produit $h \times \varphi_i$ est défini au sens des distributions [9]. Alors

$$\dot{F} = -ih \times F + iF \times h \tag{55}$$

et par conséquent

$$\dot{P} = 2\sin\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial_{\mathscr{F}_{-\sqrt{2}}h}\eta}, \frac{\partial}{\partial_P\eta}\right)\{\mathscr{F}_{-\sqrt{2}}\,h\}\cdot P\,. \tag{56}$$

Du point de vue dynamique, P a donc un comportement analogue à celui d'une quantité classique puisque au second ordre (et même exactement dès que $\mathscr{F}_{-\sqrt{2}}h$ est un polynôme du second degré: particule libre, oscillateur, etc ...) elle obéit à l'équation de Liouville de la mécanique classique.

Section IV

L'espace de la représentation de Schrödinger comme espace de fonctions entières

Dans $(\mathfrak{E}, \sigma)$ équipé d'une structure préhilbertienne σ-permise choisissons une base complexe orthonormale (e_j), $j = 1, \ldots, n \cdot (e_j, f_j = i e_j)$ est alors une base symplectique et soit

$$\psi = \bar{z}^j e_j = \alpha^j e_j + \beta^j f_j,\ z^j = \alpha^j - i\,\beta^j \in C \tag{57}$$

un élément de $(\mathfrak{E}, \sigma)$.

Pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ on voit immédiatement grâce à ([1], formule (11)) que

$$\{\mu \times \Omega\}\,(\psi) = \frac{1}{a}\,e^{-\frac{1}{2}h(\psi,\psi)}\,f(z^j) = \frac{1}{a}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|z^j|^2}\ f(z^j) \tag{58}$$

où f est la fonction entière de n variables complexes:

$$f(z^j) = \int e^{h(\psi,\xi)}\,e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\xi)}\,d\,\mu(\xi) = \int e^{\sum_{j=1}^{n} z^j h(e_j,\xi)}\,e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\xi)}\,d\,\mu(\xi) \tag{59}$$

d'où une correspondance linéaire biunivoque entre $\mathfrak{Z}_\Omega$ et un certain espace de fonctions entières de n variables complexes que nous appelons $\mathscr{F}'$ à la suite de Bargmann [5].

$\mathscr{F}'$ contient les polynômes car à la mesure $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathfrak{E}, \sigma)$ définie par

$$d\,\mu(\psi) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^{j2}+\beta^{j2})}\ (\alpha^j)^{m_j}\,d\alpha^j\,d\beta^j\,,\quad m_j \text{ entier}, \tag{60}$$

ce procédé fait correspondre la fonction

$$a\left(-\frac{i}{2}\right)^{\sum_{j=1}^{n} m_j}\prod_{j=1}^{n} H_{m_j}\left(\frac{i}{2}z^j\right)$$

où H_{m_j} est le polynôme de Hermite d'ordre m_j.

---

[9] Voir note page 41.

Par transport de structure, $\mathcal{F}'$ devient comme $\mathfrak{Z}_\Omega$ une algèbre et un espace préhilbertien avec les formules explicites:

$$\{f \times g\}(z^j) = \frac{1}{a} \int f(z^j - \gamma^j)\, g(\gamma^j) \prod_{j=1}^{n} e^{\gamma^j(\bar z^j - \bar\gamma^j)}\, d\xi^j\, d\eta^j, \; \gamma^j = \xi^j - i\eta^j \quad (61)$$

$$(f \mid g)_{\mathcal{F}} = \frac{1}{a} \int \overline{f(z^j)}\, g(z^j) \prod_{j=1}^{n} e^{-|z^j|^2}\, d\alpha^j\, d\beta^j = \omega(\mu^* \times \nu) = (\mu \mid \nu) \quad (62)$$

si f et g correspondent à $\mu \times \Omega$ et $\nu \times \Omega$ respectivement.

L'espace de Hilbert obtenu par complétion est identique à l'espace $\mathcal{F}$ de Bargmann des fonctions entières de n variables complexes bornées par rapport à la norme $\| \; \|_{\mathcal{F}}$ associée à (62); puisque $\mathcal{F}'$ contient les polynômes, ceci résulte du théorème suivant:

Théorème 7. *$\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert dans lequel les monômes forment un système orthonormal complet.*

Par un calcul en coordonnées polaires on vérifie immédiatement que les monômes:

$$u_{m_1,\dots,m_n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(z^j)^{m_j}}{\sqrt{m_j!}}, \quad m_j \text{ entier}, \quad (63)$$

forment un système orthonormal. Si

$$f = \sum_{m_j} \alpha_{m_1\dots m_n} (z^1)^{m_1} \dots (z^n)^{m_n} \quad (64)$$

est le développement de f selon les monômes (63), les formules

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{F}}^2 &= \sum_{m_j} (m_1)! \dots (m_n)!\, |\alpha_{m_1\dots m_n}|^2 \\ (u_{m_1\dots m_n} \mid f)_{\mathcal{F}} &= \sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_n!} \quad \alpha_{m_1\dots m_n} \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

montrent que $\mathcal{F}$ est identifiable à l'espace de Hilbert des suites multiples complexes de carré sommable $(\alpha_{m_1\dots m_n})$ et que (63) est complet.

Nous avons donc identifié les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_{\pi_\omega}$ et $\mathcal{F}$ par l'intermédiaire de l'opérateur unitaire S défini par:

$$Sf = \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |z^j|^2} f, \quad f \in \mathcal{F}, Sf \in \mathcal{H}_{\pi_\omega}.$$

On a alors le

Théorème 8. *La convergence des $Sf \in \mathcal{H}_{\pi_\omega}$ au sens de la norme hilbertienne de $\mathcal{H}_{\pi_\omega}$ entraîne leur convergence uniforme et la convergence compacte des fonctions entières f correspondantes.*

Ce résultat découle de l'inégalité (obtenue à partir de (64) grâce à l'inégalité de Schwartz)

$$|f(z^j)|^2 \leqq \left\{\sum_{m_j} \frac{|z^1|^{2m_1} \dots |z^n|^{2m_n}}{m_1! \dots m_n!}\right\} \|f\|_{\mathcal{F}}^2 = e^{\sum_{j=1}^{n} |z^j|^2} \|f\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (66\text{a})$$

$$\begin{aligned} |Sf| = \frac{1}{a} \left| e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |z^j|^2} f(z^j) \right| &= |\{\mu \times \Omega\}(\psi)| \leqq \|f\|_{\mathcal{F}} \\ &= (\mu^* \mid \mu)^{1/2} = \|Sf\|_{\mathcal{H}_{\pi_\omega}} \end{aligned} \quad (66)$$

$u = \bar{u}^j e_j$ étant fixé, la forme linéaire sur $\mathscr{F}$:

$$f \in \mathscr{F} \to f(u) \tag{67}$$

est donc bornée et peut être écrite

$$f(u) = (W_u \mid f)_{\mathscr{F}}$$

où W_u est l'élément suivant de $\mathscr{F}$:

$$W_u(z^j) = e^{\sum_{j=1}^{n} \bar{u}^j z^j} = e^{h(\psi, u)}\,. \tag{68}$$

On le vérifie sur une base des monômes de $\mathscr{F}$ ou grâce à ([1], formule (68)), les W_u étant reliés aux ${}^u\Omega$ de ([1], formule (64)) par

$${}^u\Omega = e^{-\frac{1}{2} s(u, u)}\, S\, W_u\,. \tag{69}$$

Les opérateurs sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$:

$$U\{\psi\} = \pi_\omega(\delta_\psi) \tag{70}$$

constituent une représentation unitaire des relations de commutation telle que la représentation du groupe additif des réels:

$$\lambda \to U(\lambda\psi),\ \lambda \in R,\ \psi \in (\mathfrak{E}, \sigma) \tag{71}$$

est faiblement continue. Donc $U\{\psi\} = e^{iA\{\psi\}}$ où $A\{\psi\}$ est un opérateur self-adjoint non borné sur $\mathscr{H}_{\pi_\omega}$ défini par:

$$A\{\psi\} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{i\lambda}\,[U\{\lambda\psi) - I] \tag{72}$$

et vérifiant:

$$[A\{\psi\}, A\{\psi'\}] = 2i\sigma(\psi, \psi')\,. \tag{73}$$

Son expression pour tout $\varphi \in \mathscr{H}_{\pi_\omega}$ de la forme $\varphi = Sf$, $f \in \mathscr{F}$, de son domaine de définition est donnée, grâce au théorème 8, par:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left| \{A\{\psi\}\,\varphi\}\,(\xi) - \left\{\frac{1}{i\lambda}\,[U\{\lambda\psi\} - I]\,\varphi\right\}(\xi) \right| = 0 \tag{74}$$

d'où

$$\{A\{\psi\}\,\varphi\}\,(\xi) = \sigma(\xi, \psi)\,\varphi(\xi) + i\langle d\varphi, \psi\rangle \tag{75}$$

où $\langle d\varphi, \psi\rangle$ désigne la dérivée de φ selon la direction ψ, c'est-à-dire

$$\langle d\varphi, \psi\rangle = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^j}\,\psi^j \tag{76}$$

dans la base de $\mathfrak{E}$ où les coordonnées de ξ et ψ sont les ξ^j et les ψ^j.

L'application unitaire S transforme cet opérateur (et son domaine de définition) en l'opérateur self-adjoint non borné sur $\mathscr{F}$ fermeture de

$$\begin{aligned} \{B\{\psi\}f\}\,(\xi) &= -ih(\xi, \psi)\,f(\xi) + i\langle df, \psi\rangle \\ &= -i\gamma^j h(e_j, \psi)\,f(\gamma^j) + i\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial\bar{\gamma}^j}\,z^j,\ \xi = \bar{\gamma}^j e_j. \end{aligned} \tag{77}$$

Les $V\{\psi\} = e^{iB\{\psi\}}$ constituent alors une représentation unitaire bornée $\pi_{\mathscr{F}}$ des relations de commutation sur $\mathscr{F}$ unitairement équivalente à π_ω. Si nous décomposons $(\mathfrak{E}, \sigma)$ selon

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 \oplus i\mathfrak{E}_1 \tag{78}$$

(e_j) et (f_j) étant des bases réelles de $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ respectivement, et posons

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\psi_1 + i\psi_1'],\ \psi_1,\ \psi_1' \in \mathfrak{E}_1\,, \tag{79}$$

la représentation usuelle des relations de commutation est réalisée par les opérateurs

$$U_{\mathfrak{E}_1}\{\psi\} = e^{i[P\{-\psi_1\} + Q\{\psi_1'\}]} \tag{80}$$

agissant de la façon suivante sur un $\Phi \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)$:

$$\{U_{\mathfrak{E}_1}\{\psi\}\Phi\}\,(u) = e^{i/2\, s(\psi_1,\,\psi_1')}\, e^{is(\psi_1',\, u-\psi_1)}\,\Phi(u-\psi_1) \tag{81}$$

et pour lesquels l'élément

$$\Phi_0 = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\,\xi)},\ \xi \in \mathfrak{E}_1 \tag{82}$$

est cyclique. L'opérateur infinitisimal correspondant est la fermeture de

$$\{[P\{-\psi_1\} = Q\{\psi_1'\}]\Phi\}\,(u) = i\langle d\Phi, \psi_1\rangle + s(\psi_1', u)\,\Phi(u)\,, \tag{81}$$

la représentation (80) est unitairement équivalente à π_ω (et donc aussi à $\pi_{\mathscr{F}}$) car on a, comme on le vérifie aisément,

$$\begin{aligned} a^{-3/2}&\left(e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\,\xi)}\middle|e^{i[P\{-\psi_1\}+Q\{\psi_1'\}]}\middle|\,e^{-\frac{1}{2}s(\xi,\,\xi)}\right)_{\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)} \\ &= \frac{1}{a}\,e^{-\frac{1}{2}s(\psi,\,\psi)} = \Omega\{\psi\}\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Il existe donc un opérateur unitaire W transformant les $\Phi \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)$ en des $\varphi \in \overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ de telle sorte que

$$(\varphi \mid e^{iA\{\psi\}}\varphi) = (W\Phi \mid e^{iA\{\psi\}}\, W\Phi) = (\Phi\,|e^{i[P\{-\psi_1\}+Q\{\psi_1'\}]}|\,\Phi) \tag{84}$$

pour tout $\psi \in (\mathfrak{E}, \sigma)$.

Or d'une part on a d'après (24)

$$(\varphi \mid e^{iA\{\psi\}}\varphi) = (\varphi \mid \pi_\omega(\delta_\psi)\,\varphi) = \varpi_{\varphi,\varphi}(\psi) = a\{\check{\varphi} \times \overline{\varphi}\}\,(\psi)$$

donc

$$\begin{aligned} \{\varpi_{\varphi,\varphi} \times \Omega\}\,(\psi) &= a\{\check{\varphi} \times \overline{\varphi} \times \Omega\}\,(\psi) = a\{\check{\varphi} \times \Omega \times \overline{\varphi} \times \Omega\}\,(\psi) \\ &= a\,\omega(\overline{\varphi})\,\check{\varphi}(\psi) \end{aligned} \tag{85}$$

et d'autre part en posant

$$\varpi_{\mathfrak{E}_1, \Phi, \Phi}(\psi) = (\Phi | U_{\mathfrak{E}_1}\{\psi\} | \Phi) = (\Phi | e^{i[P\{-\theta_1\} + Q\{\theta_1'\}]} | \Phi)_{\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)}$$

$$\begin{aligned} &\{\varpi_{\mathfrak{E}_1, \Phi, \Phi} \times \Omega\}(\psi) \\ &= \left(\frac{+1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \left[\int_{\mathfrak{E}_1} \overline{\Phi(u)}\, e^{-\frac{1}{2} s(u,u)}\, du\right] e^{-\frac{1}{2} h(\psi,\psi)}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n z^{j2}} \cdot \\ &\cdot \int_{\mathfrak{E}_1} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \theta^{j2}}\, e^{-\sqrt{2}\sum_{j=1}^n \theta^j z^j}\, \Phi(\theta)\, d\theta\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Mais en outre

$$\begin{aligned} \omega(\bar\varphi) = \bar\varphi(a\Omega) = a(\varphi \mid \Omega)_{\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)} &= (W\Phi \mid W\Phi_0)_\omega = (\Phi \mid \Phi_0)_{\mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)} \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathfrak{E}_1} \overline{\Phi(u)}\, e^{-\frac{1}{2} s(u,u)}\, du \end{aligned} \tag{87}$$

donc

$$\varphi(\psi) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{4}} \int W(\psi, \theta)\, \Phi(\theta)\, d\theta \tag{88}$$

où

$$W(\psi, \theta) = W(z^j, \theta^j) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n |z^j|^2}\, e^{\sum_{j=1}^n \left[-\frac{1}{2} z^{j2} - \frac{1}{2}\theta^{j2} + \sqrt{2}\,\theta^j z^j\right]} \tag{89}$$

est le noyau introduit dans [5].

En particulier on a en faisant $\Phi(\theta) = \overline{W(\varphi, \theta)}$ dans (88):

$$\int W(\psi, \theta)\, \overline{W(\varphi, \theta)}\, d\theta = (\sqrt{\pi})^{3n} \{{}^{\varphi}\Omega\}(\psi) \tag{90}$$

ce qui prouve que $\overline{W(\varphi, \theta)} \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{E}_1)$ en tant que fonction de θ (et donc que l'intégrale (88) a un sens) et que l'élément qui lui correspond dans $\overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ est $a^{1/4}\, {}^{\varphi}\Omega$.

De même

$$\{W(\psi, \theta) \times \Omega\}(\varphi) = W(\varphi, \theta) \tag{91}$$

montre que *(formellement)* $W(\psi, \theta) \in \overline{\mathfrak{Z}_\Omega}$ en tant que fonction de ψ.

L'opérateur W^{-1} est à son tour défini formellement par le noyau

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \overline{W(\psi, \theta)} \tag{92}$$

car si

$$\Phi(\theta) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \int \overline{W(\xi, \theta)}\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{93}$$

il vient

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n}\int W(\psi,\theta)\,\Phi(\theta)\,d\theta=(\sqrt{\pi})^{-3n}\int W(\psi,\theta)\,\overline{W(\xi,\theta)}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,d\theta$$
$$=\int\{{}^{\xi}\Omega\}(\psi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=\{\varphi\times\Omega\}(\psi)=\varphi(\psi)\,.$$

Mais $\overline{W(\psi,\theta)}$ n'appartient pas à $\mathfrak{J}_\Omega$ ni à $\mathscr{L}_2(\mathfrak{E},\sigma)$ ent tant que fonction de ψ. On devra donc, comme dans [5], définir W^{-1} par

$$\Phi(\theta)=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|\leqq R}\overline{W(\xi,\theta)}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,. \tag{94}$$

Remerciements: Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude au Prof. D. KASTLER qui leur a donné le sujet de ce travail, a relu le manuscrit et leur a prodigué ses conseils, au Prof. J. DIXMIER qui leur a permis de consulter le manuscrit de son traité sur les C^*-algèbres avant sa publication. Ils remercient également les Profs. H. MOREL et M. ZERNER auxquels ils sont redevables d'utiles discussions.

Ce travail a été accompli grâce au soutien du Centre National de la Recherche Scientifique et du Service Culturel de l'Ambassade de France en Espagne.

Références

[1] KASTLER, D.: Commun. math. Phys. **1**, 14 (1965).
[2] MACKEY, G. W.: Acta Math. **99**, 265 (1958).
[3] WIGNER, E.: Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
[3a] MOYAL, J. E.: Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
[4] BAKER, G. A.: Phys. Rev. **109**, 2198 (1958).
[5] BARGMANN, V.: Commun. Pure and Appl. Math. **14**, 187 (1961).
[5a] SEGAL, I.: Illinois J. Math. **6**, 500 (1962).
[6] MICHEL, L.: Invariance in Quantum Mechanics and Group extensions. Manuscript, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette. Seine et Oise, France.
[7] CHEVALLEY, C.: Théorie des groupes de Lie. Tome III. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris: Hermann 1955.
[8] DIXMIER, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentation. Paris: Gauthier-Villars 1964.
[9] FELL, J. M. G: Proc. Am. Math. Soc. **13**, 93 (1962).
[10] HEWITT, E., and K. A. ROSS: Abstract Harmonic Analysis. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
[11] RUDIN, W.: Fourier Analysis on Groups. New York: John Wiley 1962.
[12] DIXMIER, J.: Les Algèbres d'opérateurs dans l'Espace Hilbertien. Paris: Gauthier-Villars 1957.
[13] WEYL, H.: The Theory of Groups and Quantum Mechanics. London: Methnen 1931.
[14] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Fascicule de Résultats. Actualités Scientifiques et Industrielles Paris: Hermann 1955.
[15] RICKART, C. E.: General Theory of Banach Algebras. Princeton-London-Toronto: Van Nostrand (1960).
[16] SCHWARTZ, L.: Théorie des Distributions. Tome II. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris: Hermann 1959.
[17] SOURIAU, J. M.: Commun. math. Phys **1**, 374—398 (1966).