RESEARCH ANNOUNCEMENTS

The purpose of this department is to provide early announcement of significant new results, with some indications of proof. Although ordinarily a research announcement should be a brief summary of a paper to be published in full elsewhere, papers giving complete proofs of results of exceptional interest are also solicited.

KENNZEICHNUNG Γ-PRIMER GRAPHEN

BY H. A. JUNG

Communicated by Edwin Moise, March 1, 1961

Es sei ein endlicher Graph $G=E\cup K$ gegeben. Für p, $p'\in E$ bedeute $\gamma(p,\, p)$ die doppelte Zahl der Schlingen an p, $\gamma(p,\, p')$ für $p\neq p'$ die Zahl der Kanten mit den Endpunkten p und p', und es sei $\gamma(p,\, E')=\sum_{p'\in E'}\gamma(p,\, p')$ $(E'\subseteq E)$. Schließlich werde für $E'\subseteq E$ definiert: $G(E')=E'\cup K'$, wobei K' die Menge der Kanten bedeute, deren Endpunkte beide in E' liegen.

Auf E sei eine ganzzahlige, nicht negative Funktion Γ gegeben. Man kann dann die Frage stellen, ob ein Untergraph $G'=E\cup K'$ mit $K'\subseteq K$ (Faktor) existiert mit $\gamma'(p,\, E)=\Gamma(p)$ für jedes $p\in E$ (wobei das für G' bestimmte γ zur Unterscheidung mit γ' bezeichnet ist). Man kann diese Frage zurückführen auf die Kennzeichnung maximal-Γ-primer Graphen.

Zunächst einige Begriffe:[1]

(a) G heiße zwischen p und p' Γ-vollständig (kurz Γ_v), wenn $\gamma(p,\, p')\geqq \operatorname{Min}(\Gamma(p),\, \Gamma(p'))$ für $p\neq p'$ bzw. $\gamma(p,\, p)/2\geqq[\Gamma(p)/2]$ für $p=p'$ gilt. Andernfals heiße G zwischen p und p' Γ-unvollständig (kurz Γ_{uv}),[2]

(b) $p\in E$ heiße Γ-vollständig bzw. Γ-unvollständig, wenn G zwischen p under jedem $p'\in E\Gamma_v$ bzw. zwischen p und jedem nicht Γ-vollständigen $p'\in E\Gamma_{uv}$ ist,

(c) E_v bzw. E_{uv} sei die Menge aller Γ-vollständigen bzw. aller Γ-unvollständigen Ecken von G,

(d) G heiße Γ-teilbar bzw. Γ-prim, wenn G (mindestens) einen bzw. keinen Γ-Faktor hat,

(e) G heiße maximal-Γ-prim, wenn G Γ-prim, aber $G=E\cup K\cup\{k\}$ für jede (neue) Kante k, sofern G zwischen den Endpunkten von k Γ_{uv} ist, Γ-teilbar ist.

---

[1] Vgl. K. Wagner, *Faktorklassen in Graphen*, Math. Ann. Bd. 141 (1960) pp. 49–67, im folgenden kurz mit [1] zitiert.

[2] Die obigen Bezeichnungen in den Begriffen (a) bis (e) sind aus [1] (jedoch mit teilweise geringen Abweichungen) übernommen.

Offenbar ist G dann und nur dann Γ-prim, wenn G Faktor eines maximal-Γ-primen Graphen ist.

Dann gilt der

SATZ. *Ein Graph* $G = E \cup K$ *ist* (*in dem nicht trivialen Fall* $E \neq E_v$) *dann und nur dann maximal-*Γ*-prim, wenn er die Eigenschaften*[3] (1), (2), (3) *und die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*

(4) $\gamma(p, E_{uv}) \leqq \Gamma(p) - 1$ *für jedes* $p \in E - E_v$,

(5) $\sum_{p \in E'} (\gamma(p, E - E_v) - \Gamma(p)) \leqq \sigma(E') - 2$ *für jedes* $E' \subseteq E_{uv}$, *wobei* $\sigma(E')$ *die Zahl der Komponenten von* $G(E - (E_v \cup E_{uv}))$ *bedeutet, die durch mindestens eine Kante mit* E' *verbunden sind.*

Kurze Andeutung des Beweises. Hat $\overline{G}$ einen Γ-Faktor F, so heiße jede Kante $k \in F$ rot, jede andere Kante aus $\overline{G}$ blau. Zunächst sei G maximal-Γ-prim ($E \neq E_v$). Ist dann $p \in E - E_v$, so gibt es ein p', so daß G zwischen p und p' Γ_{uv} ist. Fügt man zwischen p und p' eine neue Kante k zu G, so existiert ein Γ-Faktor F von $G \cup \{k\}$. Durch Abschätzung der roten Kanten zwischen E_v und E_{uv} erhält man (4). (5) folgt, indem man in $p_0 \in E'(\subseteq E_{uv})$ eine neue Schlinge anheftet und die Maximaleigenschaft von G und (4, 5), (4, 8) und (4, 9) aus [1] berücksichtigt.

Umgekehrt erfülle ein Graph die Bedingungen (1)–(5). G ist dann nach Satz 8 aus [1] Γ-prim. k sei eine neue Kante mit den Endpunkten p und p', wobei G zwischen p und p' Γ_{uv} sei. Bei der Konstruktion von F in $G \cup \{k\}$ erreicht man durch die Bedingung (5), daß nach jeder Komponente von $G(E - (E_v \cup E_{uv}))$ eine blaue Kante geführt werden kann, ohne daß E_v oder E_{uv} an roten Kanten "überlastet" wird. (4) verhindert, daß p, falls $p \in E - (E_v \cup E_{uv})$, an roten Kanten überlastet wird, wenn man alle Kanten von E_{uv} nach p rot färbt.

KÖLN, GERMANY

[3] Siehe Satz 8 in [1].