physical phenomena and theories as appear in the first half of his work. We must reserve the second half for notice at another time.

The volume should close here, but does not. For there is a note of 225 pages of the most mathematical character by the two Cosserats on the theory of deformable bodies. Even more than their note in the first volume is this wholly out of place, a worse than vermiform appendix. If the substance of these notes were unimportant, we could ignore them; but as they contain material which forms a distinct contribution to theoretical analytic mechanics, we shall try to give our readers an idea of their content at an early date.

From the numerous adverse comments which we have passed upon Chwolson's two volumes it might appear that we were not pleased with them. This is not so. We have found all the fault we could (a great deal of it with the editors' additions) in the hope that in future editions our criticisms might perhaps be productive of improvements. But without any changes the work is a masterpiece, and one that we should be glad to see not only in physical libraries but upon the shelves of our mathematical seminar rooms, to the end that our students of mathematics might readily avail themselves of its interesting and readable and broadening contents.

EDWIN B. WILSON.

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
BOSTON, MASS.

ARITHMÉTIQUE GÉNÉRALE.

Je trouve dans le BULLETIN (Mars, 1912) un compte-rendu de mon livre Arithmétique générale.

Je crois nécessaire et de mon droit de rectifier une grave erreur du critique. Mon arithmétique n'est pas du tout un corollaire de la physique. J'ai dit au contraire que la mathématique pure doit être à mon avis une préface de la physique. Cela veut-il dire que la mathématique doive être une science expérimentale? Nullement. Or le critique donne à entendre que ce soit là ma façon de penser. Il dit que je démontre mes théorèmes fondamentaux en me servant de "remarques faites expérimentalement sur la nature des grandeurs" et le lecteur de ce compte-rendu doit s'imaginer que ces grandeurs sont des grandeurs physiques, ou naturelles. Cela est absolument faux.

Le critique a lu ma préface, mais il n'a pas lu le livre. Sans quoi il n'aurait pas traité ma théorie de "naïveté." Je suis aussi rigoriste que n'importe qui, et je serais le premier a traîter, non de naif, mais de farceur, celui qui prétendrait baser la mathématique, science de raison, directement sur la physique, science expérimentale.

En réalité j'ai pris pour base de mon Arithmétique générale, le rapport de deux grandeurs géométriques de même espèce: deux segments de droite, deux angles, deux fuseaux d'une même sphère, deux parallelépipèdes rectangles de même base, etc. (voir à ce sujet, ce que j'ai dit au No. 3, page 2).

J'ai reconnu, depuis la publication de mon livre, que je n'ai fait que reprendre d'une façon plus complète la base posée par Duhamel.* Celui-ci appelle rapport de deux grandeurs, leur manière d'être relative. C'est exactement la même idée que celle que j'ai développée. Mon arithmétique est donc basée sur la géométrie euclidienne, et non sur la physique. Il est vraiment étonnant que ce qu'on appelle "l'admirable théorie des proportions d'Euclide, la précision et la netteté remarquables de Duhamel, et l'admirable théorie des quaternions de Hamilton, deviennent des naïvetés quand elles sont exposées par Dumont. (Voir à ce sujet, l'Encyclopédie des sciences mathématiques, tome I, volume I, fascicule 1, pages 134 et 135).

M. Lennes n'a pas lu mon livre. Il est resté hypnotisé devant une réflexion que j'ai émise dans ma préface à propos de la définition d'une somme géométrique de vecteurs. J'ai dit que cette définition n'a pas été choisie au hasard, ni afin de satisfaire au principe de permanence de Hankel, mais bien afin de pouvoir être utilisée en mécanique pour la composition des forces, des vitesses, etc.

Cette réflexion m'avait paru utile à dire, parce que j'avais lu peu auparavant un ouvrage de M. Dassen: "Des quantités mathématiques" où cet auteur explique que si l'on a choisi la définition de la somme géométrique des vecteurs telle que chacun la connait, c'est afin de pouvoir intervertir les termes, comme dans toute somme: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{CD} + \overline{AB}$. Eh bien, en voilà une de naïveté! Car si l'on veut jeter un coup

* Des méthodes dans les sciences de raisonnement, pp. 62–75.

d'oeil sur la théorie des quaternions, on y rencontrera une somme géométrique d'angles (ou d'arcs de grand cercle sur une sphère), somme qui n'est pas commutative, et qui est l'angle d'un produit de quaternions.

Et c'est cette malheureuse réflexion où j'ai parlé de forces, qui a faussé toute la compréhension que M. Lennes s'est faite de ma théorie.

Il n'a pas vu que j'ai tout simplement adapté à tous les nombres, nombres absolus, nombres qualifiés et nombres complexes, les définitions qu'Hamilton avait créées pour les quaternions.

Lorsque j'ai parlé d'expérience, j'ai également été mal compris. Il ne s'agit d'expériences à faire sur des grandeurs physiques, il s'agit de l'expérience, de la connaissance que le penseur a du monde qui l'environne. Or la géométrie est précisément l'image idéale de ce monde. L'homme l'a créée afin de pouvoir plus facilement étudier l'univers. Et c'est donc la géométrie, science rigoureuse, que j'ai prise comme base essentielle de mon Arithmétique, afin que l'arithmétique concours immédiatement, comme la géométrie, à l'étude de l'univers.

Les théories arithmétiques des logiciens ne peuvent satisfaire un esprit hanté par le problème de la rotation de la terre dans le champ magnétique du soleil. Ces théories elles-mêmes qui se piquent d'être pures de tout compromis avec les notions expérimentales (physiques) poursuivent une utopie et se bercent d'illusion. Voici en quoi. Elles se bercent d'illusion en ce sens que toutes ces théories reposent sur la notion d'ordre. La première définition, pierre fondamentale de tout l'édifice, est la suivante: On appelle nombres entiers, une suite de mots ou de signes se succédant dans un ordre caractéristique, arbitrairement choisi une fois pour toutes. Ces signes n'ont aucune signification par eux-mêmes. Ainsi 5 est le signe qui suit 4 et qui précède 6. Rien de plus. La suite commence au caractère 1:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \cdots.$$

Eh bien, dire que 5 vient après 4, ou suit 4, ou succède à 4, ou est à droite de 4, c'est faire appel à la notion temps! ou à la position des organes dans le corps humain (la droite et la gauche).

Les autres définitions, fraction, nombre irrationnel, nombre qualifié, nombre complexe, c'est-à-dire, tous groupes de deux nombres écrits dans un ordre caractéristique, font également appel à cette notion d'ordre, c'est à dire, de temps. C'est, je pense, ce qui avait fait dire à Gauss que l'arithmétique est la science du pur temps.

C'est enfin une utopie que de prétendre émettre des pensées débarrassées des concepts fondamentaux que le monde où nous vivons a mis dans notre conscience; pensées qui n'en sont que le produit, synthétisé grâce à notre mémoire consciente ou non.

Pour en revenir à ma méthode, je dirai que je suis aussi désireux que n'importe qui, de découvrir où se cachent des trous dans mes démonstrations, et le cas échéant, comment il faudrait les combler. Malheureusement les critiques n'ont pas le temps de lire consciencieusement les livres qu'ils doivent analyser. Il en est en mathématique comme dans les salons bien fréquentés: Chacun ne s'intéresse à la conversation que pour la part qu'il y prend.

J'espère que vous voudrez bien insérer cette réponse à votre compte-rendu, et que M. Lennes reconnaîtra de bonne foi qu'il c'est trompé quant à la valeur scientifique de mon point de départ.

E. DUMONT.

I do not deem it necessary to refer in detail to the strictures which Professor Dumont has made on my recent review of his Arithmétique générale. I need only to repeat that there are no explicitly stated postulates in the book, that what are usually regarded as such in arithmetic are proved as theorems by general reference to statements about magnitudes in general. These statements about magnitudes in general are obtained quasi-inductively from geometric considerations. In this sense the book is truly naïve, and in this sense Hamilton's treatment may well be regarded as naïve.

N. J. LENNES.