Commun. math. Phys. 1, 328—373 (1966)

Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Collège de France, Paris (France)

Reçu le 15 août 1965

Abstract. The purpose of this paper is to prove existence and uniqueness theorems for the Cauchy problem of relativistic hydrodynamics, in the case of a thermodynamical perfect fluid corresponding to the assumptions of A. H. TAUB [10]. We discuss also the case of a charged fluid, with zero conductivity, in an electromagnetic field. We consider elsewhere [7] the case of the relativistic perfect magnetohydrodynamics (infinite conductivity). The main tool used here is LERAY's theorem for strictly hyperbolic systems and we show by two different methods that it is possible to deduce, from the system of the field equations, a Leray system. In one of the methods, the vorticity tensor occurs and the relativistic Helmholtz equations are deduced for both the charged and uncharged fluids.

Introduction

Le but du présent mémoire est d'établir des théorèmes *locaux* d'existence et d'unicité physique, pour le problème de Cauchy relatif aux équations d'un *fluide parfait thermodynamique relativiste*. Les énoncés correspondants ont été signalés ailleurs [7]. Le cadre adopté est celui de la relativité générale et les équations d'Einstein figurent dans le système d'équations considéré — mais il est aisé d'en faire abstraction. Le même problème avait été traité par Madame CHOQUET-BRUHAT [3] pour un fluide isentropique. Le fluide thermodynamique envisagé ici est sans courant de chaleur et schématisé selon l'excellent point de vue de A. H. TAUB [8, 10]. La densité de matière propre est supposée conservative, ou — ce qui est équivalent — le mouvement adiabatique.

La théorie est développée en prenant pour variables thermodynamiques ce que je nomme *l'indice* f du fluide (équivalent à l'enthalpie spécifique) et son entropie spécifique S. Deux cas sont effectivement traités, celui du mouvement *en l'absence de tout champ électromagnétique* et celui du mouvement d'un fluide thermodynamique chargé *de conductivité nulle, en présence d'un champ électromagnétique*. Nous avons envisagé ailleurs [7] le cas de la magnétohydrodynamique relativiste (conductivité infinie), cas qui ne conduit pas à un système strictement hyperbolique. La démonstration donnée par Madame CHOQUET-BRUHAT dans le cas d'un fluide isentropique de conductivité nulle comportait quelques difficultés qui sont surmontées ici.

L'instrument mathématique principal est constitué par un important théorème de Leray relatif aux systèmes quasilinéaires strictement hyperboliques. Les définitions et résultats utiles sont rappelés dans la première partie de ce travail, en même temps que sont dégagées certaines des formules indispensables. Les théorèmes principaux figurent au paragraphe 7, aux paragraphes 15 et 16, au paragraphe 27 enfin. Pour se ramener à des systèmes hyperboliques du type de Leray deux méthodes sont mises en évidence: dans l'une (cas matière pure paragraphe 7, et fluide parfait thermodynamique paragraphe 16) on introduit non les équations d'Einstein, mais celles qui s'en déduisent par dérivation le long des lignes de courant. Cette méthode s'adapte aussi à la magnétohydrodynamique relativiste parfaite [7]. L'autre méthode, mise en œuvre aux paragraphes 15 et 27, fait intervenir le tenseur tourbillon et les équation d'Helmholtz relativistes que nous avons formées dans les deux cas envisagés.

I. Equations d'Einstein

1. Equations d'Einstein

a) En théorie relativiste de la gravitation, l'élément fondamental est constitué par une variété différentiable de dimension 4, la variété *espace-temps* V_4. La variété V_4 est douée d'une métrique riemannienne hyperbolique, de signature $+ - - -$, qui peut s'écrire en coordonnées locales

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{1.1}$$

Les $g_{\alpha\beta}$ sont appelés les *potentiels de gravitation* relatifs au système de coordonnées. En chaque point x de V_4, l'équation $ds^2 = 0$ définit un cône de directions spatio-temporelles, *le cône élémentaire* C_x au point x. On démontre aisément qu'une telle variété V_4 admet des systèmes globaux de lignes orientées dans le temps, mais elle n'admettra pas en général de systèmes globaux d'hypersurfaces orientées dans l'espace. Le point de vue adopté ici sera par suite un point de vue purement local.

b) Désignons par $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la variété riemannienne V_4 et par $S_{\alpha\beta}$ son tenseur d'Einstein défini par:

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, R\,. \tag{1.2}$$

En vertu des identités de Bianchi, ce tenseur satisfait les *identités dites de conservation*

$$\nabla_\alpha S^\alpha{}_\beta = 0 \tag{1.3}$$

où ∇ représente l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne définie par la métrique.

Dans la théorie de la relativité générale, la métrique est astreinte à vérifier les équations d'Einstein:

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \quad (\chi = \text{const.}) \tag{1.4}$$

où le *tenseur d'énergie* $T_{\alpha\beta}$ est supposé continu par morceaux. Ce tenseur définit les sources du champ de gravitation en décrivant au mieux, aux points considérés de V_4, la structure de la distribution énergétique source (cas intérieur), ou bien, dans les régions de V_4 non balayées par l'énergie, doit être identiquement nul (cas extérieur).

2. *Analyse élémentaire du problème de Cauchy*

Nous commencerons par rappeler notre analyse élémentaire du problème de Cauchy [6] pour le cas extérieur,

$$S_{\alpha\beta} = 0 \,. \tag{2.1}$$

Cette analyse sera d'ailleurs aussi utile pour l'étude des équations avec second membre. Notre problème est le suivant:

Problème de Cauchy. *Etant donnés, sur une hypersurface Σ, les potentiels et leurs dérivées premières, étudier les potentiels supposés satisfaire aux équations d'Einstein* (2.1).

a) Σ est une hypersurface locale de V_4 suposée non tangente, en chacun de ses points, au cône élémentaire en ce point. Si $x^0 = 0$ définit localement Σ, *nous avons* $g^{00} \neq 0$. Les données de Cauchy sur Σ sont constituées par les valeurs sur Σ des $g_{\lambda\mu}$ et des $\partial_0 g_{\lambda\mu}$ [1]. Une simple dérivation sur Σ fournit les valeurs de dérivées secondes autres que $\partial_{00} g_{\lambda\mu}$. Nous sommes donc amenés à mettre ces dérivées en évidence dans les équations d'Einstein. Le système d'Einstein est équivalent au système suivant:

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00}\, \partial_{00}\, g_{ij} + F_{ij} = 0 \quad (i, j, \ldots = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

et

$$S_\alpha^0 \equiv G_\alpha = 0 \tag{2.3}$$

où les F_{ij} et G_α sont des fonctions calculables sur Σ à partir des données de Cauchy par opérations algébriques et dérivations sur Σ.

Le système des équations d'Einstein est un système en involution au sens suivant: *si une métrique vérifie les équations* (2.2) *et, sur Σ seulement, les équations $S_\alpha^0 = 0$ elle satisfait aussi ces équations à l'extérieur de Σ.*

Ce résultat est une conséquence triviale des identités de conservation (1.3), soit:

$$\nabla_0 S_\beta^0 + \nabla_i S_\beta^i = 0 \,. \tag{2.4}$$

---

[1] Nous posons $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\partial_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ etc.

Pour une solution de (2.2), on a en effet:

$$S_i^0 = g^{00} R_{0i} \quad S_0^0 = \frac{1}{2} g^{00} R_{00} .$$

Par suite:

$$g^{00} S_j^i = g^{00} \left[g^{0i} R_{0j} - \frac{1}{2} g_j^i (g^{00} R_{00} + 2 g^{0k} R_{0k}) \right] = g^{0i} S_j^0 - g_j^i g^{0\lambda} S_\lambda^0$$

et

$$g^{00} S_0^i = g^{00} [g^{0i} R_{00} + g^{ij} R_{0j}] = 2 g^{0i} S_0^0 + g^{ij} S_j^0 .$$

Il en résulte que les équations (2.4) peuvent, pour une telle solution de (2.2), se mettre sous la forme:

$$g^{00} \partial_0 S_\beta^0 = A_\beta^{\varrho i} \partial_i S_\varrho^0 + B_\beta^\varrho S_\varrho^0 ,$$

où les A et B sont régulières. Un tel système n'admet, pour des données S_ϱ^0 nulles sur Σ, que la solution nulle.

b) Corrélativement, nous voyons que le système (2.2) fournit les valeurs sur Σ des 6 dérivées secondes $\partial_{00} g_{ij}$ que j'ai appelées les dérivées significatives pour Σ. Les 4 dérivées $\partial_{00} g_{0\alpha}$ sont absentes.

On peut analyser ce résultat en remarquant que l'on peut effectuer un changement de coordonnées locales de la forme:

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{6} \{\varphi^\lambda(x^i) + \varepsilon^{(\lambda)}\} \quad (\lambda' = \lambda \text{ numériquement}) \tag{2.5}$$

où $\varepsilon^{(\lambda)}$ tend vers 0 quand x^0 tend vers 0. Dans ce changement de coordonnées, les valeurs numériques des coordonnées des points de Σ et les données de Cauchy sont invariantes. Il en est naturellement de même pour les $\partial_{00} g_{ij}$, mais less nouvelles dérivées $\partial_{00} g_{0\alpha}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. Ces quatre dérivées peuvent être discontinues à la traversée de Σ. Mais, en accord avec l'axiomatique de la théorie, ces discontinuités ne présentent pas de signification physique et peuvent être annulées dans des systèmes de coordonnées convenables.

Les dérivées significatives ne peuvent présenter de discontinuités à la traversée de Σ que si Σ est tangente aux cônes élementaires. Les caractéristiques des équations d'Einstein, *ou fronts d'ordre gravitationnels*, sont définis par les hypersurfaces $f = 0$ tangentes aux cônes élémentaires, c'est-à-dire solutions de l'équation

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \, \partial_\beta f = 0 . \tag{2.6}$$

Les *rayons gravitationnels* ou bicaractéristiques sont les caractéristiques de (2.6), c'est-à-dire les géodésiques isotropes de la métrique.

3. Coordonnées harmoniques

a) Dans toute la suite de ce travail, nous utiliserons de manière systématique *des systèmes de coordonnées harmoniques*. Pour introduire ces coordonnées, considérons une équation scalaire qui admette comme caractéristiques les solutions de (2.6). L'équation la plus simple de ce type peut s'écrire:

$$\Delta f \equiv -\nabla^\alpha \nabla_\alpha f \equiv -g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta f = 0 \tag{3.1}$$

soit, sous forme explicite:

$$\Delta f \equiv -g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\beta} f - \Gamma^\varrho_{\alpha\beta}\, \partial_\varrho f) = 0 \tag{3.2}$$

où les $\Gamma^\varrho_{\alpha\beta}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne dans les coordonnées locales envisagées. Il est clair que les caractéristiques de (3.2) sont les hypersurfaces tangentes aux cônes élémentaires. Si d est l'opérateur de différentiation extérieur et si δ est l'opérateur de *co-dérivation* sur les tenseurs, (3.1) peut se mettre sous la forme intrinsèque:

$$\Delta f \equiv \delta\, d f = 0\,. \tag{3.3}$$

C'est l'équation de Laplace relative à la variété riemannienne V_4.

Un système de coordonnées locales $\{x^\varrho\}$ *est dite harmonique* si les x^ϱ sont des solutions locales de l'équation de Laplace (3.1). Nous sommes ainsi conduits à introduire les quatre quantités [1]

$$F^\varrho = \Delta x^\varrho = g^{\alpha\beta} \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

qui dépendent des potentiels et de leurs dérivées premières.

b) Posons:

$$2 L_{\alpha\beta} = g_{\alpha\varrho}\, \partial_\beta F^\varrho + g_{\beta\varrho}\, \partial_\alpha F^\varrho\,. \tag{3.5}$$

Les $L_{\alpha\beta}$ dépendent des potentiels et de leurs dérivées des deux premiers ordres. Nous nous proposons d'étudier dans $L_{\alpha\beta}$ les termes en dérivées secondes. On a

$$2 L_{\alpha\beta} \cong \partial_\beta (g_{\alpha\varrho} \Gamma^\varrho_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu}) + \partial_\alpha (g_{\beta\varrho} \Gamma^\varrho_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu})$$

où le symbole $\cong$ indique que l'on a négligé les termes ne contenant que des potentiels et leurs dérivées premières. Il vient ainsi:

$$2 L_{\alpha\beta} \cong g^{\lambda\mu} \{\partial_\beta [\lambda\mu, \alpha] + \partial_\alpha [\lambda\mu, \beta]\}$$

où les crochets désignent les symboles de Christoffel. En développant on obtient:

$$2 L_{\alpha\beta} \cong \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \{\partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} + \partial_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} + \partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + \partial_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}\}$$

ce qui conduit à la formule:

$$2 L_{\alpha\beta} \cong g^{\lambda\mu} \{\partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + \partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}\}\,. \tag{3.6}$$

c) Les composantes $R_{\alpha\beta}$ du tenseur de Ricci dépendent aussi des potentiels et de leurs dérivées des deux premiers ordres. Nous nous proposons de montrer, à l'aide de (3.6), que $L_{\alpha\beta}$ intervient de manière simple dans les termes de $R_{\alpha\beta}$ contenant des dérivées secondes. On a en effet:

$$R_{\alpha\beta} \cong \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\lambda\beta}$$

soit

$$R_{\alpha\beta} \cong g^{\lambda\mu}\{\partial_\lambda[\alpha\beta, \mu] - \partial_\alpha[\lambda\beta, \mu]\} .$$

En développant les symboles de Christoffel, il vient:

$$R_{\alpha\beta} \cong \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\{\partial_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta\lambda}g_{\alpha\mu} - \partial_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} - \partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu} + \partial_{\alpha\mu}g_{\beta\lambda}\}$$

soit:

$$R_{\alpha\beta} \cong \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\{\partial_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta\lambda}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta}$$

c'est-à-dire, d'apres (3.6):

$$R_{\alpha\beta} \cong -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} .$$

Nous pouvons résumer les résultats de cette étude par l'énoncé suivant:

Théorème. *Dans un système de coordonnées locales arbitraire, chaque composante du tenseur de Ricci peut s'écrire*:

$$R_{\alpha\beta} = R^{(h)}_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

où

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}(g_{\lambda\mu}, \partial_\varrho g_{\lambda\mu}) \tag{3.8}$$

les $f_{\alpha\beta}$ désignant des fonctions régulières convenables et les $L_{\alpha\beta}$ étant définis à partir des F^ϱ par la formule (3.5)

4. Les équations d'Einstein en coordonnées harmoniques

a) Considérons le système général des équations d'Einstein:

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

qui peut aussi s'écrire:

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right) . \tag{4.2}$$

Des identités de conservation (1.3), il résulte que le système (4.1) implique sur le tenseur d'énergie les équations de conservation $\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$.

Si une solution des équations d'Einstein est rapportée à des coordonnées harmoniques, donc telles que $L_{\alpha\beta} = 0$, cette solution vérifie le système

$$S^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

où nous avons posé $S^{(h)}_{\alpha\beta} = R^{(h)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^{(h)}$, ainsi que le système

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0 . \tag{4.4}$$

Les équations (4.3) peuvent aussi s'écrire:

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right) .$$

b) Inversement, donnons-nous une solution du système (4.3), (4.4) correspondant à des données de Cauchy sur une hypersurface Σ *orientée dans l'espace* d'équation locale $x^0 = 0$ vérifiant:

$$F^\varrho = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0 \tag{4.5}$$

et

$$S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\,. \tag{4.6}$$

Sur l'hypersurface Σ, on a:

$$S^0_\alpha = S^{h(0)}_\alpha + \left(L^0_\alpha - \frac{1}{2} g^0_\alpha L\right) \quad (L = g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta})$$

et par suite d'après (4.3) et (4.6):

$$L^0_\alpha - \frac{1}{2} g^0_\alpha L = \chi T^0_\alpha - \chi T^0_\alpha = 0\,. \tag{4.7}$$

Or de (3.5) il résulte

$$2 L^0_\alpha = g_{\alpha\varrho} g^{0\beta}\, \partial_\beta F^\varrho + \partial_\alpha F^0 \qquad L = \partial_\varrho F^\varrho$$

soit sur Σ d'après (4.5):

$$2 L^0_\alpha = g_{\alpha\varrho} g^{00}\, \partial_0 F^\varrho + \partial_\alpha F^0 \qquad L = \partial_0 F^0\,.$$

De (4.7) il résulte ainsi:

$$g_{\alpha\varrho} g^{00}\, \partial_0 F^\varrho + (\partial_\alpha F^0 - g^0_\alpha\, \partial_0 F^0) = 0$$

soit sur Σ:

$$g_{\alpha\varrho} g^{00}\, \partial_0 F^\varrho = 0$$

g^{00} étant différent de zéro, on voit que notre solution est telle que sur Σ

$$\partial_0 F^\varrho = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\,. \tag{4.8}$$

c) Pour la solution envisagée, on a d'après (4.4):

$$\nabla_\lambda \left(L^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} L\right) = \nabla_\lambda S^{\lambda\mu} - \nabla_\lambda S^{(k)\,\lambda\mu}$$

soit:

$$\nabla_\lambda \left(L^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} L\right) = 0\,. \tag{4.9}$$

Or:

$$2 L^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} L = g^{\mu\varrho}\, \partial_\varrho F^\lambda + g^{\lambda\varrho}\, \partial_\varrho F^\mu - g^{\lambda\mu}\, \partial_\varrho F^\varrho$$

et

$$\partial_\lambda (2 L^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} L) = g^{\mu\varrho}\, \partial_{\lambda\varrho} F^\lambda + g^{\lambda\varrho}\, \partial_{\lambda\varrho} F^\mu - g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\varrho} F^\varrho + O$$

où O désigne des termes linéaires par rapport aux $\partial_\varrho F^\lambda$. Il en résulte que (4.9) peut s'écrire

$$g^{\lambda\varrho}\, \partial_{\lambda\varrho} F^\mu + A^{\mu\alpha}_\beta\, \partial_\alpha F^\beta = 0 \tag{4.10}$$

où les $A^{\mu\alpha}_\beta$ sont des fonctions régulières des potentiels et de leurs dérivées premières. Ainsi les F^ϱ satisfont un système hyperbolique qui admet un théorème d'unicité. La seule solution satsifaisant sur Σ à $F^\varrho = 0$,

$\partial_0 F^{\varrho} = 0$ est la solution nulle et les coordonnées envisagées sont harmoniques pour la solution considérée de (4.3), (4.4). Il en résulte que cette solution vérifie les équations d'Einstein (4.1). Nous énonçons

Théorème. *Toute solution du système* (4.3), (4.4) *correspondant à des données de Cauchy sur une hypersurface Σ orientée de l'espace telles que les conditions* (4.5) *et* (4.6) *soient satisfaites sur Σ est une solution du problème de Cauchy correspondant pour les équations d'Einstein elles-mêmes.*

5. Le théorème de Leray

Notre principal instrument pour établir les théorèmes d'existence et d'unicité relatifs au problème de Cauchy local pour les différents systèmes différentiels étudiés sera constitué par un important théorème dû à Leray [4].

a) Soit V_n une variété différentiable de classe suffisamment grande, $a(x, \partial)$ un opérateur différentiel où $x \in V_n$ et où ∂ désigne l'opérateur de dérivation ordinaire $\partial = (\partial_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$; a est d'ordre m, $a(x, \xi)$ étant un polynome réel en ξ de degré m. Soit $h(x, \xi)$ la partie principale de $a(x, \xi)$ constituée par les termes homogènes de degré m et soit $V_x(h)$ le cône défini dans l'espace vectoriel T_x^* des vecteurs covariants en x par l'équation

$$h(x, \xi) = 0 .$$

L'opérateur a est dit *hyperbolique en x* si les hypothèses suivantes sont satisfaites: il existe dans T_x^* des éléments ξ tels que toute droite issue de ξ ne passant pas par le sommet coupe le cône $V_x(h)$ en m points réels et distincts. Ces points ξ constituent l'intérieur de deux demi-cônes convexes fermés opposés $\Gamma_x^+(a)$ et $\Gamma_x^-(a)$ dont les bords appartiennent à $V_x(h)$; le cône $V_x(h)$ n'a pas de génératrices singulières.

Soit maintenant $A(x, \partial)$ une matrice *diagonale* dépendant differentiablement de x:

$$A(x, \partial) = \begin{pmatrix} a_1(x, \partial) \ldots 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 \ldots a_p(x, \partial) \end{pmatrix}$$

dont l'élément $a_\tau(x, \partial)$ $(\tau = 1, \ldots, p)$ est un opérateur différentiel d'ordre $m(\tau)$.

La matrice $A(x, \partial)$ est dite *hyperbolique en x* si

1) *Les a_τ sont hyperbolique en x,*

2) *Les demi-cônes opposés*:

$$\Gamma_x^+(A) = \bigcap_\tau \Gamma_x^+(a_\tau)$$

ont un intérieur non vide.

Introduisons le demi-cône C_x^+ dual de $\Gamma_x^+(A)$, demi-cône convexe situé dans l'espace vectoriel T_x; c'est l'ensemble des vecteurs V de T_x

tels que $\xi(V) \geqq 0$ pour tout $\xi \in \Gamma_x^+(A)$. Le demi-cône opposé C_x^- est dual au même sens de $\Gamma_x^-(A)$. Nous poserons $C_x = C_x^+ \cup C_x^-$. Un chemin de V_n est dit *temporel* si sa demi-tangente en chaque point x appartient à C_x^+. Une hypersurface régulière de V_n est dite *spatiale* si le sous-vectoriel tangent à Σ en $x \in \Sigma$ est extérieur à C_x.

Soit Ω un ouvert connexe ou domaine de V_n. La matrice $A(x, \partial)$ est dite *hyperbolique dans* Ω si

1) *$A(x, \partial)$ est hyperbolique en chaque point x de Ω,*

2) *L'ensemble des chemins temporels joignant dans Ω deux points x, x' de Ω est compact ou vide.*

Si $A(x, \partial)$ est hyperbolique en x, il existe un domaine Ω contenant x, homéomorphe à une boule ouverte sur lequel A est hyperbolique. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous placerons sur un tel domaine Ω.

b) Dans la variété différentiable V_n, considérons les systèmes différentiels quasilinéaires à l'inconnue

$$U(x) = (u_\sigma(x)) \quad (\sigma = 1, \ldots, p)$$

qui peuvent être définis de la manière suivante:

$$A(x, U, \partial)\, U = B(x, U)\,. \tag{5.1}$$

∂ est toujours l'opérateur de dérivation ordinaire $\partial = (\partial_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ et A est une matrice diagonale

$$A(x, U, \partial) = \begin{pmatrix} a_1(x, U, \partial) \ldots 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 \ldots a_p(x, U, \partial) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

dont l'élément $a_\tau(x, U, \partial)$, $(\tau = 1, \ldots, p)$ est un opérateur différentiel d'ordre $m(\tau)$. Le second membre $B(x, U)$ peut s'écrire:

$$B(x, U) = (b_\tau(x, U))\,.$$

Pour préciser les hypothèses faites sur $a_\tau(x, U, \partial)$ et sur $b_\tau(x, U)$, *on associe à chaque inconnue u_σ un indice entier $s(\sigma) \geqq 1$ et à chaque équation τ un indice entier $t(\tau) \geqq 1$, ces indices étant définis à une constante additive près par le système* (5.1) *et tels que:*

$$m(\tau) = s(\tau) - t(\tau) + 1\,.$$

Nous supposons que les b_τ et les coefficients des opérateurs différentiels a_τ sont des fonctions de x, des u_σ et de leurs dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma) - t(\tau)$ suffisamment régulières (pour $s(\sigma) - t(\tau) < 0$, *sont indépendantes de u_σ*).

c) Soit $\Sigma \subset \Omega$ une hypersurface régulière locale de V_n. Dans le voisinage de Σ nous introduisons

$$V(x) = (v_\sigma(x))$$

où les $v_\sigma(x)$ ont des dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma) + 1$ localement de carrés intégrables [2].

[2] Voir page suivante.

Nous supposons

1) *que la matrice* $A(x, V, \partial)$ *est hyperbolique dans* Ω *et que l'hypersurface* Σ *est spatiale pour cette matrice* $A(x, V, \partial)$,

2) *que les différences:*

$$a_\tau(x, v_\tau, \partial)\, v_\tau - b_\tau(x, v)$$

et leurs dérivées d'ordre $< t(\tau)$ *s'annulent identiquement sur* Σ $(t(\tau) \geqq 1)$.

Nous nous proposons, sous ces hypothèses, d'étudier le problème de Cauchy défini pour le système (5.1) par les données de Cauchy déterminées par V. Une solution de ce problème de Cauchy est une solution $U = (u_\sigma)$ de (5.1) dont les dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma)$ sont localement de carrés intégrables [3] et qui est telle que:

$$u_\sigma(x) - v_\sigma(x)$$

et leurs dérivées d'ordre $< s(\sigma)$ s'annulent identiquement sur Σ $(s(\sigma) \geqq 1)$.

Pour ce problème, Leray a établi un théorème d'existence et un théorème d'unicité qui peuvent être réunis dans l'énoncé suivant:

Théorème de Leray. *Si* $x \in \Sigma$, *le problème de Cauchy relatif au système* (5.1) *admet, sous nos hypothèses au moins une solution dans le voisinage de* x.

Si $U = (u_\sigma)$ *et* $\overline{U} = (\overline{u}_\sigma)$ *sont deux solutions de ce problème de Cauchy dans le voisinage du point* x *et si* u_σ *et* $\overline{u}_\sigma$ *ont des dérivées d'ordre* $\leqq s(\sigma) + 1$ *localement de carrés intégrables, ces deux solutions coïncident.*

Les données de Cauchy au sens usuel sont donc ici *les valeurs sur* Σ *des* u_σ *et de leurs dérivées d'ordre* $\leqq s(\sigma) - 1$.

6. *Le cas extérieur. Théorème de Madame Choquet-Bruhat*

a) Considérons le système des équations d'Einstein pour le cas extérieur

$$R_{\alpha\beta} = 0 \,. \tag{6.1}$$

En coordonnées harmoniques, nous avons:

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}(g_{\lambda\mu}, \partial_\varrho g_{\lambda\mu}) = 0 \tag{6.2}$$

ce qui peut s'écrire:

$$g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} = 2 f_{\alpha\beta}(g_{\lambda\mu}, \partial_\varrho g_{\lambda\mu}) \,. \tag{6.3}$$

Le système des dix équations (6.2) ou (6.3) appartient au type (5.1) étudié par Leray, la matrice 10×10, A, étant ici la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux valent:

$$g^{\lambda\mu}\, \partial_{\lambda\mu} \,. \tag{6.4}$$

[3] Localement de carré intégrable et entendu au sens suivant: carré intégrable sur tout parallélépipède d'un domaine de coordonnées locales, l'intégration étant effectuée relativement à ces coordonnées.

Le système (6.2) *satisfait aux hypothèses de différentiabilité faites, avec les indices suivants*:

$$s\,(g_{\alpha\beta}) = 2 \quad t\,(R^{(h)}_{\alpha\beta}) = 1\ .$$

En effet (6.4) est d'ordre $2 - 1 + 1 = 2$; les coefficients de (6.4) et les seconds membres dépendent des $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées d'ordres $2 - 1 = 1$ au plus.

b) Soit Σ une hypersurface initiale d'équation locale $x^0 = 0$. Considérons des données de Cauchy telles que:

1) *la forme quadratique* $g_{\lambda\mu}\, v^\lambda\, v^\mu$ *soit hyperbolique normale, l'hypersurface* Σ *étant spatiale en chacun de ses points, relativement auc cône élémentaire* C_x *correspondant*

2) *on ait sur* Σ

$$F^\varrho = 0\ , \quad S^0_\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\ .$$

Si C^+_x est le demi-cône futur, son dual est le demi-cône Γ^+_x défini par:

$$g^{\lambda\mu}\,\xi_\lambda\,\xi_\mu \geqq 0 \tag{6.5}$$

avec $\xi\,(v) \geqq 0$ pour un vecteur v intérieur à C^+_x. Il y a donc hyperbolicité.

Si les données de Cauchy précédentes sont suffisamment régulières, le théorème de Leray montre que *le problème de Cauchy correspondant à* (6.2) *admet une solution unique*. Ce résultat avait été établi antérieurement à la théorie de Leray par Madame CHOQUET-BRUHAT [1] au moyen d'une étude directe.

L'ensemble des chemins temporels de Ω partant d'un point y (resp. aboutissant à un point y) définit le futur $\mathscr{E}^+(y)$ (resp. le passé $\mathscr{E}^-(y)$) du point y. Si $\mathscr{E}(y) = \mathscr{E}^+(y) \cup \mathscr{E}^-(y)$ est «l'émission» de y, la frontière de cette émission est le conoïde caractéristique de sommet y, lieu des géodésiques isotropes issues de ce point. Il résulte de la théorie de Leray que les valeurs de la solution en un point y situé au voisinage de Σ du côté du futur, dépendent seulement des données de Cauchy dans $\mathscr{E}^-(y) \cap \Sigma$, c'est-à-dire des données de Cauchy dans le passé de y (domaine de dépendance).

c) Puisque $T_{\alpha\beta} \equiv 0$, il résulte du raisonnement du paragraphe 4, que la solution précédente du système (6.2) vérifie partout les conditions d'harmonicité $F^\varrho = 0$ et est solution du système des équations d'Einstein (6.1). Pour les données de Cauchy envisagées vérifiant $F^\varrho = 0$ sur Σ, nous avons ainsi obtenu une solution du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein du cas extérieur.

L'unicité du problème de Cauchy pour le système d'Einstein ne peut être entendu qu'en un sens *physique ou géométrique*: c'est une unicité modulo un changement de coordonnées laissant invariantes les valeurs numériques des coordonnées de chaque point de Σ ainsi que les données de Cauchy. Il est aisé de voir (Madame CHOQUET-BRUHAT [1]) qu'une solution du problème de Cauchy relatif à $R_{\alpha\beta} = 0$, pour des données de Cauchy vérifiant $F^{\varrho} = 0$ sur Σ, peut être déduite par un tel changement de coordonnées de la solution unique du même problème pour le système $R^{(h)}_{\alpha\beta} = 0$; on peut montrer en effet que ce changement de coordonnées vérifie lui-même un système différentiel du type (6.2) et le théorème d'existence pour ce système implique ainsi le *théorème d'unicité physique* pour le problème de Cauchy relatif aux équations d'Einstein.

Nous avons ainsi établi un théorème local d'existence et d'unicité physique pour le problème de Cauchy relatif au système des équations d'Einstein du cas extérieur.

7. *Le cas matière pure*

a) Le cas le plus simple d'un milieu continu est décrit par un tenseur d'énergie de la forme:

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta$$

où ϱ est un scalaire positif et u_α un vecteur unitaire ($g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1$). A ϱ on donne le nom de *densité de matière propre* et à u_α celui de *vecteur-vitesse unitaire*. Ce tenseur d'énergie décrit une schématisation de l'énergie dite *matière pure*.

Compte-tenu du caractère unitaire de u_α, les équations de conservation:

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$$

sont équivalentes au système formé par l'équation de continuité:

$$\nabla_\alpha (\varrho u^\alpha) = 0$$

et les équations du mouvement:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0 .$$

Nos données de Cauchy sur une hypersurface Σ ($x^0 = 0$) supposée *spatiale* sont constituées par les valeurs sur Σ des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières $\partial_0 g_{\alpha\beta}$. De ces données on sait qu'on peut déduire les valeurs sur Σ des S^0_α. De

$$S^0_\alpha = \chi \varrho u^0 u_\alpha$$

on déduit d'après le caractère unitaire de u_α que sur Σ:

$$(\chi \varrho u^0)^2 = g^{\alpha\beta} S^0_\alpha S^0_\beta .$$

Le second membre doit être strictement positif; autrement dit le vecteur local défini, dans le système de coordonnées locales envisagé, par les S^0_α doit être orienté dans le temps. Nous posons:

$$g^{\alpha\beta} S^0_\alpha S^0_\beta = (\Omega^0)^2 > 0$$

de telle sorte que:

$$\chi \varrho u^0 = \Omega^0 .$$

On en déduit:
$$u_\alpha = \frac{S^0_\alpha}{\Omega^0} \quad u^0 = \frac{S^{00}}{\Omega^0} \quad \chi\varrho = \frac{(\Omega^0)^2}{S^{00}}$$
ϱ devant être positif, on doit avoir aussi $S^{00} > 0$.

b) Considérons le système des équations d'Einstein pour le cas matière pure:
$$R_{\alpha\beta} = \chi\varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) \tag{7.1}$$
avec
$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1 . \tag{7.2}$$

En accord avec le raisonnement du paragraphe 4, nous considérons en coordonnées harmoniques le système
$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi\varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) \tag{7.3}$$
complété par le système
$$\nabla_\alpha(\varrho u^\alpha) \equiv u^\alpha\, \partial_\alpha \varrho + \varrho \nabla_\alpha u^\alpha = 0 \tag{7.4}$$
et
$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0 . \tag{7.5}$$
Il est impossible pour (7.3), (7.4), (7.5) d'obtenir des indices s et t satisfaisaux aux hypothéses du § 5.

Pour obtenir un système hyperbolique de Leray, *nous substituons à* (7.3) *les équations dérivées le long des lignes de courant*, trajectoires de u^γ, et tenons compte dans le résultat de (7.4) et (7.5).

Il vient:
$$u^\gamma \nabla_\gamma \left\{\varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right)\right\} = u^\gamma\, \partial_\gamma \varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + \\ + \varrho u^\gamma \nabla_\gamma \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) .$$
D'après (7.5) le dernier terme du second membre est nul et d'après (7.4), on a:
$$u^\gamma \nabla_\gamma \left\{\varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right)\right\} = -\varrho \nabla_\gamma u^\gamma \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) .$$

Nous substituons ainsi aux dix équations (7.3) les dix équations:
$$u^\gamma \nabla_\gamma R^{(h)}_{\alpha\beta} = -\chi\varrho \nabla_\gamma u^\gamma \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right)$$
soit:
$$-\frac{1}{2} u^\gamma g^{\lambda\mu}\, \partial_{\gamma\lambda\mu} g_{\alpha\beta} = -\chi\varrho \nabla_\gamma u^\gamma \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) + u^\gamma f_{\alpha\beta\gamma} \tag{7.3'}$$
où $f_{\alpha\beta\gamma}$ dépend des potentiels et de leurs dérivées premières et secondes. Le vecteur u^α est maintenant un vecteur arbitraire et nous considérons comme fonctions inconnues les dix $g_{\alpha\beta}$, ϱ et les quatre u^α, soit 15 inconnues. Nous avons à considérer le système (7.3'), (7.4), (7.5) composé de 15 équations.

Ce système appartient au type (5.1) étudié par Leray, la matrice A, ici 15×15, étant la matrice diagonale dont les éléments diagonaux ont respectivement pour valeurs:

$$a(3') = -\frac{1}{2} u^\gamma g^{\lambda\mu} \partial_{\gamma\lambda\mu} \quad a(4) = a(5) = u^\alpha \partial_\alpha . \tag{7.6}$$

Notre système satisfait aux hypothèses faites sur les dérivées avec les indices suivants pour les inconnues:

$$s(g_{\alpha\beta}) = 3 \quad s(\varrho) = 1 \quad s(u^\alpha) = 2$$

et pour les équations:

$$t(3') = 1 \quad t(4) = 1 \quad t(5) = 2 .$$

En effet $a(3')$ est d'ordre $3 - 1 + 1 = 3$; $a(4)$ et $a(5)$ sont d'ordre 1. En ce qui concerne les coefficients de ces opérateurs et les seconds membres, nous allons donner le tableau suivant où, pour chaque inconnue et équation, nous faisons figurer l'ordre *maximum* de dérivation qui peut apparaître conformément aux indices. Nous rappelons que quand cet ordre est négatif, cela signifie que l'inconnue correspondante n'apparait pas dans l'équation. Il vient:

$$\left.\begin{matrix} g_{\alpha\beta} : 2 \\ \varrho \quad : 0 \\ u^\alpha \quad : 1 \end{matrix}\right\} (7.3') \qquad \left.\begin{matrix} g_{\alpha\beta} : 2 \\ \varrho \quad : 0 \\ u^\alpha \quad : 1 \end{matrix}\right\} (7.4) \qquad \left.\begin{matrix} g_{\alpha\beta} : 1 \\ \varrho \quad : -1 \\ u^\alpha \quad : 0 . \end{matrix}\right\} (7.5)$$

Ces ordres maxima sont bien respectés dans le système (7.3'), (7.4), (7.5).

c) Nos données de Cauchy sur Σ sont, comme nous l'avons vu, les potentiels et leurs dérivées premières et nous supposons qu'elles sont telles que:

1) *la forme quadratique* $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu$ *soit hyperbolique normale, l'hypersurface* Σ *étant spatiale en chacun de ses points, relativement au cône élémentaire* C_x *correspondant,*

2) *on ait sur* Σ,

$$F^\varrho = 0 \quad (\text{pour } x^0 = 0) .$$

3) *les relations* $S^0_\alpha = \chi \varrho u^0 u_\alpha$ *déterminent sur* Σ, *conformément au a, un scalaire positif* ϱ *et un vecteur unitaire* u^α.

Si C^+_x est le demi-cône élémentaire futur, son dual est le demi-cône Γ^+_x défini par:

$$g^{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu \geqq 0$$

avec $\xi(v) \geqq 0$ pour un vecteur v intérieur à C^+_x. Aux opérateurs $a(4)$ et $a(5)$ correspond dans T^*_x le «demi-cône» $\hat{\Gamma}^+_x$ tel que:

$$u^\lambda \xi_\lambda \geqq 0$$

u^λ étant temporel pour C_x^+, l'intersection de Γ_x^+ et $\hat{\Gamma}_x^+$ a un intérieur non vide qui est l'intérieur de Γ_x^+. Il en résulte que la matrice A est *hyperbolique.*

Des données précédentes, nous déduisons les valeurs sur Σ des dérivées secondes des potentiels au moyen du système (7.3):

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi\varrho\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) .$$

(7.5) fournit les valeurs sur Σ des dérivées des u^α.

Nous obtenons ainsi un problème de Cauchy relatif au système (7.3′) (7.4), (7.5), pour lequel les données de Cauchy sont les potentiels et leurs dérivées des deux premiers ordres, ϱ, les u^α et leurs dérivées premières (dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma) - 1$). Pour des données initiales suffisamment régulières, le théorème de Leray montre que *ce problème de Cauchy admet une solution* ($g_{\alpha\beta}$, ϱ, u^α) *unique.*

Cette solution vérifiant (7.3′) et (7.3) *sur* Σ vérifie partout (7.3). D'autre part, d'après (7.5),

$$u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = \frac{1}{2} u^\alpha \partial_\alpha (u^\beta u_\beta) = 0$$

et u^α étant unitaire sur Σ est unitaire partout.

Du raisonnement du paragraphe 4, il résulte que notre solution ($g_{\alpha\beta}$, ϱ, u^α) est une solution des équations d'Einstein (7.1), (7.2). *Nous avons ainsi établi pour ce cas un théorème local d'existence et d'unicité physique pour le problème de Cauchy* (Madame CHOQUET-BRUHAT [3]).

II. Hydrodynamique relativiste

8. *Schéma milieu continu*

Donnons nous, dans un domaine d'espace-temps, un schéma décrit par un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ déterminant une forme quadratique définie positive; $T_{\alpha\beta}$ admet, par rapport à $g_{\alpha\beta}$ des valeurs et vecteurs propres réels. Soit u_α (resp. $v^{(i)}_\alpha$) le (resp. un) vecteur propre normé temporel (resp. spatial) et soit ϱ (resp. $-p_{(i)}/c^2$) la valeur propre correspondante. On a [6].

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + \sum_i \frac{p_{(i)}}{c^2} v^{(i)}_\alpha v^{(i)}_\alpha \quad (\varrho, p_{(i)} > 0) \tag{8.1}$$

soit

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + \Pi_{\alpha\beta}$$

avec

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_i \frac{p_{(i)}}{c^2} v^{(i)}_\alpha v^{(i)}_\beta \quad (\Pi_{\alpha\beta} u^\beta = 0) .$$

Nous traduirons ce résultat en disant qu'un tel schéma peut être interprété comme un *schéma milieu continu*: u_α est le *vecteur vitesse unitaire* du milieu, ϱ sa *densité d'énergie propre*;

$\Pi_{\alpha\beta}$ est le *tenseur des pressions* du milieu et des $p_{(i)}$ sont dites les *pressions partielles propres.*

9. *Schéma fluide parfait thermodynamique*

a) Un schéma milieu continu est dit décrire un *fluide parfait* si les pressions partielles propres sont égales. On a alors:

$$p_{(1)} = p_{(2)} = p_{(3)} = p$$

où p est la *pression du fluide.* La formule (8.1) devient:

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + \frac{p}{c^2} \sum_i v_\alpha^{(i)} v_\beta^{(i)} .$$

Or:

$$\sum_i v_\alpha^{(i)} v_\beta^{(i)} = u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta} .$$

On obtient ainsi:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\varrho + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta} \tag{9.1}$$

et le tenseur des pressions s'écrit:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{p}{c^2} (u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}) .$$

Comme dans le schéma matière pure, l'espace-temps correspondant admet comme directions principales une direction privilégiée u^α orientée dans le temps et toute direction orthogonale à celle-ci.

b) Nous adoptons dans la suite, en ce qui concerne les considérations thermodynamiques, un point de vue développé par Taub [8], [9], [10]. La densité d'énergie propre représentée par ϱ comprend une *densité matérielle propre* et une *densité d'énergie interne* du fluide. Nous posons:

$$\varrho = r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) \quad (r > 0) \tag{9.2}$$

où r est dite la *densité matérielle propre* du fluide et ε son *énergie interne spécifique.* Cette énergie interne spécifique doit être considérée comme une fonction donnée de deux variables thermodynamiques du fluide, r et p par exemple, fonction dépendant de la structure interne du fluide

$$\varepsilon = \varepsilon(r, p) . \tag{9.3}$$

Dan (9.1) apparait le scalaire:

$$\varrho + \frac{p}{c^2} = r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) + \frac{p}{c^2} = r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{rc^2}\right) .$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire le scalaire:

$$i = \varepsilon + \frac{p}{r} \tag{9.4}$$

appelé *enthalpie spécifique* du fluide. On a ainsi:

$$\varrho + \frac{p}{c^2} = r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \tag{9.5}$$

et le tenseur d'énergie s'écrit:

$$T_{\alpha\beta} = r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta} . \tag{9.6}$$

c) La *température propre* T du fluide et son *entropie spécifique* S peuvent être définies, comme en hydrodynamique classique, par la relation différentielle

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,d\left(\frac{1}{r}\right) \tag{9.7}$$

où $T^{-1} > 0$ est un facteur intégrant pour la forme différentielle figurant au second membre de (9.7). De (9.4) on déduit par différentiation:

$$di = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{dp}{r} .$$

Il en résulte:

$$T\,dS = di - \frac{dp}{r} . \tag{9.8}$$

10. Equations aux lignes de courant

a) Nous avons vu que les équations d'Einstein $S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$ entrainent pour le tenseur d'énergie les conditions de conservation

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0 . \tag{10.1}$$

Explicitons ces conditions pour le tenseur d'énergie d'un fluide de parfait thermodynamique

$$T_{\alpha\beta} = r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta} .$$

Il vient ainsi:

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha \left[r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u^\alpha\right] u_\beta + r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta p}{c^2} = 0 . \tag{10.2}$$

Par produit par u^β, on en déduit l'équation de «continuité»:

$$u^\beta \nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha \left[r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u^\alpha\right] - u^\alpha \frac{\partial_\alpha p}{c^2} = 0 . \tag{10.3}$$

En reportant dans (10.2), on obtient:

$$r\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{\partial_\alpha p}{c^2} , \tag{10.4}$$

c'est-à-dire un système différentiel qui régit les *lignes de courant*, trajectoires spatiotemporelles du champ des vecteurs-vitesses.

b) Supposons un instant *le mouvement du fluide isentropique*, c'est-à-dire $S = \text{const.}$

On a alors, d'après (9.8),

$$dp = r\,di$$

et le système (10.4) aux lignes de courant peut s'écrire:

$$\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{\partial_\alpha i}{c^2} .$$

En introduisant le scalaire nécessairement positif:

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}$$

il vient:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{\partial_\alpha f}{f} \tag{10.5}$$

On peut interpréter le système différentiel (10.5) en disant qu'il exprime que les lignes de courant sont, dans le cas du fluide isentropique, géodésiques de la métrique $ds^2 = f^2 \overline{ds}^2$ conforme à la métrique ds^2 d'espace-temps.

Nous allons montrer ce résultat en établissant le lemme général suivant qui nous sera utile dans la suite [6].

Lemme. *f étant un scalaire positif quelconque et u_α un champ unitaire de vecteurs, si $C_\alpha = f u_\alpha$ et $\bar{g}_{\alpha\beta} = f^2 g_{\alpha\beta}$, on a la formule*

$$\bar{C}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha C_\beta = u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - (g^\alpha{}_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{\partial_\alpha f}{f}$$

où $\bar{C}^\alpha$ sont les composantes contravariantes correspondant à C_α dans la métrique $\bar{g}_{\alpha\beta}$ et où $\bar{\nabla}_\alpha$ est l'opérateur de dérivation covariante dans cette métrique.

Nous sommes ainsi amenés à poser:

$$\bar{C}^\alpha = f^{-1} u^\alpha, \quad C^\alpha = f u^\alpha .$$

D'après l'expression des symboles de Christoffel, il vient:

$$\bar{\nabla}_\alpha C_\beta = \nabla_\alpha C_\beta - \frac{\partial_\alpha f}{f} C_\beta - \frac{\partial_\beta f}{f} C_\alpha + C^f \frac{\partial_\varrho f}{f} g_{\alpha\beta} ,$$

c'est-à-dire

$$\bar{\nabla}_\alpha C_\beta = f \nabla_\alpha u_\beta + \partial_\alpha f u_\beta - \partial_\alpha f u_\beta - \partial_\beta f u_\alpha + u^\varrho \partial_\varrho f g_{\alpha\beta} .$$

Il en résulte:

$$\bar{C}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha C_\beta = f^{-1} u^\alpha \bar{\nabla}_\alpha C_\beta = u^\alpha \bar{\nabla}_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta f}{f} + u^\alpha u_\beta \frac{\partial_\alpha f}{f} ,$$

c'est-à-dire la formule annoncée.

De ce lemme général résulte immédiatement l'interprétation signalée de (10.5).

c) Nous sommes ainsi conduits dans tous les cas à introduire le scalaire positif:

$$f = 1 + \frac{i}{c^2} \tag{10.6}$$

et le vecteur C défini par:

$$C_\alpha = f u_\alpha \quad C^\alpha = f u^\alpha .$$

Nous appelons f *l'indice du fluide* thermodynamique et notons que sa donnée est équivalente à celle de l'enthalpie spécifique; C sera dit le *vecteur-courant* du fluide [6].

Le système différentiel (10.4) peut s'écrire:

$$f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - (g^\alpha{}_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{\partial_\alpha p}{c^2 r} = 0 .$$

Or d'après (9.8):

$$\frac{dp}{c^2 r} = df - \frac{T\,dS}{c^2} . \tag{10.7}$$

Par suite notre système différentiel aux lignes de courant s'écrit:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial_\alpha f}{f} - \frac{T\,\partial_\alpha S}{c^2 f} \right) = 0 . \tag{10.8}$$

Du lemme précédent, il résulte que si l'on introduit la métrique $\overline{ds}^2 = f^2\,ds^2$, (10.8) peut s'écrire:

$$\overline{C}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{T}{c^2 f} \partial_\alpha S = 0 , \tag{10.9}$$

ou

$$C^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{T f}{c^2} \partial_\alpha S = 0 . \tag{10.10}$$

11. Equation de continuité et conservation de la densité de matière

L'équation de continuité (10.3) peut s'écrire:

$$\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \nabla_\alpha (r u^\alpha) + \frac{1}{c^2} r u^\alpha \left(\partial_\alpha i - \frac{\partial_\alpha p}{r}\right) = 0 .$$

On déduit ainsi de (9.8) la forme suivante de l'équation de continuité:

$$f \nabla_\alpha (r u^\alpha) + \frac{1}{c^2} r T u^\alpha \partial_\alpha S = 0 . \tag{11.1}$$

Comme f, r et T sont positifs, on voit sur (11.1) que l'inégalité

$$u^\alpha \partial_\alpha S \geqq 0$$

entraine l'inégalité

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) \leqq 0 ,$$

ces inégalités ayant des interprétations physiques évidentes.

Nous dirons que *le mouvement du fluide est adiabatique* si

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0 , \tag{11.2}$$

c'est-à-dire si l'entropie spécifique est constante le long des lignes de courant du fluide. D'après (11.1), *il est équivalent de postuler que le mouvement est adiabatique ou que*:

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0 , \tag{11.3}$$

c'est-à-dire que la densité de matière propre r est conservative. Nous ferons ce postulat dans toute la suite, le mouvement du fluide étant, sinon, sous-déterminé [10]. On peut envisager que (11.3) est une propriété nécessaire de la densité matérielle.

12. Equations d'Helmholtz relativistes

Au courant C envisagé comme une 1-forme, nous pouvons associer sa différentielle extérieure

$$\Omega = dC\,, \tag{12.1}$$

qui est une 2-forme fermée ($d\Omega = 0$). Elle définit un tenseur antisymétrique

$$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha \tag{12.2}$$

que nous appelons le *tenseur tourbillon* du mouvement du fluide [5].

Nous nous proposons d'abord de mettre le système aux lignes de courant sous une forme simple faisant intervenir le tenseur tourbillon Ω. D'après (10.9) et compte-tenu de l'équation $u^\alpha \partial_\alpha S = 0$, le système aux lignes de courant peut s'écrire:

$$\overline{C}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + \frac{T}{c^2 f}\partial_\beta S = 0\,.$$

Or:

$$\overline{C}^\alpha \Omega_{\alpha\beta} = \overline{C}^\alpha(\overline{\nabla}_\alpha C_\beta - \overline{\nabla}_\beta C_\alpha) = \overline{C}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta\,,$$

puisque le courant envisagé dans la métrique $\overline{ds^2}$ est unitaire. Il vient ainsi pour le système aux lignes de courant:

$$\overline{C}^\alpha \Omega_{\alpha\beta} = -\frac{T}{c^2 f}\partial_\beta S$$

soit, après multiplication par f^2:

$$C^\alpha \Omega_{\alpha\beta} = -\frac{Tf}{c^2}\partial_\beta S\,. \tag{12.3}$$

Nous voyons ainsi que le système aux lignes de courant peut s'écrire sous forme intrinsèque:

$$i(C)\,\Omega = -\frac{Tf}{c^2}\,dS\,, \tag{12.4}$$

où $i(C)$ désigne l'opérateur de produit intérieur par C.

Pour former la généralisation relativiste des équations d'Helmholtz, évaluons $\mathscr{L}(C)\Omega$, où $\mathscr{L}(C)$ est l'opérateur de transformation infinitésimale défini par le champ de vecteurs C. Il vient:

$$\mathscr{L}(C)\,\Omega = (d\,i(C) + i(C)d)\Omega = d\,i(C)\Omega$$

puisque $d\Omega = 0$. Il résulte ainsi de (12.4) les équations de Helmholtz:

$$\mathscr{L}(C)\,\Omega = -\frac{1}{c^2}\,d(Tf) \wedge dS\,, \tag{12.5}$$

Ces équations peuvent s'écrire explicitement:

$$C^\varrho \nabla_\varrho \Omega_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha C^\varrho \Omega_{\varrho\beta} + \nabla_\beta C^\varrho \Omega_{\alpha\varrho} = -\frac{1}{c^2}\,[\partial_\alpha(Tf)\,\partial_\beta S - \partial_\beta(Tf)\,\partial_\alpha S] \quad (12.6)$$

et nous verrons qu'elles jouent un rôle important dans l'étude du système des équations de l'hydrodynamique relativiste.

13. Le système de l'hydrodynamique relativiste et ses caractéristiques

a) Au lieu de prendre comme variables thermodynamiques r et p, il peut être commode, dans la suite, d'adopter pour telles variables les variables f et S (indice du fluide équivalent à l'enthalpie spécifique et entropie spécifique). Nous supposons par suite que r est une fonction connue de f et S,

$$r = r(f, S)\,.$$

La pression $p = p(f, S)$ du fluide satisfait alors, d'après (10.7), la relation différentielle:

$$dp = c^2\,r\,df - r\,T\,dS\,. \quad (13.1)$$

b) Cela posé, nous nous proposons d'étudier le problème de Cauchy pour le système fondamental de l'hydrodynamique relativiste constitué par les équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi\,T_{\alpha\beta} = \chi\left(r\,f\,u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2}\,g_{\alpha\beta}\right) \quad (13.2)$$

avec

$$g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 1 \quad (13.3)$$

et par l'équation:

$$u^\alpha\,\partial_\alpha S = 0\,. \quad (13.4)$$

Sur l'hypersurface Σ, d'équation locale $x^0 = 0$, nous nous donnons les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières, ainsi que celle de S, supposées telles que $g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$ soit hyperbolique normale, non tangente aux cônes élémentaires ($g^{00} \neq 0$) et que sur Σ, $F^\varrho = 0$. De ces données on sait qu'on peut déduire les valeurs sur Σ des S^0_α. De:

$$S^0_\alpha = \chi\left(r\,f\,u^0 u_\alpha - \frac{p}{c^2}\,g^0_\alpha\right)$$

on déduit, d'après le caractère unitaire de u^α, que sur Σ:

$$(\chi\,r\,f\,u^0)^2 = g^{\alpha\beta}\left(S^0_\alpha + \chi\,\frac{p}{c^2}\,g^0_\alpha\right)\left(S^0_\beta + \chi\,\frac{p}{c^2}\,g^0_\beta\right)\,.$$

Nous posons:

$$[\Omega^0(p)]^2 = g^{\alpha\beta}\left(S^0_\alpha + \chi\,\frac{p}{c^2}\,g^0_\alpha\right)\left(S^0_\beta + \chi\,\frac{p}{c^2}\,g^0_\beta\right)$$

où le second membre est une fonction du second degré de p, dont nous supposons les valeurs positives pour le domaine envisagé des valeurs de p.

Il en résulte:

$$u_\alpha = \frac{S^0_\alpha + \chi \frac{p}{c^2} g^0_\alpha}{\Omega^0(p)} \qquad u^0 = \frac{S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00}}{\Omega^0(p)} \qquad \chi r f = \frac{[\Omega^0(p)]^2}{S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00}} \,. \tag{13.5}$$

S étant connue sur Σ, la dernière équation (13.5) est une condition portant sur les valeurs possibles de f sur Σ. Cette condition s'écrit:

$$F(f, x^i) = \chi r f \left(S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00}\right) - g^{\alpha\beta} \left(S^0_\alpha + \chi \frac{p}{c^2} g^0_\alpha\right) \left(S^0_\beta + \chi \frac{p}{c^2} g^0_\beta\right) = 0$$

où toutes les quantités dépendent des x^i à l'exception de p qui doit être considéré comme une fonction de f.

Il est intéressant d'évaluer la dérivée F'_f; il vient d'après (13.1)

$$\chi^{-1} F'_f = (f r'_f + r) \left(S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00}\right) + \chi r f g^{00} r - 2 g^{\alpha 0} \left(S^0_\alpha + \chi \frac{p}{c^2} g^0_\alpha\right) r$$

soit:

$$\chi^{-1} F'_f = (f r'_f - r) \left(S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00}\right) + \chi r f g^{00} r \,.$$

Or d'après (13.5):

$$S^{00} + \chi \frac{p}{c^2} g^{00} = \chi r f (u^0)^2 \,.$$

Il en résulte:

$$F'_f = \chi^2 r^2 f \left[g^{00} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right) (u^0)^2\right] .$$

En dehors des données $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$, S sur Σ *nous nous donnons aussi sur* Σ, *la valeur de* f *vérifiant* $F(f, x^i) = 0$ *et n'annulant pas* F'_f; les valeurs sur Σ de r, p, T donc des u_α sont alors connues. *La présence d'ondes de choc est écartée.*

c) En vertu du raisonnement du paragraphe 4, nous pouvons substituer au système (13.2), (13.3), (13.4) le système composé de (13.4), des dix équations

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi \left[r f u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} \left(r f - 2 \frac{p}{c^2}\right) g_{\alpha\beta}\right] \tag{13.6}$$

de l'équation, équivalente modulo (13.4) à l'équation de continuité:

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = r \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \partial_\alpha r = 0 \tag{13.7}$$

et du système aux lignes de courant qui s'écrit d'après (13.1):

$$r f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \left(r \partial_\alpha f - \frac{r T}{c^2} \partial_\alpha S\right) = 0 \,. \tag{13.8}$$

Nous notons que, d'après (13.8), $u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0$ et que par suite u_β, initialement unitaire, le restera.

Les données de Cauchy étant supposées données en termes de *séries formelles des coordonnées locales*, nous nous proposons de chercher des séries formelles correspondant à ces données de Cauchy et solutions du système (13.4), (13.6), (13.7), 13.8). De (13.6) on déduit, puisque $g^{00} \neq 0$, les valeurs sur Σ des dérivées $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$. L'équation (13.4) donne, pour $u^0 \neq 0$, la valeur sur Σ de $\partial_0 S$.

Pour obtenir les valeurs sur Σ de $\partial_0 u^0$ et $\partial_0 f$, notons que (13.7) s'écrit

$$r\, \partial_0 u^0 + u^0 r'_f\, \partial_0 f = \varphi\,, \tag{13.9}$$

où la valeur du second membre φ est connue sur Σ. De même l'équation (13.8) correspond à $\beta = 0$ s'écrit:

$$r f u^0\, \partial_0 u^0 - [g^{00} - (u^0)^2]\, r\, \partial_0 f = \psi\,, \tag{13.10}$$

où la valeur du second membre ψ est encore comme sur Σ. Les équations (13.9), (13.10) déterminent les valeurs sur Σ de $\partial_0 u^0$ et $\partial_0 f$ si le déterminant

$$r\,[g^{00} - (u^0)^2] + f r'_f (u^0)^2$$

est différent de zéro, soit:

$$g^{00} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)(u^0)^2 \neq 0\,. \tag{13.11}$$

S'il en est ainsi $\partial_0 u^0$, $\partial_0 f$ et par suite les $\partial_0 u^i$ ($i = 1, 2, 3$), d'après les équations (13.8) non encore utilisées, auront des valeurs déterminées sur Σ.

Sous les hypothèses faites:

$$g^{00} \neq 0\,, \quad u^0 \neq 0 \quad g^{00} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)(u^0)^2 \neq 0$$

les mêmes conclusions s'étendent, par dérivation en x^0 des différentes équations envisagées, à la détermination des dérivées successives.

Ainsi, sous nos hypothèses, se trouvent déterminées de manière unique les séries formelles cherchées. Si toutes les données sont analytique, il résulte du raisonnement classique de Cauchy-Kowalevska que l'on obtient ainsi *une solution analytique unique du problème de Cauchy relatif au système* (13.4), (13.6), (13.7), (13.8).

d) Nous avons ainsi déterminé les variétés caractéristiques du système précédent ou, ce qui est équivalent, du système (13.2), (13.3), (13.4). Ces variétés, d'équation locale $\varphi = 0$, se divisent en trois sortes

1) Les *fronts d'ondes gravitationnels*, solutions de

$$g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \varphi\, \partial_\beta \varphi = 0\,. \tag{13.12}$$

2) *Les hypersurfaces* (manifestement du genre temps) *engendrées par les lignes de courant*, solutions de

$$u^\alpha\, \partial_\alpha \varphi = 0\,. \tag{13.13}$$

3) Les *fronts d'ondes hydrodynamiques*, solutions de:

$$\left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right) u^\alpha u^\beta\right] \partial_\alpha \varphi\, \partial_\beta \varphi = 0\,. \tag{13.14}$$

On sait (voir par exemple LICHNEROWICZ [6] p. 42—43) que lavitesse v de propagation d'ondes est donnée par:

$$\frac{v^2}{c^2} = -\frac{u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi}{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi}. \tag{13.15}$$

Pour les ondes (13.14), on a:

$$-(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi = \frac{f r'_f}{r} u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi .$$

Ainsi pour les fronts d'onde hydrodynamiques, il vient:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{r}{f r'_f} . \tag{13.16}$$

Nous supposons dans la suite que, dans le domaine envisagé, $r(f, S)$ est tel que:

$$\frac{f r'_f}{r} \geqq 1 , \tag{13.17}$$

ce qui entraîne $v^2 \leqq c^2$. Il est équivalent de dire que les hypersurfaces (13.14) sont du genre temps.

14. Laplacien du courant C

Pour mettre en évidence un système du type de Leray dérivé du système (13.2), (13.3), (13.4), nous allons compléter les équations d'Helmholtz relativistes par des relations faisant intervenir le laplacien ΔC du courant et qui, compte-tenu du système aux lignes de courant, se présentent comme des conséquences de l'équation de continuité.

a) Proposons-nous d'évaluer le laplacien du courant:

$$\Delta C = (d\delta + \delta d) C , \tag{14.1}$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure et δ celui de codifférentiation. D'après la définition du tourbillon Ω

$$\Delta C = d\delta C + \delta \Omega .$$

Nous sommes donc conduits à calculer:

$$\delta C = -\nabla_\alpha C^\alpha = -\nabla_\alpha (f u^\alpha)$$

à partir de l'équation de continuité prise sous la forme (10.3):

$$\nabla_\alpha (r f u^\alpha) = u^\alpha \frac{\partial_\alpha p}{c^2} .$$

D'après (13.1) et (13.4) cette équation peut s'écrire:

$$\nabla_\alpha (r f u^\alpha) = r u^\alpha \partial_\alpha f$$

soit:

$$r \nabla_\alpha (f u^\alpha) + f u^\alpha \partial_\alpha r = r u^\alpha \partial_\alpha f .$$

On obtient ainsi:

$$-\nabla_\alpha (f u^\alpha) = f u^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha r}{r} - \frac{\partial_\alpha f}{f} \right) ,$$

c'est-à-dire:

$$\delta C = C^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha r}{r} - \frac{\partial_\alpha f}{f} \right) .$$

Introduisons la fonction des deux variables $h = f^2$ et S définie par:

$$H(h, S) = \log \left(\frac{r}{f} \right) . \tag{14.2}$$

Il vient ainsi:

$$\delta C = i(C)\, dH$$

et par suite:

$$d\, \delta C = d\, i(C)\, dH = \mathscr{L}(C)\, dH .$$

Nous obtenons:

$$\Delta C = \mathscr{L}(C)\, dH + \delta \Omega . \tag{14.3}$$

b) Nous sommes ainsi conduits à évaluer $\mathscr{L}(C)\, dH$. Il vient d'abord:

$$\partial_\lambda H = H'_h\, \partial_\lambda f^2 + H'_S\, \partial_\lambda S .$$

Or:

$$\partial_\lambda f^2 = \nabla_\lambda (C^\alpha C_\alpha) = 2 C^\alpha \nabla_\lambda C_\alpha .$$

On en déduit:

$$\partial_\lambda H = 2 H'_h C^\alpha \nabla_\lambda C_\alpha + H'_S\, \partial_\lambda S$$

soit en introduisant le tenseur tourbillon:

$$\partial_\lambda H = 2 H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda - 2 H'_h C^\alpha \Omega_{\alpha\lambda} + H'_S\, \partial_\lambda S .$$

D'après le système des équations aux lignes de courant pris sous la forme (12.3) on a:

$$\partial_\lambda H = 2 H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda + \left(2 H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S \right) \partial_\lambda S . \tag{14.4}$$

Dans la suite de ce paragraphe et dans le suivant, nous considérons f ou h comme fonction des variables $g_{\alpha\beta}$ et C^α puisque $h = f^2 = g_{\alpha\beta} C^\alpha C^\beta$. Cela posé de (14.4) on déduit:

$$[\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda = 2 H'_h\, C^\alpha C^\beta\, \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + \left(2 H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S \right) C^\beta \nabla_\beta \nabla_\lambda S +$$
$$+ \varphi_\lambda (1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\})$$

où la notation indique *l'ordre maximum des dérivées figurant dans les fonctions* φ_λ. Or:

$$C^\beta \nabla_\beta \nabla_\lambda S = C^\beta \nabla_\lambda \nabla_\beta S = \nabla_\lambda (C^\beta \nabla_\beta S) - \nabla_\lambda C^\beta\, \partial_\beta S .$$

Il en résulte; d'après (13.4):

$$\begin{aligned} [\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda &= 2 H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + \\ &+ \psi_\lambda (1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\}) . \end{aligned} \tag{14.5}$$

c) D'après une formule classique de géométrie riemannienne, on a:

$$(\Delta C)_\lambda = -g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + R_\lambda{}^\varrho C_\varrho . \tag{14.6}$$

De (14.3), (14.5), (14.6), on déduit que le courant vérifie le système d'équations:

$$\begin{aligned}&[g^{\alpha\beta} + 2H'_h C^\alpha C^\beta] \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda - R_{\lambda\varrho} C^\varrho + (\delta\Omega)_\lambda + \\ &+ \psi_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\}) = 0\,.\end{aligned} \tag{14.7}$$

Evaluons H'_h. On a immédiatement:

$$2H'_h = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial f} \log\left(\frac{r(f,S)}{f}\right).$$

Or:

$$\frac{\partial}{\partial f} \log \frac{r(f,S)}{f} = \frac{r'_f}{r} - \frac{1}{f}\,.$$

Il en résulte

$$2H'_h = -\frac{1}{f^2}\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)$$

et (14.7) s'écrit:

$$\begin{aligned}&\left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}\right] \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda - R_{\lambda\varrho} C^\varrho + (\delta\Omega)_\lambda + \\ &+ \psi_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\}) = 0\,.\end{aligned} \tag{14.8}$$

d) En faisant agir sur (14.8) l'opérateur $C^\varrho \nabla_\varrho$, on voir apparaître:

$$C^\varrho \nabla_\varrho (\delta\Omega)_\lambda = - C^\varrho \nabla_\varrho \nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\lambda$$

qu'on peut évaluer à l'aide des équations de Helmholtz. On a en effet d'après l'identité de Ricci:

$$C^\varrho \nabla_\varrho \nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\lambda - C^\varrho \nabla_\alpha \nabla_\varrho \Omega^\alpha{}_\lambda = C^\varrho [R^\alpha{}_{\sigma,\varrho\alpha} \Omega^\sigma{}_\lambda - R^\sigma{}_{\lambda,\varrho\alpha} \Omega^\alpha{}_\sigma]\,.$$

On en déduit:

$$C^\varrho \nabla_\varrho (\delta\Omega)_\lambda = -C^\varrho \nabla_\alpha \nabla_\varrho \Omega^\alpha{}_\lambda + R_{\varrho\sigma} C^\varrho \Omega^\sigma{}_\lambda + R_\lambda{}^\alpha{}_,{}_\varrho{}^\beta C^\varrho \Omega_{\alpha\beta}\,. \tag{14.9}$$

Or:

$$C^\varrho \nabla_\alpha \nabla_\varrho \Omega^\alpha{}_\lambda = \nabla_\alpha (C^\varrho \nabla_\varrho \Omega^\alpha{}_\lambda) - \nabla_\alpha C^\varrho \nabla_\varrho \Omega^\alpha{}_\lambda\,.$$

Il résulte des équations de Helmholtz (12.6) et de (14.9) que:

$$C^\varrho \nabla_\varrho (\delta\Omega)_\lambda = \chi_\lambda(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{\Omega_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } \{C^\alpha\})$$

et (14.8), dérivé le long des lignes de courant donne ainsi:

$$\begin{aligned}&C^\varrho \left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}\right] \partial_{\varrho\alpha\beta} C^\lambda - \\ &- \alpha^\lambda(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{\Omega_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } \{C^\alpha\}) = 0\,.\end{aligned} \tag{14.10}$$

15. Théorème d'existence et unicité

a) Nous prenons comme fonctions inconnues les dix $g_{\alpha\beta}$, le scalaire S, les six $\Omega_{\alpha\beta}$ et les quatre C^α. Nous considérons le système aux dérivées partielles défini par les équations:

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi\left[r\frac{C_\alpha C_\beta}{f} - \frac{1}{2}\left(rf - 2\frac{p}{c^2}\right) g_{\alpha\beta}\right] \tag{15.1}$$

(où f est considéré comme fonction des $g_{\alpha\beta}$ et des C^α), l'équation relative à l'entropie

$$C^\alpha \, \partial_\alpha S = 0 \tag{15.2}$$

les équation de Helmholtz

$$C^\varrho \, \partial_\varrho \Omega_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, \ 1 \text{ en } S, \ 0 \text{ en } \{\Omega_{\alpha\beta}\}, \ 1 \text{ en } \{C^\alpha\}) \tag{15.3}$$

et les équation (14.10) soit:

$$\begin{gathered} C^\varrho \left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r_f'}{r}\right) \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2} \right] \partial_{\varrho\alpha\beta} C^\lambda \\ = \alpha^\lambda (3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, \ 2 \text{ en } S, \ 1 \text{ en } \{\Omega_{\alpha\beta}\}, \ 2 \text{ en } \{C^\alpha\}) \end{gathered} \tag{15.4}$$

Le système (15.1), (15.2), (15.3), (15.4) appartient au type (5.1) étudié par Leray, la matrice A, ici 21×21, étant la matrice diagonale dont les éléments diagonaux ont respectivement pour valeurs:

$$\begin{gathered} a(1) = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}, \quad a(2) = a(3) = C^\alpha \partial_\alpha, \\ a(4) = C^\varrho \left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r_f'}{r}\right) \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2} \right] \partial_{\varrho\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{15.5}$$

Notre système satisfait aux hypothèses faites sur les dérivées avec les indices suivants pour les inconnues:

$$s(g_{\alpha\beta}) = 4 \quad s(S) = 3 \quad s(\Omega_{\alpha\beta}) = 2 \quad s(C^\alpha) = 3$$

et pour les équations:

$$t(1) = 3 \quad t(2) = 3 \quad t(3) = 2 \quad t(4) = 1 .$$

En effet $a(1)$ est d'ordre 2, $a(2)$ et $a(3)$ d'ordre 1, $a(4)$ d'ordre 3. En ce qui concerne les coefficients de ces opérateurs et les seconds membres, dressons le tableau suivant donnant pour chaque inconnue et équation l'ordre maximum de dérivation qui peut apparaître conformément aux indices. Il vient:

$$(1)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 1 \\ S : 0 \\ \Omega_{\alpha\beta} : -1 \\ C^\alpha : 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 1 \\ S : 0 \\ \Omega_{\alpha\beta} : -1 \\ C^\alpha : 0 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 2 \\ S : 1 \\ \Omega_{\alpha\beta} : 0 \\ C^\alpha : 1 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 3 \\ S : 2 \\ \Omega_{\alpha\beta} : 1 \\ C^\alpha : 2 \end{cases}$$

ces ordres maxima sont bien respectés dans le système envisagé.

b) Nos données de Cauchy sur Σ sont constituées, comme nous l'avons vu, par *les valeurs des potentiels, de leurs dérivées premières, de f et de S*. Nous supposons qu'elles sont telles que:

1) *La forme quadratique $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu$ soit hyperbolique normale, l'hypersurface Σ étant spatiale en chacun de ses points, relativement au cône élémentaire en ce point C_x.*

2) *On ait sur Σ*

$$F^\varrho = 0 . \quad (\text{pour } x^0 = 0) .$$

3) *Les données de S et de f (astraintes à $F = 0$) déterminent par les relations $S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ des valeurs sur Σ admissibles pour p et les C^α avec*

$$\frac{f r'_f}{r} \geqq 1 . \tag{15.6}$$

Nous avons la même situation qu'au paragraphe 7 en ce qui concerne les opérateurs $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$: à $a(1)$ correspond le demi-cône $\Gamma^+_x(1)$ défini par:

$$g^{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu \geqq 0$$

avec $\xi(v) \geqq 0$ pour un vecteur $v \in C^+_x$. A $a(2)$ et $a(3)$ correspond le demi-cône $\Gamma^+_x(2) = \Gamma^+_x(3)$ défini par

$$C^\lambda\xi_\lambda \geqq 0 \quad (C^\lambda \in C^+_x)$$

dans les mêmes conditions. Enfin le demi-cône $\hat{\Gamma}^+_x$ défini à partir de:

$$\left[g^{\lambda\mu} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^\lambda C^\mu}{f^2}\right]\xi_\lambda\xi_\mu \geqq 0$$

est extérieur au demi-cône $\Gamma^+_x(1)$ et ne coupe pas le plan $C^\lambda\xi_\lambda = 0$, sous l'hypothèse (15.6). Il en résulte que l'intersection de $\Gamma^+_x(1)$, $\Gamma^+_x(2) = \Gamma^+_x(3)$, $\Gamma^+_x(4)$ *a* un intérieur non vide qui est l'intérieur de $\Gamma^+_x(1)$. On voit ainsi que la matrice A est *hyperbolique.*

Les équations (15.1) déterminent les valeurs sur Σ des dérivées secondes des $g_{\alpha\beta}$, (15.2) celles des dérivées premières de S. Les équations (13.7), (13.8) fournissent, comme nous l'avons vu, les dérivées premières des C^α. Par dérivation, (15.1) donne les dérivées troisièmes des $g_{\alpha\beta}$ et (15.2) les dérivées secondes de S. Les équations (15.3) donnent les dérivées premières des $\Omega_{\alpha\beta}$ et (14.7) les dérivées secondes des C_α (au total dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma) - 1$).

Nous obtenons ainsi un problème de Cauchy relatif au système (15.1), (15.2), (15.3), (15.4). Pour des données initiales suffisamment régulières, *le théorème de Leray montre que ce problème de Cauchy admet une solution* ($g_{\alpha\beta}$, S, $\Omega_{\alpha\beta}$, C^α) *unique.*

c) Il nous faut enfin établir que ($g_{\alpha\beta}$, S, C^α) nous donne bien une solution du système (13.4), (13.6), (13.7), (13.8). Nous avons montré au paragraphe 13 que, pour des données de Cauchy analytiques, le système formé par ces équations admet, sous nos hypothèses, une solution unique ($g_{\alpha\beta}$, S, C^α). Cette solution, avec $\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha$ vérifie nécessairement le système (15.1), (15.2), (15.3), (15.4) et, d'après le choix des données de Cauchy adoptées, coïncide avec la solution de ce système fournie par le théorème de Leray.

Un procédé standard de passage à la limite montre alors que cette dernière solution vérifie le système (13.4), (13.6), (13.7), (13.8) dans le cas où les données ne sont plus supposées analytiques, mais seulement suffisamment différentiables. Le raisonnement du paragraphe 4 achève de montrer que nous avons obtenu *un théorème local d'existence et d'unicité physique pour le problème de Cauchy relatif aux équations* (13.3), (13.3), (13.4) *du fluide parfait thermodynamique relativiste.*

16. Autre méthode

Pour établir le théorème précédent, nous allons indiquer une autre méthode qui ne fait pas intervenir le tenseur-tourbillon.

a) Le système différentiel (10.5) aux lignes de courant s'écrit:

$$f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\, \partial_\alpha f + \frac{rT}{c^2} g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha S = 0 \tag{16.1}$$

et l'équation de continuité:

$$\nabla_\beta (r u^\beta) = 0$$

peut se mettre sous la forme:

$$r \nabla_\beta u^\beta + r'_f u^\beta\, \partial_\beta f = 0\,. \tag{16.2}$$

Prenons la dérivée covariante contractée ∇_β de (16.1). Il vient:

$$\begin{aligned}(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\, \nabla_\alpha \nabla_\beta f - f u^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha u^\alpha - \frac{rT}{c^2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta S \\ = A(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } f,\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{u^\alpha\})\,.\end{aligned} \tag{16.3}$$

Or d'après l'identité de Ricci:

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\beta = \nabla_\alpha \nabla_\beta u^\beta + R_{\alpha\varrho} u^\varrho\,.$$

De l'équation (16.2) il résulte:

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\beta = -\nabla_\alpha \left(\frac{r'_f}{r} u^\beta\, \partial_\beta f\right) + R_{\alpha\varrho} u^\varrho\,.$$

On en déduit:

$$u^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha u^\beta = -u^\alpha u^\beta \frac{r'_f}{r} \nabla_\alpha \nabla_\beta f + B(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } f,\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{u^\gamma\})\,.$$

En reportant dans (16.3) on obtient:

$$\begin{aligned}\left[g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \nabla_\alpha \nabla_\beta f = \frac{rT}{c^2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta S + \\ + C(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } f,\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{u^\gamma\})\,.\end{aligned} \tag{16.4}$$

Dérivons (16.4) le long des lignes de courant par l'action de l'opérateur $u^\gamma \nabla_\gamma$. Il vient:

$$u^\gamma g^{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta S = D(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } S,\ 2 \text{ en } \{u^\gamma\})$$

soit, compte-tenu de $u^\gamma\, \partial_\gamma S = 0$

$$u^\gamma g^{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta S = D(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } S,\ 2 \text{ en } \{u^\gamma\})\,.$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}u^\gamma \left[g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \partial_{\alpha\beta\gamma} f \\ = E(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } f,\ 2 \text{ en } S,\ 2 \text{ en } \{u^\gamma\})\,.\end{aligned} \tag{16.5}$$

b) Partons du système différentiel (16.1) aux lignes de courant et faisons agir sur les deux membres l'opérateur différentiel que nous venons de mettre en évidence $\left[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \nabla_\lambda \nabla_\mu$. Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} f u^\alpha \left[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \times \\ \times \left[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \nabla_\gamma \nabla_\mu \nabla_\alpha f + \frac{rT}{c^2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha S \\ = F^\beta(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } f, 2 \text{ en } S, 2 \text{ en } \{u^\gamma\}) , \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $u^\gamma \partial_\gamma S = 0$. On en déduit d'après (16.4):

$$\begin{aligned} f u^\gamma \left[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\gamma u^\beta - \frac{rT}{c^2} (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\, g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha S + \\ + \frac{rT}{c^2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha S = G^\beta(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } f, 2 \text{ en } S, 2 \text{ en } \{u^\gamma\}) . \end{aligned}$$

Il en résulte, compte-tenu toujours de $u^\alpha \partial_\alpha S = 0$

$$\begin{aligned} u^\gamma \left[g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \partial_{\lambda\mu\gamma} u^\beta \\ = H^\beta(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } f, 2 \text{ en } S, 2 \text{ en } \{u^\gamma\}) . \end{aligned} \tag{16.6}$$

c) Cela posé, prenons pour fonctions inconnues les dix $\{g_{\alpha\beta}\}$, les scalaires f et S, et les quatre $\{u^\beta\}$ définissant un vecteur arbitraire, soit 16 fonctions inconnues.

Nous substituons aux équations d'Einstein, les équations dérivées de (13.6) le long des lignes de courant. Au second membre, il apparait:

$$\begin{aligned} u^\gamma \nabla_\gamma \left[r f u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2}\left(r f - \frac{2p}{c^2}\right) g_{\alpha\beta}\right] \\ = u^\gamma\ \nabla_\gamma(r f)\ u_\alpha u_\beta + r f\ u^\gamma \nabla_\gamma(u_\alpha\, u_\beta) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u^\gamma \nabla_\gamma \left(r f - \frac{2p}{c^2}\right) . \end{aligned}$$

Compte-tenu du système différentiel (16.1) aux lignes de courant, on a:

$$\begin{aligned} u^\gamma \nabla_\gamma \left[r f u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2}\left(r f - \frac{2p}{c^2}\right) g_{\alpha\beta}\right] \\ = f_{\alpha\beta}(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 1 \text{ en } f, 1 \text{ en } S, 0 \text{ en } \{u^\gamma\}) . \end{aligned}$$

Nous considérons ainsi le système aux dérivées partielles constitué par les équations dérivées le long des lignes de courant des équations (13.6) soit:

$$-\frac{1}{2} u^\gamma g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta\gamma} g_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 1 \text{ en } f, 1 \text{ en } S, 0 \text{ en } \{u^\gamma\}) , \tag{16.7}$$

de l'équation formée en a:

$$\begin{aligned} u^\gamma \left[g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \partial_{\alpha\beta\gamma} f \\ = E(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } f, 2 \text{ en } S, 2 \text{ en } \{u^\gamma\}) , \end{aligned} \tag{16.8}$$

de l'équation

$$u^\gamma \partial_\gamma S = 0 \,, \tag{16.9}$$

et du système dérivé au b du système différentiel aux lignes de courant:

$$\begin{gathered} u^\gamma \left[g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \partial_{\alpha\beta\gamma} u^\lambda \\ = H^\lambda (3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } f,\ 2 \text{ en } S,\ 2 \text{ en } \{u^\gamma\}) \,. \end{gathered} \tag{16.10}$$

Ce système appartient au type de Leray, la matrice A, ici 16×16, étant la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont respectivement:

$$a(7) = -\frac{1}{2} u^\gamma g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta\gamma}, \quad a(8) = a(10) = u^\gamma \left[g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \partial_{\alpha\beta\gamma}$$
$$a(9) = u^\gamma \partial_\gamma \,.$$

Ce système satisfait aux hypothèses faites sur les ordres de dérivation, avec les indices suivants pour les inconnues:

$$s(g_{\alpha\beta}) = 4 \quad s(f) = 3 \quad s(S) = 3 \quad s(u^\gamma) = 3 \,,$$

et pour les équations:

$$t(7) = 2 \quad t(8) = 1 \quad t(9) = 3 \quad t(10) = 1 \,.$$

En effet $a(7)$ et $a(8) = a(10)$ sont d'ordre 3, $a(9)$ d'ordre 1. Le tableau donnant pour ces indices l'ordre maximum de dérivation, permis pour chaque équation et inconnue, s'écrit:

$$(7)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 2 \\ f \quad : 1 \\ S \quad : 1 \\ u^\gamma \quad : 1 \end{cases} \qquad (8)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 3 \\ f \quad : 2 \\ S \quad : 2 \\ u^\gamma \quad : 2 \end{cases} \qquad (9)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 1 \\ f \quad : 0 \\ S \quad : 0 \\ u^\gamma \quad : 0 \end{cases} \qquad (10)\begin{cases} g_{\alpha\beta} : 3 \\ f \quad : 2 \\ S \quad : 2 \\ u^\gamma \quad : 2 \end{cases}$$

Ces ordres maxima sont bien respectés dans notre système du c.

d) Donnons-nous, sur l'hypersurface Σ, des données de Cauchy constituées par les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières (vérifiant les hypothèses du paragraphe 15, b) ainsi que par la valeur de S.

Les équations (13.6) déterminent les valeurs sur Σ des dérivées secondes des $g_{\alpha\beta}$, (16.9) celles des dérivées premières de S. Les équations (13.7), (13.8) fournissent, comme nous l'avons vu, les dérivées premières de f et des u^γ. L'équation (16.9), par dérivation, donne les dérivées secondes de S et (16.7) les dérivées troisièmes des $g_{\alpha\beta}$. L'équation (16.4) fournit les valeurs des dérivées secondes de f et (16.1), par dérivation, celles des dérivées secondes des (u^γ). On a ainsi les dérivées d'ordre $\leqq s(\sigma) - 1$.

Nous obtenons un problème de Cauchy relatif au système (16.7), (16.8), (16.9), (16.10). Un raisonnement identique à celui du paragraphe 15 montre que ce dernier système est hyperbolique et que, pour des données initiales supposées suffisamment régulières, ce problème admet une solution unique, qui est solution du système primitif (13.2), (13.3), (13.4).

Le principe de cette méthode est particulièrement adapté à l'étude des équations de la magnéto-hydrodynamique relativiste (conductivité infinie), étude qui sera développée ailleurs.

III. Fluide thermodynamique chargé de conductivité nulle

17. Equations fondamentales de champ

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier le système des équations fondamentales de l'hydrodynamique relativiste d'un fluide parfait thermodynamique chargé à conductivité nulle.

a) Dans le domaine d'espace-temps envisagé, nous supposons qu'il existe un champ électromagnétique décrit par une 2-forme F satisfaisant aux équations de Maxwell

$$dF = 0 \tag{17.1}$$

et

$$\delta F = -J\,, \tag{17.2}$$

où J est le courant électrique. Les phénomènes d'induction sont négligés. L'équation (17.1) exprime qu'il existe localement un potentiel électromagnétique φ tel que $F = d\varphi$. L'équation (17.2) s'écrit explicitement:

$$-\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta\,. \tag{17.3}$$

Au champ électromagnétique F est associé le tenseur d'impulsion-énergie de Maxwell

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}) - F_{\alpha\varrho}F_\beta{}^\varrho \quad (g^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta} = 0)\,. \tag{17.4}$$

On sait qu'en vertu des équations de Maxwell:

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = F_{\alpha\beta}J^\alpha\,. \tag{17.5}$$

b) Le domaine envisagé est occupé par une distribution énergétique décrivant un fluide parfait thermodynamique chargé et le champ électromagnétique correspondant. La métrique d'espace-temps satisfait aux équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}\,, \tag{17.6}$$

où le tenseur d'impulsion énergie total $T_{\alpha\beta}$ est la somme:

$$T_{\alpha\beta} = \left(r f u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2}\, g_{\alpha\beta}\right) + \tau_{\alpha\beta} \tag{17.7}$$

de l'impulsion-énergie d'un fluide et du tenseur de Maxwell du champ électromagnétique. Comme aux paragraphes 9 et 10, r est la densité matérielle propre du fluide, p sa pression, u_α le vecteur-vitesse unitaire et f l'indice du fluide lié à son enthalpie spécifique par:

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}\,. \tag{17.8}$$

La température propre du fluide et son entropie spécifique sont encore définis à partir de (9.8) soit:

$$T\,dS = di - \frac{dp}{r}\,. \tag{17.9}$$

Le courant électrique J est en général la somme de deux termes correspondant à un courant de convection et à un courant de conduction, soit

$$J^\beta = \mu u^\beta + \sigma F^{\alpha\beta} u_\alpha\,, \tag{17.10}$$

où μ est la *densité propre de charge électrique* du fluide et σ sa *conductivité.* Nous supposons ici *cette conductivité nulle* ($\sigma = 0$) de telle sorte que:

$$J^\beta = \mu u^\beta\,. \tag{17.11}$$

De $\delta^2 = 0$, résulte l'identité de conservation de l'électricité $\delta J = 0$, qui s'écrit dans l'hypothèse faite

$$\nabla_\beta(\mu u^\beta) = 0\,. \tag{17.12}$$

18. Equation de continuité et système différentiel aux lignes de courant

a) Formons les conditions de conservation $\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$, conséquences des équations d'Einstein, avec:

$$T_{\alpha\beta} = r f u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}\,.$$

Il vient d'après (17.5):

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha(r f u^\alpha) u_\beta + r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta p}{c^2} + F_{\alpha\beta} J^\alpha = 0$$

soit, d'après (17.11),

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha(r f u^\alpha) u_\beta + r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta p}{c^2} + \mu F_{\alpha\beta} u^\alpha = 0\,. \tag{18.1}$$

Par produit par u^β, on en déduit l'équation de continuité:

$$u^\beta \nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha(r f u^\alpha) - \frac{u^\alpha \partial_\alpha p}{c^2} = 0\,. \tag{18.2}$$

D'après (17.8) et (17.9) cette équation peut s'écrire comme au paragraphe 11:

$$f \nabla_\alpha(r u^\alpha) + \frac{1}{c^2} r T u^\alpha \partial_\alpha S = 0\,. \tag{18.3}$$

Nous postulons encore que *le mouvement est adiabatique*

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0 \tag{18.4}$$

ou, ce qui est équivalent, que *la densité matérielle propre est conservative*:

$$\nabla_\alpha(r u^\alpha) = 0\,. \tag{18.5}$$

De (17.12) et (18.5) on déduit:

$$u^\alpha \frac{\partial_\alpha \mu}{\mu} + \nabla_\alpha u^\alpha = 0, \quad u^\alpha \frac{\partial_\alpha r}{r} + \nabla_\alpha u^\alpha = 0$$

soit par différence:

$$u^\alpha \partial_\alpha \log \frac{\mu}{r} = 0 .$$

Ainsi le rapport $k = \mu/r$ est constant le long des lignes de courant. Nous supposons notre fluide *chargé de manière homogène*, c'est-à-dire

$$k = \mu/r = \text{constante donnée}$$

dans le domaine d'espace-temps envisagé.

b) Si nous tenons compte de (18.2) dans (18.1), il vient:

$$r f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{\partial_\alpha p}{c^2} - \mu F_\alpha{}^\beta u^\alpha$$

soit, d'après (17.9),

$$f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \left(\partial_\alpha f - \frac{T \partial_\alpha S}{c^2}\right) - k F_\alpha{}^\beta u^\alpha , \tag{18.6}$$

qui est le système différentiel aux lignes de courant.

Si le fluide est isentropique, on peut interpréter le système différentiel (18.6) de la manière suivante: les lignes de courant sont extrémales de l'intégrale à limites fixes:

$$\int (f\, ds + k \varphi)$$

où φ est le potentiel électromagnétique (voir par exemple LICHNEROWICZ [6], p. 101).

Dans le cas général. introduisons encore la métrique $\overline{ds}^2 = f^2 ds^2$ et le courant hydrodynamique C défini par:

$$C_\alpha = f u_\alpha \quad C^\alpha = f u^\alpha . \tag{18.7}$$

Nous posons aussi:

$$\overline{C}^\alpha = f^{-1} u^\alpha .$$

De (18.6) écrit sous la forme:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial_\alpha f}{f} - \frac{T \partial_\alpha S}{c^2 f}\right) + \frac{k}{f} F_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$$

il résulte, d'après le lemme du paragraphe 10, que le système différentiel aux lignes de courant peut s'écrire:

$$\overline{C}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{T}{c^2 f} \partial_\alpha S + \frac{k}{f} F_{\alpha\beta} u^\alpha = 0 ,$$

où $\overline{\nabla}_\alpha$ est la dérivation covariante dans la métrique $\overline{ds}^2$, soit encore par produit par f^2:

$$C^\alpha \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{T f}{c^2} \partial_\alpha S + k F_{\alpha\beta} C^\alpha = 0 . \tag{18.8}$$

19. Equations d'Helmholtz relativistes

Au courant C, on est amené à associer la 1-forme:

$$I = C + k \varphi \tag{19.1}$$

et sa différentielle extérieure:

$$\Pi = dC + k\,d\varphi = \Omega + kF \quad (\Omega = dC) \tag{19.2}$$

qui est encore une 2-forme fermée ($d\pi = 0$). Elle définit un tenseur antisymétrique:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + kF_{\alpha\beta}$$

que nous appelons *le tenseur de tourbillon total* du fluide chargé.

Nous nous proposons d'abord de mettre le système aux lignes de courant sous une forme simple faisant intervenir le tenseur tourbillon π. D'après (18.8) et compte-tenu de l'équation $u^\alpha \partial_\alpha S = 0$, le système aux lignes de courant peut s'écrire:

$$C^\alpha \nabla_\alpha C_\beta + \frac{Tf}{c^2} \partial_\beta S + kC^\alpha F_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{19.3}$$

Or, nous avons vu au paragraphe 12 que:

$$C^\alpha \nabla_\alpha C_\beta = C^\alpha \Omega_{\alpha\beta}\,.$$

(19.3) peut donc s'écrire:

$$C^\alpha(\Omega_{\alpha\beta} + kF_{\alpha\beta}) + \frac{Tf}{c^2} \partial_\beta S = 0\,.$$

Nous voyons ainsi que le système aux lignes de courant peut s'écrire sous forme intrinsèque:

$$i(c)\,\Pi = -\frac{Tf}{c^2}\,dS\,. \tag{19.4}$$

De (19.4) on déduit d'ailleurs immédiatement, dans le cas isentropique, l'interprétation variationnelle donnée ci-dessus du système aux lignes de courant.

Pour former dans ce cas les équations de Helmholtz, observons que l'on a encore:

$$\mathcal{L}(C)\,\Pi = (d\,i(C) + i(C)\,d)\,\Pi = d\,i(C)\,\Pi$$

On déduit ainsi de (19.4) les équations de Helmholtz:

$$\mathcal{L}(C)\,\Pi = -\frac{1}{c^2}\,d(Tf) \wedge dS\,. \tag{19.5}$$

Ces équations peuvent s'écrire explicitement:

$$C^\varrho \nabla_\varrho \Pi_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha C^\varrho \Pi_{\varrho\beta} + \nabla_\beta C^\varrho \Pi_{\alpha\varrho} = -\frac{1}{c^2}\,[\partial_\alpha(Tf)\partial_\beta S - \partial_\beta(Tf)\partial_\alpha S]\,. \tag{19.6}$$

20. Equations liant courant hydrodynamique et tourbillon

Il existe un système de relations liant courant hydrodynamique et tourbillon total et généralisant celles mises en évidence au paragraphe 14. Nous cherchons, comme dans ce paragraphe, à évaluer le laplacien ΔC du courant hydrodynamique. L'équation de continuité étant la même qu'en l'absence de champ électromagnétique, on a encore

$$\Delta C = \mathscr{L}(C)\, H + \delta \Omega \tag{20.1}$$

avec

$$H(h, S) = \log \frac{r}{f} \quad (h = f^2)\,.$$

a) On a de même:

$$\partial_\lambda H = 2 H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda - 2 H'_h C^\alpha \Omega_{\alpha\lambda} + H'_S\, \partial_\lambda S\,.$$

Or, d'après (19.4), le système différentiel aux lignes de courant peut s'écrire dans ce cas:

$$C^\alpha \Omega_{\alpha\lambda} = -k C^\alpha F_{\alpha\lambda} - \frac{Tf}{c^2}\, \partial_\lambda S\,.$$

Il en résulte:

$$\partial_\lambda H = 2 H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda + \left(2 H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S\right) \partial_\lambda S + 2 k H'_h C^\alpha F_{\alpha\lambda}\,. \tag{20.2}$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons toujours f ou h comme fonction des variables $g_{\alpha\beta}$ et C^α. De (20.2) on déduit:

$$[\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda = 2 H'_h\, C^\alpha C^\beta\, \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + \left(2 H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S\right) C^\beta \nabla_\beta \nabla_\lambda S +$$
$$+ 2 k H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\beta F_{\alpha\lambda} + \tilde{\varphi}_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})\,.$$

Soit, compte-tenu comme au paragraphe 14, de l'équation $C^\beta \nabla_\beta S = 0$:

$$[\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda = 2 H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + 2 k H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\beta F_{\alpha\lambda} +$$
$$+ \tilde{\psi}_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})\,.$$

b) De la relation précédente et de (20.1), on déduit par un raisonnement identique à celui du paragraphe 14:

$$[g^{\alpha\beta} + 2 H'_h C^\alpha C^\beta]\, \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda - R_{\lambda\varrho} C^\varrho + (\delta \Omega)_\lambda + 2 k H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\beta F_{\alpha\lambda} +$$
$$+ \tilde{\psi}_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\lambda\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\}) = 0\,.$$

Or nous savons que:

$$2 H'_h = -\frac{1}{f^2}\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)$$

et d'autre part:

$$\delta \Omega = \delta \Pi - k\, \delta F = \delta \Pi + \frac{k\mu}{f} C = \delta \Pi + \frac{k^2 r}{f} C\,.$$

Nous obtenons ainsi le système suivant:

$$\left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right)\right] \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda - R_{\lambda\varrho} C^\varrho + (\delta \Pi)_\lambda - \frac{k}{f^2}\left(1 - \frac{f r'_f}{r}\right) \times$$
$$\times\, C^\alpha C^\beta \nabla_\beta F_{\alpha\lambda} + \psi_\lambda(1 \text{ en } \{\partial_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\}) = 0\,. \tag{20.3}$$

21. L'opérateur $\Delta^{(h)}$

Désignons par Δ l'opérateur laplacien sur une 1-forme φ

$$\Delta \varphi = (d\delta + \delta d)\, \varphi\,.$$

Nous allons l'évaluer sous une forme commode. Il vient d'abord

$$(d\,\delta\,\varphi)_\lambda = -g^{\alpha\beta}\,\nabla_\lambda \nabla_\alpha \varphi_\beta$$

soit

$$(d\,\delta\,\varphi)_\lambda = -g^{\alpha\beta}\,\nabla_\lambda(\partial_\alpha \varphi_\beta - \Gamma^\varrho_{\alpha\beta}\,\varphi_\varrho)\,.$$

On en déduit

$$(d\delta\,\varphi)_\lambda = -g^{\alpha\beta}\,\partial_{\lambda\alpha}\,\varphi_\beta + \partial_\lambda F^\varrho\,\varphi_\varrho + \alpha_\lambda\{1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})$$

où la notation indique l'ordre maximum des dérivées figurant dans α_λ. On a d'autre part

$$(\delta\,d\,\varphi)_\lambda = -\nabla^\beta(\partial_\beta\,\varphi_\lambda - \partial_\lambda\,\varphi_\beta) = -g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,\varphi_\lambda + g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\lambda}\,\varphi_\beta + \\ + \beta_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})\,.$$

Il en résulte par addition

$$(\Delta\,\varphi)_\lambda = -g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\varphi_\lambda + \partial_\lambda F^\varrho\,\varphi_\varrho + \gamma_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})\,.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire $\Delta^{(h)}$ défini par:

$$[\Delta^{(h)}\,\varphi]_\lambda = [\Delta\,\varphi]_\lambda - \partial_\lambda F^\varrho\,\varphi_\varrho\,. \tag{21.1}$$

$\Delta^{(h)}$ se réduit à l'opérateur Δ en coordonnées harmoniques ($F^\varrho = 0$) et l'on a:

$$[\Delta^{(h)}\,\varphi]_\lambda = -g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,\varphi_\lambda + \gamma_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\})\,. \tag{21.2}$$

22. *Les équations en coordonnées harmoniques avec condition de Lorentz*

a) Considérons le système fondamental de l'hydrodynamique relativiste des fluides parfaits thermodynamiques chargés. Ce système se compose des équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi\,T_{\alpha\beta}\,, \tag{22.1}$$

où $T_{\alpha\beta}$ est donné par (17.7), u_α étant unitaire, de l'équation postulée:

$$u^\alpha\,\partial_\alpha S = 0 \tag{22.2}$$

et des équations de Maxwell régissant le potentiel électromagnétique φ:

$$(\delta\,d\,\varphi)_\lambda = -k\,r\,u_\lambda \quad (k = \text{const.})\,. \tag{22.3}$$

Pour abréger, nous désignons par I le système ainsi défini.

b) Le potentiel électromagnétique φ est défini à un changement de jauge près. La condition de Lorentz $\delta\,\varphi = 0$ qui peut limiter ce changement de jauge, va jouer ici un rôle analogue à celui des conditions d'harmonicité.

Si une solution du système I vérifie $F^\varrho = 0$ et $\delta\,\varphi = 0$, elle est solution du système constitué par les équations d'Einstein écrites sous la forme:

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,T\right) \tag{22.4}$$

par l'équation
$$u^{\alpha}\,\partial_{\alpha} S = 0\,, \tag{22.5}$$
par les équations de Maxwell écrites sous la forme:
$$[\Delta^{(h)}\,\varphi]_{\lambda} = -k\,r\,u_{\lambda}\,, \tag{22.6}$$
par les conditions de conservation:
$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha}{}_{\beta} = 0\,, \tag{22.7}$$
et par l'équation de conservation de l'électricité déduit de (22.3) qui s'écrit ici:
$$\nabla_{\alpha}(r\,u^{\alpha}) = 0\,. \tag{22.8}$$

Nous désignons par II le système ainsi défini.

c) Inversement, donnons-nous une solution du système II correspondant à des données de Cauchy sur une hypersurface Σ *orientée dans l'espace* (d'équation locale $x^0 = 0$) vérifiant
$$F^{\varrho} = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0 \tag{22.9}$$
et
$$\delta\,\varphi = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\,, \tag{22.10}$$
où les premiers membres ne dépendent que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières, des φ_{α} et de leurs dérivées premières dont les valeurs sont supposées connues sur Σ. On sait, d'autre part, que S^0_{α} et $(\delta\,d\,\varphi)^0$ ne fait intervenir que ces données et leurs dérivées sur Σ. Nous supposons de plus notre solution telle que sur Σ:
$$S^0_{\alpha} = \chi\,T^0_{\alpha} \quad \text{pour} \quad x^0 = 0 \tag{22.11}$$
et
$$(\delta\,d\,\varphi)^0 = -k\,r\,u^0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\,. \tag{22.12}$$

Pour une telle solution, on sait d'après le raisonnement du paragraphe 4 que:
$$\partial_0 F^{\varrho} = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0\,. \tag{22.13}$$

D'autre part, d'après (22.13), on a sur Σ:
$$[\Delta\,\varphi]^0 = [\Delta^{(h)}\varphi]^0 = -k\,r\,u^0\,,$$
donc d'après (22.12) et (22.10):
$$(d\,\delta\,\varphi)^0 = g^{00}(d\,\delta\,\varphi)_0 = 0\,,$$
et ainsi:
$$(d\,\delta\,\varphi)_0 = 0\,. \tag{22.14}$$

Cela posé, un raisonnement identique à celui du paragraphe 4 montre que les F^{ϱ} vérifient un système de la forme:
$$g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta} F^{\varrho} + A^{\varrho}{}^{\alpha}_{\beta}\,\partial_{\alpha} F^{\beta} = 0 \quad A^{\varrho}{}^{\alpha}_{\beta} = \text{fonction (1 en } \{g_{\lambda\mu}\})\,. \tag{22.15}$$

D'autre part de (22.6) écrit sous la forme:

$$[\Delta \varphi]_\lambda - \partial_\lambda F^\varrho \varphi_\varrho = -k r u_\lambda$$

on déduit par action de l'opérateur δ qui commute avec Δ et compte-tenu de (22.8):

$$\Delta \, \delta \varphi + \nabla^\lambda \partial_\lambda F^\varrho \varphi_\varrho + \partial_\lambda F^\varrho \nabla^\lambda \varphi_\varrho = 0$$

soit une relation de la forme:

$$\begin{aligned} &\Delta \, \delta \varphi + g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} F^\varrho \varphi_\varrho + B^\alpha_\beta \partial_\alpha F^\beta = 0 \\ &B^\alpha_\beta = \text{fonction } (1 \text{ en } \{g_{\lambda\mu}\}, 1 \text{ en } \{\varphi_\alpha\}) \, . \end{aligned} \tag{22.16}$$

La solution $(F^\varrho, \delta \varphi)$ de (22.15) et (22.16) satisfaisant sur Σ à $F^\varrho = 0$, $\partial_0 F^\varrho = 0$, $\delta \varphi = 0$, $\partial_0 \, \delta \varphi = 0$, est la solution nulle; les coordonnées envisagées sont harmoniques pour la solution considérée du système II et $\delta \varphi = 0$ en dehors de Σ. Il en résulte que cette solution vérifie le système I. Nous énonçons:

Théorème — Toute solution du système II telle que sur Σ les conditions (22.9), (22.10), (22.11), (22.12) *soient satisfaites est solution du système I.*

23. Système différentiel aux lignes de courant déduit du système II

Du système II, on peut déduire un système différentiel régissant les lignes de courant. Des conditions de conservation

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta \equiv \nabla_\alpha \left(r f u^\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} g^\alpha_\beta + \tau^\alpha{}_\beta \right) = 0$$

il résulte:

$$\nabla_\alpha (r f u^\alpha) u_\beta + r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\beta p}{c^2} + \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = 0 \, . \tag{23.1}$$

Nous substituerons à $\frac{\partial_\beta p}{c^2}$ son expression tirée de (13.1). D'autre part, d'après (17.5) et (17.2):

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = -(d \varphi)_{\varrho\beta} (\delta \, d \varphi)^\varrho$$

soit d'aprés la définition de $\Delta^{(h)}$:

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = -(d \varphi)^\varrho{}_\beta [(\Delta^{(h)} \varphi)_\varrho + \partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma - (d \, \delta \varphi)_\varrho] \, .$$

D'après (22.6), il vient:

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = (d \varphi)^\varrho{}_\beta [k r u_\varrho - \partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma + (d \, \delta \varphi)_\varrho] \, .$$

En reportant dans (23.1) et compte-tenu de (22.8), on obtient:

$$\begin{aligned} &r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + r u^\alpha u_\beta \partial_\alpha f - \left(r \, \partial_\beta f - \frac{T}{c^2} \partial_\beta S \right) + \\ &+ (d \varphi)^\varrho{}_\beta [k r u_\varrho - \partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma + (d \, \delta \varphi)_\varrho] = 0 \, . \end{aligned} \tag{23.2}$$

En multipliant (23.2) par u^β et contractant, il vient, compte-tenu de (22.5),

$$u^\beta (d\,\varphi)^\varrho{}_\beta [-\partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma + (d\,\delta\,\varphi)_\varrho] = 0\,. \tag{23.3}$$

D'après (23.3), le système (23.2) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} &r f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta)\left(r\,\partial_\alpha f - \frac{T}{c^2}\,\partial_\alpha S\right) + \\ &+ (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta)\,(d\,\varphi)^\varrho{}_\alpha [k r u_\varrho - \partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma + (d\,\delta\,\varphi)_\varrho] = 0 \end{aligned} \tag{23.4}$$

ce qui est le système différentiel cherché.

24. Etude des caractéristiques. Problème de Cauchy analytique

Comme au paragraphe 13, nous prenons f et S pour variables thermodynamiques et supposons r fonction connue de f et S

$$r = r(f, S)\,.$$

On a toujours (13.1).

Nous nous proposons d'étudier le problème de Cauchy relatif au système II pour des données telles que (22.11) et (22.12) soient satisfaites.

a) Sur l'hypersurface Σ, d'équation locale $x^0 = 0$, nous nous donnons les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ (avec $g^{00} \neq 0$) et de leurs dérivées premières, ainsi que celles des φ_α et de leurs dérivées premières. Les $(S^0_\alpha - \chi\tau^0_\alpha)$ sont connues sur Σ. On en déduit comme au paragraphe 13, p jouant le rôle d'une inconnue auxiliaire:

$$u_\alpha = \frac{S^0_\alpha - \chi\tau^0_\alpha + \chi \frac{p}{c^2} \cdot g^0_\alpha}{\Omega^0(p)}$$

et

$$u^0 = \frac{S^{00} - \chi\tau^{00} + \chi \frac{p}{c^2}\, g^{00}}{\Omega^0(p)}, \quad \chi r f = \frac{[\Omega^0(p)]^2}{S^{00} - \chi\tau^{00} + \chi \frac{p}{c^2}\, g^{00}} \tag{24.1}$$

où l'on a posé:

$$[\Omega^0(p)]^2 = g^{\alpha\beta}\left(S^0_\alpha - \chi\tau^0_\alpha + \chi \frac{p}{c^2}\, g^0_\alpha\right)\left(S^0_\beta - \chi\tau^0_\beta + \chi \frac{p}{c^2}\, g^0_\beta\right) > 0 \tag{24.2}$$

pour le domaine envisagé des valeurs de p. Par dérivation, on a:

$$\Omega^0(p)\, \frac{d\Omega^0(p)}{dp} = \frac{\chi}{c^2}\left(S^{00} - \chi\tau^{00} + \chi \frac{p}{c^2}\, g^{00}\right)$$

d'où d'après (24.1)

$$\frac{d\Omega^0(p)}{dp} = \frac{\chi}{c^2}\, u^0 \neq 0\,.$$

D'après (22.12), $v^0 = r u^0$ est connu sur Σ. *Les valeurs de f et S sur Σ sont donc astreintes, d'après* (24.1), *aux conditions*:

$$\chi v^0 f - \Omega^0(p) = 0 \tag{24.3}$$

et

$$\left(S^{00} - \chi\tau^{00} + \chi\frac{p}{c^2}g^{00}\right)rf - \chi(v^0)^2 f^2 = 0 . \qquad (24.4)$$

Le jacobien des premiers membres de (24.3) et (24.4) par rapport à f et S s'écrit:

$$\begin{vmatrix} \chi v^0 - \chi r u^0 = 0 & -\dfrac{d\Omega^0(p)}{dp}\dfrac{\partial p}{\partial S} \\ (fr'_f + r)u^0\Omega^0(p) + \chi g^{00} r^2 f - 2\chi(v^0)^2 f & A \end{vmatrix}$$

et est différent de zéro pour:

$$(fr'_f + r)\,\chi r f (u^0)^2 + g^{00}\chi r^2 f - 2\chi r^2 f (u^0)^2 \neq 0$$

soit:

$$\left(\frac{fr'_f}{r} + 1\right)(u^0)^2 + g^{00} - 2(u^0)^2 \neq 0 .$$

Nous retrouvons ainsi la même condition qu'au paragraphe 13:

$$g^{00} - (u^0)^2\left[1 - \frac{fr'_f}{r}\right] \neq 0 .$$

En dehors des données $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$, φ_α, $\partial_0\varphi_\alpha$ sur Σ, *nous nous donnons aussi sur Σ les valeurs de f et S vérifiant* (24.3), (24.4) *et n'annulant pas le jacobien.* Sont alors connues les valeurs sur Σ de r, p, T donc des u_α définissant un vecteur unitaire.

b) Le système II nous a donné l'équation:

$$\nabla_\alpha(ru^\alpha) \equiv r\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha\partial_\alpha r = 0 \qquad (24.5)$$

et le système aux lignes de courant (23.4), soit:

$$\begin{aligned} rfu^\alpha\nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\left(r\,\partial_\alpha f - \frac{rT}{c^2}\partial_\alpha S\right) + \\ + (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\,(d\varphi)^\varrho{}_\alpha\,[kru_\varrho - \partial_\varrho F^\sigma\varphi_\sigma + (d\,\delta\varphi)_\varrho] = 0 . \end{aligned} \qquad (24.6)$$

D'après (24.6) $u^\alpha u^\beta\nabla_\alpha u_\beta = 0$ et u_β initialement unitaire le restera.

Les données de Cauchy sont supposées données en termes de séries formelles de coordonnées locales. Puisque $g^{00} \neq 0$, les équations (22.4) donnent les valeurs sur Σ des dérivées $\partial_{00}g_{\alpha\beta}$ et les équations (22.6) celles des dérivées $\partial_{00}\varphi_\alpha$. L'équation (22.5) donne pour $u^0 \neq 0$ la valeur sur Σ de $\partial_0 S$.

Les valeurs sur Σ de $\partial_0 u^0$ et $\partial_0 f$ se déduisent d'équations de même forme que (13.9) et (13.10) déduites de (24.5) et (24.6) pour $\beta = 0$. Sous la condition écrite, $\partial_0 f$, $\partial_0 u^0$ et par suite les $\partial_0 u^i$ ($i = 1, 2, 3$) sont connues sur Σ. Les mêmes conclusions s'étendent, par dérivation en x^0 des équations envisagées, à la détermination des dérivées successives pour $x^0 = 0$.

Ainsi f et S étant choisies conformément au a et sous nos hypothèses:

$$g^{00} \neq 0 \quad u^0 \neq 0 \quad g^{00} - (u^0)^2\left[1 - \frac{fr'_f}{r}\right] \neq 0$$

se trouvent déterminées de manières unique les séries formelles cherchées. Dans le cas analytique, on obtient ainsi *une solution analytique unique du problème de Cauchy posé relatif au système II*. Les variétés caractéristiques correspondantes sont les mêmes qu'en l'absence de champ électromagnétique. Dans le cas de conductivité nulle, *il n'y a pas d'action du champ électromagnétique sur les fronts d'onde hydrodynamiques.*

25. Equations d'Helmholtz déduites du système II

En reprenant le calcul du paragraphe 18, on voit que le système (23.4) aux lignes de courant déduit du système II peut s'écrire (avec $F = d\varphi$)

$$C^\alpha \overline{V}_\alpha C_\beta + \frac{Tf}{c^2}\partial_\beta S + k C^\alpha F_{\alpha\beta} - X^\alpha F_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{25.1}$$

où l'on a posé:

$$X_\varrho = \frac{f}{r}\left[\partial_\varrho F^\sigma \varphi_\sigma - (d\,\delta\varphi)_\varrho\right] \tag{25.2}$$

comme:

$$C^\alpha \overline{V}_\alpha C_\beta = C^\alpha \Omega_{\alpha\beta}\,.$$

(25.1) peut s'écrire:

$$C^\alpha(\Omega_{\alpha\beta} + kF_{\alpha\beta}) + \frac{Tf}{c^2}\partial_\beta S - X^\alpha F_{\alpha\beta} = 0\,.$$

Nous voyons ainsi que le système (23.4) peut s'écrire sous forme intrinsèque:

$$i(c)\,\Pi = -\frac{Tf}{c^2}\,dS + i(X)F\,. \tag{25.3}$$

Pour former les «équations de Helmholtz déduites du système II», évaluons à partir de (25.3):

$$\mathscr{L}(C)\,\Pi = d\,i(C)\,\Pi\,.$$

On obtient ainsi:

$$\mathscr{L}(C)\,\Pi = -\frac{1}{c^2}\,d(Tf)\wedge dS + d\,i(X)F \tag{25.4}$$

soit sous forme explicite:

$$\begin{aligned} &C^\varrho V_\varrho \Pi_{\alpha\beta} + V_\alpha C^\varrho \Pi_{\varrho\beta} + V_\beta C^\varrho \Pi_{\alpha\varrho} \\ &= -\frac{1}{c^2}\left[\partial_\alpha(Tf)\,\partial_\beta S - \partial_\beta(Tf)\,\partial_\alpha S\right] + \partial_\alpha(X^\varrho F_{\varrho\beta}) - \partial_\beta(X^\varrho F_{\varrho\alpha})\,. \end{aligned} \tag{25.5}$$

26. Relations courant hydrodynamique et tourbillon dans le cas du système II

a) De $V_\alpha(r u^\alpha) = 0$, on déduit toujours

$$\delta C = i(C)\,dH\,,\qquad H = \log\frac{r}{f}\,.$$

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe 20, on a donc:

$$\Delta C = \mathscr{L}(C)H + \delta\Omega\,. \tag{26.1}$$

Partons de:

$$\partial_\lambda H = 2H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda - 2H'_h C^\alpha \Omega_{\alpha\lambda} + H'_S \partial_\lambda S .$$

Du système (25.1), on déduit:

$$C^\alpha \Omega_{\alpha\lambda} = -k C^\alpha F_{\alpha\lambda} - \frac{Tf}{c^2} \partial_\lambda S + X^\alpha F_{\alpha\lambda} .$$

Il en résulte:

$$\partial_\lambda H = 2H'_h C^\alpha \nabla_\alpha C_\lambda + \left(2H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S\right) \partial_\lambda S + \\ + 2kH'_h C^\alpha F_{\alpha\lambda} - 2H'_h X^\alpha F_{\alpha\lambda} . \qquad (26.2)$$

Dans la suite de ce paragraphe, *nous considérons comme variables les* $g_{\alpha\beta}$, S, les $\Pi_{\alpha\beta}$, les C^α, les φ_α, les F^ϱ et $\delta\varphi$; f ou h est toujours considéré comme fonction des variables $g_{\alpha\beta}$ et C^α. De (16.2) on déduit:

$$[\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda = 2H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda + \left(2H'_h \frac{Tf}{c^2} + H'_S\right) C^\beta \nabla_\beta \nabla_\lambda S +$$

$$+ \tilde{\varphi}_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 2 \text{ en } \{\varphi_\alpha\},\ 2 \text{ en } \{F^\varrho\},\ 2 \text{ en } \delta\varphi)$$

soit, compte-tenu de l'équation $C^\beta \nabla_\beta S = 0$, comme aux paragraphes 14 et 20:

$$[\mathscr{L}(C)\, dH]_\lambda = 2H'_h C^\alpha C^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda +$$

$$+ \varphi_\lambda(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 2 \text{ en } \{\varphi_\alpha\},\ 2 \text{ en } \{F^\varrho\},\ 2 \text{ en } \delta\varphi) .$$

b) Par un raisonnement identique à ceux des paragraphes 14 et 20, on obtient:

$$[g^{\alpha\beta} + 2H'_h C^\alpha C^\beta]\, \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\lambda +$$

$$+ (\delta\Omega)_\lambda + \psi_\lambda(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 1 \text{ en } S, 1 \text{ en } \{C^\alpha\}, 2 \text{ en } \{\varphi_\alpha\}, 2 \text{ en } \{F^\varrho\}, 2 \text{ en } \delta\varphi) = 0.$$

Or:

$$\delta\Omega = \delta\Pi - k\delta\, d\varphi = \delta\Pi - k(\Delta\varphi - d\,\delta\varphi) .$$

Il en résulte:

$$(\delta\Omega)_\lambda = (\delta\Pi)_\lambda - k[\Delta^{(h)}(\varphi)_\lambda + \partial_\lambda F^\sigma \varphi_\sigma - (d\,\delta\varphi)_\lambda]$$

soit:

$$(\delta\Omega)_\lambda = (\delta\Pi)_\lambda + k\left[\frac{kr}{f} C_\lambda - \partial_\lambda F^\sigma \varphi_\sigma + (d\,\delta\varphi)_\lambda\right] .$$

En substituant à $2H'_h$ sa valeur, on obtient un système d'équation de la forme:

$$\left[g^{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{fr'_f}{r}\right)\frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}\right] \nabla_\alpha \nabla_\beta C^\lambda + (\delta\Pi)_\lambda + \\ + \alpha_\lambda(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 1 \text{ en } S, 1 \text{ en } \{C^\alpha\}, 2 \text{ en } \{\varphi_\alpha\}, 2 \text{ en } \{F^\varrho\}, 2 \text{ en } \delta\varphi) = 0 . \qquad (26.3)$$

c) En faisant agir sur (26.3) l'opérateur $C^\varrho \nabla_\varrho$ on voit apparaître:

$$C^\varrho \nabla_\varrho (\delta\Pi)_\lambda = -C^\varrho \nabla_\varrho \nabla_\alpha \Pi^\alpha{}_\lambda ,$$

qu'on peut évaleur à l'aide des équations de Helmholtz (25.5) par un raisonnement identique à celui du paragraphe 14, d. On *a* ainsi:

$$C^\varrho \nabla_\varrho (\delta\Pi)_\lambda = \chi_\lambda(2 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 2 \text{ en } S,\ 1 \text{ en } \{\Pi_{\alpha\beta}\}, \\ 2 \text{ en } \{C^\alpha\},\ 3 \text{ en } \{\varphi_\alpha\},\ 3 \text{ en } \{F^\varrho\},\ 3 \text{ en } \delta\varphi) .$$

On obtient ainsi des relations de la forme:

$$C^{\varrho}\left[g^{\alpha\beta}-\left(1-\frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^{\alpha}C^{\beta}}{f^2}\right]\partial_{\varrho\,\alpha\beta}C^{\lambda}=\beta^{\lambda}\,(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, \\ 2 \text{ en } S, 1 \text{ en } \{\Pi_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } \{C^{\alpha}\}, 3 \text{ en } \{\varphi_{\alpha}\}, 3 \text{ en } \{F^{\varrho}\}, 3 \text{ en } \delta\varphi)\,. \tag{26.4}$$

27. Théorème d'éxistence et d'unicité

a) Nous prenons comme fonctions inconnues les dix $g_{\alpha\beta}$, le scalaire S, les six $\Pi_{\alpha\beta}$ les quatre C^{α}, les quatre $\{\varphi_{\alpha}\}$, les quatre F^{ϱ} et $\delta\varphi$ soit trente fonctions inconnues. Nous considérons le système aux dérivées partielles défini par les équations:

$$R^{(h)}_{\alpha\beta}=\chi\left[r\frac{C_{\alpha}C_{\beta}}{f}-\frac{1}{2}\left(rf-2\frac{p}{c^2}\right)g_{\alpha\beta}+\tau_{\alpha\beta}\right] \tag{27.1}$$

(où f est considéré comme fonction des $g_{\alpha\beta}$ et C^{α}), l'équation relative à l'entropie:

$$C^{\alpha}\,\partial_{\alpha}S=0\,, \tag{27.2}$$

les équations de Helmholtz déduites du système II:

$$C^{\varrho}\,\partial_{\varrho}\Pi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } S,\ 0 \text{ en } \{\Pi_{\alpha\beta}\}, \\ 1 \text{ en } \{C^{\alpha}\},\ 2 \text{ en } \{\varphi_{\alpha}\},\ 2 \text{ en } \{F^{\varrho}\},\ 2 \text{ en } \delta\varphi)\,, \tag{27.3}$$

les équations (26.4), soit:

$$C^{\varrho}\left[g^{\alpha\beta}-\left(1-\frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^{\alpha}C^{\beta}}{f^2}\right]\partial_{\varrho\,\alpha\beta}C^{\lambda}=\beta^{\lambda}(3 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } S, \\ 1 \text{ en } \{\Pi_{\alpha\beta}\}, 2 \text{ en } \{C^{\alpha}\}, 3 \text{ en } \{\varphi_{\alpha}\}, 3 \text{ en } \{F^{\varrho}\}, 3 \text{ en } \delta\varphi), \tag{27.4}$$

les équations de Maxwell (22.6) soit:

$$-g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\varphi_{\lambda}=-k\,r\,u_{\lambda}-\gamma_{\lambda}(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_{\alpha}\})\,, \tag{27.5}$$

les équations (22.15) qui peuvent s'écrire:

$$-g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}F^{\varrho}=\alpha^{\varrho}(1 \text{ en } \{g_{\lambda\mu}\},\ 1 \text{ en } \{F^{\varrho}\})\,, \tag{27.6}$$

et l'équation (22.16), où l'on a tenu compte de (22.15) et qui peut ainsi s'écrire:

$$-g^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,\delta\varphi=\xi(1 \text{ en } \{g_{\alpha\beta}\},\ 1 \text{ en } \{\varphi_{\alpha}\},\ 1 \text{ en } \{F^{\varrho}\},\ 1 \text{ en } \delta\varphi)\,. \tag{27.7}$$

Le système (27.1), . . ., (27.7) appartient au type (5.1) étudié par Leray, la matrice A, ici 30×30, étant la matrice diagonale dont les éléments diagonaux ont respectivement pour valeurs:

$$a(1)=-\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\,\partial_{\lambda\mu},\ a(2)=a(3)=C^{\varrho}\,\partial_{\varrho},$$

$$a(4)=C^{\varrho}\left[g^{\alpha\beta}-\left(1-\frac{f r'_f}{r}\right)\frac{C^{\alpha}C^{\beta}}{f^2}\right]\partial_{\varrho\,\alpha\beta},\ a(5)=a(6)=a(7)=-g^{\lambda\mu}\,\partial_{\lambda\mu}\,.$$

Notre système satisfait aux hypothèses faites sur les dérivées avec les indices suivantes pour les inconnues:

$$s(g_{\alpha\beta}) = 4,\ s(S) = 3,\ s(\Pi_{\alpha\beta}) = 2,\ s(C^\alpha) = 3,\ s(\varphi^\alpha) = 4,\ s(F^\varrho) = 4,\ s(\delta\varphi) = 4$$

et pour les équations:

$$t(1) = 3 \quad t(2) = 3 \quad t(3) = 2 \quad t(4) = 1 \quad t(5) = 3 \quad t(6) = 3 \quad t(7) = 3\,.$$

En effet $a(1)$, $a(5)$, $a(6)$, $a(7)$ sont d'ordre 2, $a(2)$ et $a(3)$ d'ordre 1, $a(4)$ d'ordre 3. En ce qui concerne les coefficients de ces opérateurs et les seconds membres, dressons le tableau suivant donnant pour chaque inconnue et équation l'ordre maximum de dérivation qui peut apparaître conformément aux indices. Il vient:

$$(1)\begin{cases} g_{\alpha\beta} & :1 \\ S & :0 \\ \Pi_{\alpha\beta} & :-1 \\ C^\alpha & :0 \\ \varphi_\alpha & :1 \\ F^\varrho & :1 \\ \delta\varphi & :1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} g_{\alpha\beta} & :1 \\ S & :0 \\ \Pi_{\alpha\beta} & :-1 \\ C^\alpha & :0 \\ \varphi_\alpha & :1 \\ F^\varrho & :1 \\ \delta\varphi & :1 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} g_{\alpha\beta} & :2 \\ S & :1 \\ \Pi_{\alpha\beta} & :0 \\ C^\alpha & :1 \\ \varphi_\alpha & :2 \\ F^\varrho & :2 \\ \delta\varphi & :2 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} g_{\alpha\beta} & :3 \\ S & :2 \\ \Pi_{\alpha\beta} & :1 \\ C^\alpha & :2 \\ \varphi_\alpha & :3 \\ F^\varrho & :3 \\ \delta\varphi & :3 \end{cases}$$

et pour les équations (25.5), (25.6), (25.7):

$$(5)\ (6)\ (7)\begin{cases} g_{\alpha\beta} & :1 \\ S & :0 \\ \Pi_{\alpha\beta} & :-1 \\ C^\alpha & :0 \\ \varphi_\alpha & :1 \\ F^\varrho & :1 \\ \delta\varphi & :1\,. \end{cases}$$

Ces ordres maxima sont bien respectés dans le système envisagé.

b) Nos données de Cauchy sur Σ sont constituées par les valeurs des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières, les valeurs des φ_α et de leurs dérivées premières, celles de f et S. Nous supposons qu'elles sont telles que:

1) *La forme quadratique $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu$ soit hyperbolique normale, l'hypersurface Σ étant spatiale en chacun de ses points x, relativement au cône élémentaire ence point C_x.*

2) *On ait sur Σ:*

$$F^\varrho = 0 \quad \delta\varphi = 0 \quad (\text{pour } x^0 = 0)\,.$$

3) *Les données, astreintes à* (24.3) *et* (24.4), *déterminent par les relations* $S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha$ *et* $(\delta\, d\,\varphi)^0 = -k r u^0$ *des valeurs sur* Σ *admissibles pour* p *et les* C^α, *avec:*

$$\frac{f r'_f}{r} \geqq 1 \, .$$

Les différents opérateurs a_τ qui interviennent ici sont les mêmes qu'au paragraphe 15. L'intersection des différents cônes $\Gamma^+_x(\tau)$ $(\tau = 1, \ldots, 7)$ a un intérieur non vide qui est l'intérieur de $\Gamma^+_x(1)$ et la matrice A est *hyperbolique.*

Les équations (27.1) déterminent les valeurs sur Σ des dérivées secondes des $g_{\alpha\beta}$, (27.2) celles des dérivées premières de S, (27.5) celles des dérivées secondes des φ_α. Comme $\partial_0 F^\varrho = 0$, $\partial_0\, \delta\,\varphi = 0$ sur Σ, (27.5) et (24.6) fournissent comme nous l'avons vu les dérivées premières des C^α. Par dérivation, (27.1) donne les dérivées troisièmes des $g_{\alpha\beta}$, (27.2) les dérivées secondes de S, (27.5) les dérivées troisièmes des φ_α, (27.6) et (27.7) les dérivées troisièmes des F^ϱ et de $\delta\,\varphi$. Les équations (27.3) donnent les dérivées premières des $\Pi_{\alpha\beta}$ et (26.3) les dérivées secondes des C_α.

Nous obtenons ainsi un problème de Cauchy relatif au système (27.1), ..., (27.7). Pour des données initiales suffisamment régulières, le théorème de Leray montre que *ce problème de Cauchy admet une solution* $g_{\alpha\beta}$, S, $\Pi_{\alpha\beta}$, C^α, φ_α, $F^\varrho = 0$, $\delta\,\varphi = 0$ *unique.*

Un raisonnement identique à celui du paragraphe 15, c, montre qu'avec les données choisies, cette solution est solution du système II, si les données sont suffisamment régulières. Comme $F^\varrho = 0$, $\delta\,\varphi = 0$ nous avons une solution du système I écrite en coordonnées harmoniques et avec un potentiel-vecteur astreint à la condition de Lorentz.

Nous avons ainsi obtenu *un théorème d'existence et d'unicité relatif au problème de Cauchy portant sur le système fondamental I des équations du fluide parfait thermodynamique chargé de conductivité nulle.*

Bibliographie

[1] Choquet-Bruhat, Y.: Acta Mathematica **88**, 141—225 (1952).
[2] — C. R. Acad. Sci. (Paris) **246**, 3319—3322 (1957).
[3] — Bull. Soc. Math. France **86**, 155—175 (1958).
[4] Leray, J.: Hyperbolic differential equations. Inst. for Adv. Study, Princeton (1952) multigraphié.
[5] Lichnerowicz, A.: Ann. Ec. Normale **58**, 285—304 (1941).
[6] — Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Paris: Masson 1955.
[7] — C. R. Acad. Sci. (Paris) **260**, 329—334, 4449—4453 (1965).
[8] Taub, A. H.: Phys. Rev. **74**, 328—334 (1948).
[9] — Ann. Math. **62**, 300—325 (1955).
[10] — Arch. Rat. Mech. **3**, 312—324 (1959).