By (1) and the lemma, $\|Tx_n\| \leqq \lambda$, $(n=1, 2, \cdots)$, so that $\|y\| \leqq \lambda$. It therefore follows from (2) that

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = 0. \tag{3}$$

Now $Tx_n \to y$; hence by (3), $\lambda x_n \to y$. Since $\lambda \neq 0$ and T is continuous, it follows that $Tx_n \to Ty/\lambda$, so that $Ty = \lambda y$. Finally, by (2) and (3), $\|y\| = \lambda \neq 0$, and the theorem is therefore proved.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES NOMBRES RATTACHÉ AUX POLYNÔMES DE TSCHEBYCHEFF

ERVIN FELDHEIM

Considérons *le polynôme de Tschebycheff particulier*

$$B_n(x) = \frac{[x + (x^2+4)^{1/2}]^{n+1} - [x - (x^2+4)^{1/2}]^{n+1}}{2^{n+1}(x^2+4)^{1/2}}, \tag{1}$$

$$n = -1, 0, 1, 2, \cdots .$$

Si l'on donne à la variable x la valeur $x=2$, ce polynôme prend, comme il est très facile de le vérifier, *des valeurs entières*, et la suite de ces nombres entiers possède des propriétés intéressantes que nous nous proposons de démontrer dans cette note.

Nous déduirons d'abord quelques relations valables pour les polynômes $B_n(x)$; la propriété des nombres mentionnés tout à l'heure que nous voulons établir s'en résultera facilement. Nous écrivons, pour simplifier, B_n au lieu de $B_n(x)$, de sorte que B_n désigne toujours un polynôme et non pas un nombre; pour $x=2$ nous introduirons une nouvelle notation.

La relation principale qui nous servira est bien connue, et se démontre d'ailleurs facilement en partant de (1). C'est la relation

$$B_{n+m} = B_n B_m + B_{n-1} B_{m-1}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

En tenant compte des valeurs initiales du polynôme B_n, calculées au moyen de (1),

$$B_{-1} = 0, \qquad B_0 = 1, \qquad B_1 = x, \qquad B_2 = x^2 + 1,$$

on déduit de (2) une série de relations utiles. On a d'abord

$$B_{n+1} = xB_n + B_{n-1}, \tag{3}$$

$$B_{2n} = B_n^2 + B_{n-1}^2. \tag{4}$$

Remplaçons dans (2) n par 1, et m par $2n-1$; il vient

$$B_{2n} = xB_{2n-1} + B_{2n-2}, \tag{3'}$$

de sorte que, d'après (4),

$$xB_{2n-1} = B_n^2 - B_{n-2}^2. \tag{5}$$

Posons ensuite dans (2), 2 au lieu de n, et $2n$ au lieu de m. Cela donne

$$B_{2n+2} = (x^2 + 1)B_{2n} + xB_{2n-1},$$

d'où, en tenant compte de (3′), nous tirons

$$(x^2 + 2)B_{2n} = B_{2n+2} + B_{2n-2}. \tag{6}$$

Si nous remplaçons dans (2), n par $n-1$ et m par $n+1$, nous aurons, d'après (4),

$$(B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2) + (B_{n-2}B_n - B_{n-1}^2) = 0.$$

Étant donné que $-B_0^2 = -1$, et $B_2 - B_1^2 = 1$, nous en déduisons que l'on a en général

$$B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1} = (-1)^n. \tag{7}$$

Écrivons maintenant (4) pour la valeur $2n$ de l'indice comme

$$B_{4n} = B_{2n}^2 + B_{2n-1}^2 = (B_n^2 + B_{n-1}^2)^2 + B_{2n-1}^2,$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$B_{4n} = (B_n^2 - B_{n-1}^2)^2 + (2B_nB_{n-1})^2 + B_{2n-1}^2. \tag{8}$$

De la même façon, nous trouvons que

$$B_{4n+2} = (B_n^2 - B_{n-1}^2)^2 + (2B_nB_{n-1})^2 + B_{2n+1}^2. \tag{9}$$

Les relations (8) et (9) montrent que *les polynômes B_{4n} et B_{4n+2} se décomposent à la somme des carrés de trois polynômes*. La relation (7) permet de démontrer ensuite que au moins deux de ces polynômes sont consécutifs en ce sens que leur différence, pour $x=2$, est égale à $+1$ ou -1. Nous avons, en effet,

$$\Delta_n = B_n^2 - B_{n-1}^2 - 2B_nB_{n-1} = (-1)^n + (x-2)B_nB_{n-1}.$$

La formule (4) donne, d'autre part, que

$$B_{4n}^2 = (B_{2n}^2 + B_{2n-1}^2)^2 = (B_{2n}^2 - B_{2n-1}^2)^2 + (2B_{2n}B_{2n-1})^2, \tag{10}$$

c'est-à-dire, le carré du polynôme B_{4n} est la somme des carrés de deux polynômes consécutifs dans le sens précisé.

Si nous posons maintenant $x=2$ dans toutes les formules précédentes, et si nous désignons les nombres ainsi obtenus par les notations

$$x_n = B_n(2), \quad c_n = B_{2n}(2), \quad a_n = x_n^2 - x_{n-1}^2, \quad b_n = 2x_n x_{n-1}, \quad c_n = x_{2n},$$

les x_n seront les nombres entiers mentionnés au début de cette note, et les c_n des nombres de même nature, de rang pair (c'est-à-dire correspondant à des indices pairs). La relation (4) montre que

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

(c_n, a_n, b_n sont des "nombres de Pythagore").

Les formules (8) et (9) montrent que

$$c_{2n} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n-1}^2, \qquad c_{2n+1} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n+1}^2.$$

Les nombres c de rang pair sont donc décomposables à la somme des carrés de trois entiers, dont l'un est un nombre de même nature, mais de rang impair, et les deux autres sont des entiers consécutifs.

Nous en déduisons un théorème de la théorie élémentaire des nombres que nous avons démontré directement dans une note en cours de publication:*

Tout entier dont le carré se compose des carrés de deux entiers consécutifs, est la somme des carrés de trois entiers dont deux au moins sont consécutifs.

Si nous posons $x=2$ dans (3) et (6), nous retrouvons les relations

$$(3'') \qquad 2x_n = x_{n+1} - x_{n-1},$$

et

$$(4') \qquad 6c_n = c_{n+1} + c_{n-1},$$

établies dans le travail cité, qui définissent les nombres en question, de même que tous les triangles rectangles dont les côtés sont mesurés par deux entiers successifs. On démontre encore, en utilisant la relation (7), que les nombres c_n satisfont à la relation

$$(11) \qquad c_{n-1}c_{n+1} - c_n^2 = 4.$$

Il est intéressant de chercher la relation entre les polynômes $B_n(x)$ qui correspond à cette formule (11). Écrivons la relation (7) en rem-

* Ervin Feldheim, *Un problème de la théorie élémentaire des nombres*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 66 (1938), pp. 1–7.

plaçant n respectivement par $2n-1$, $2n$, et $2n+1$; on en déduit, en tenant compte de (6), la formule remarquable

$$B_{2n}^2 - B_{2n-2}B_{2n+2} = -x^2,^* \tag{11'}$$

et si l'on y fait $x=2$, on aura immédiatement la relation (11).

Les nombres c_n possèdent encore la propriété que $2c_n^2-1$ est aussi un carré parfait; plus précisément

$$2c_n^2 - 1 = (c_n + x_{2n-1})^2 = \left(\frac{3c_n - c_{n-1}}{2}\right)^2. \tag{12}$$

On peut encore trouver la relation correspondante pour les polynômes de Tschebycheff $B_n(x)$. En effet, ajoutons $x^2B_{2n}^2/4$ aux deux membres de l'équation (7), écrite sous la forme

$$B_{2n}^2 - 1 = B_{2n-1}B_{2n+1} = xB_{2n}B_{2n-1} + B_{2n-1}^2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)B_{2n}^2 - 1 &= \left(\frac{x}{2}B_{2n} + B_{2n-1}\right)^2\\ &= \left(\frac{B_{2n+1}+B_{2n-1}}{2}\right)^2,\end{aligned} \tag{13}$$

ou encore

$$(x^2+4)B_{2n}^2 - 4 = (B_{2n+1}+B_{2n-1})^2, \tag{13'}$$

ce qui redonne, pour $x=2$, la relation (12).

Indiquons, pour terminer, que la formule (1) donne, pour $x=2$, la valeur

$$c_n = \frac{2+2^{1/2}}{4}(3+2(2)^{1/2})^n + \frac{2-2^{1/2}}{4}(3-2(2)^{1/2})^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{14}$$

ce que nous avons obtenu directement dans la note citée comme solution de la formule de récurrence (4').

BUDAPEST, HUNGARY

---

* On démontre de la même façon, que

$$B_{2n+1} - B_{2n-1}B_{2n+1} = x^2, \tag{11''}$$

de sorte que l'on a, en général,

$$B_n^2 - B_{n-2}B_{n+2} = (-1)^{n+1}x^2. \tag{7'}$$

Cette dernière relation se démontre d'ailleurs facilement à l'aide de (3) et (7).