African Diaspora Journal of Mathematics
Volume 17, Number 1, pp. 10–31 (2014)
ISSN 1539-854X
www.math-res-pub.org/adjm

L ’ - ` L

M BANGOURA[*†]
Département de Mathématiques, Université de Conakry
BP 1147, République de Guinée,

I BAKAYOKO[‡§]
Département de Mathématiques, Centre Universitaire de N’Zérékoré
BP 50, N’Zérékoré, République de Guinée

Abstract. Lie quasi-bialgebras are natural generalisations of Lie bialgebras introduced by Drinfeld. To any finite-dimensional Lie quasi-bialgebra structure $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ and a $\mathcal{D}$-module structure M, where $\mathcal{D}$ is the double of the given Lie quasi-bialgebra, we associate one operator $L_M = \partial_{\mu,M}d_{\gamma,M} + d_{\gamma,M}\partial_{\mu,M}$ called the laplacien of the Lie quasi-bialgebra associated to the $\mathcal{D}$-module structure. We establish the fondamentals properties of the laplacian and give an explicit formula for L_M by mean of adjoint characters of $\mathcal{G}$ and $\mathcal{G}^*$.

Résumé. Les quasi-bialgèbres de Lie sont des généralisations naturelles, introduites par Drinfeld, des bialgèbres de Lie. A toute structure de quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ de dimension finie et une structure de $\mathcal{D}$-module quelconque M, où $\mathcal{D}$ est le double de la quasi-bialgèbre de Lie donnée, on associe un opérateur $L_M = \partial_{\mu,M}d_{\gamma,M} + d_{\gamma,M}\partial_{\mu,M}$ appelé le laplacien de la quasi-bialgèbre de Lie associé à la structure de $\mathcal{D}$-module. Nous établissons les propriétés fondamentales du laplacien d’une quasi-bialgèbre de Lie et nous donnons une formule explicite de L_M en fonction des caractères adjoints de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^*$.

AMS Subject Classification: 17B70,17A30.

Keywords: Laplacien, quasi-bialgèbre de Lie, cohomologie d’algèbre de Lie, dérivation, double d’une quasi-bialgèbre de Lie.

1 Introduction

Le but de ce travail est de construire pour une quasi-bialgèbre de Lie donnée $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ et un $\mathcal{D}$-module M, $\mathcal{D}$ étant le double de la quasi-bialgèbre de Lie, un opérateur linéaire de degré 0 sur $\Lambda\mathcal{G}\otimes M$, appelé le **laplacien** de la quasi-bialgèbre de Lie. La notion de laplacien que nous introduisons ici

[*]e-mail address: bangm59@yahoo.fr
[†]DAAD financial support and Senior Associate of the Abdus Salam ICTP, Trieste, Italy
[‡]e-mail address: ibrahimabakayoko@yahoo.fr
[§]Research supported by DAAD and Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) BP : 613 Porto-Novo, Bénin

est une généralisation d'une part, de celle introduite par Kostant [10], [11] sur un espace vectoriel de dimension finie muni de deux opérateurs linéaires disjoints [10] de carrés nuls, et d'autre part de celle introduite par Lu [15] pour les bialgèbres de Lie.

Les quasi-bialgèbres de Lie [6] ou quasi-bialgèbres jacobiennes [2], [4], [8] sont des généralisations naturelles des bialgèbres de Lie [5], introduites par Drinfeld comme étant les limites classiques des algèbres quasi-Hopf [6] ; contrairement aux bialgèbres de Lie, elles sont caractérisées par l'existence d'un défaut d'identité de co-Jacobi pour le co-crochet, qui est en fait le cobord d'un certain élément de $\Lambda^3\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est l'espace vectoriel sur lequel est définie la structure de quasi-bialgèbre de Lie, alors que pour les bialgèbres de Lie, ce défaut est nul.

Dans la section 2, nous faisons un bref rappel de quelques notions fondamentales qui sont les outils de travail dans toute la suite, notamment le crochet de Schouten algébrique, la définition et quelques propriétés des quasi-bialgèbres de Lie.

Dans la section 3, nous définissons le laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie et nous établissons ses propriétés fondamentales. Tout d'abord, pour une quasi-bialgèbre de Lie donnée $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$, nous définissons le laplacien dans le cas où la structure de $\mathcal{D}$-module est triviale et on le note L ; nous montrons que l'opérateur ainsi défini est une dérivation de degré 0 de $(\Lambda\mathcal{G},\wedge)$ et de $(\Lambda\mathcal{G},[,]^{\mu})$ où $[,]^{\mu}$ désigne le crochet de Schouten algébrique défini par le crochet d'algèbre de Lie μ et nous donnons son expression explicite en fonction des caractères adjoints de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^*$. Ensuite nous définissons le laplacien dans le cas général pour une structure de $\mathcal{D}$-module quelconque M et on le note par L_M ; nous montrons qu'il est une dérivation de degré 0 de $(\Lambda\mathcal{G}\otimes M,\wedge)$ et de $(\Lambda\mathcal{G}\otimes M,[,]^{\mu,M})$, où $[,]^{\mu,M}$ est un crochet d'algèbre de Lie graduée sur $\Lambda\mathcal{G}\otimes M$ généralisant le crochet de Schouten algébrique sur $\Lambda\mathcal{G}$. Nous établissons la formule donnant l'expression explicite de L_M en fonction des caractères adjoints de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^*$, et de l'élément de Casimir correspondant au produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$. Enfin, nous définissons la notion de laplacien paramétré par un couple (x,ξ), $x\in\mathcal{G}$ et $\xi\in\mathcal{G}^*$, qui est une autre généralisation de la notion de laplacien, cette dernière s'obtenant pour le couple $(0,0)$ et on montre qu'une quasi-bialgèbre de Lie est unimodulaire si et seulement si son laplacien paramétré de paramètre $(\frac{1}{2}x^{\gamma},\frac{1}{2}\xi^{\mu})$ est identiquement nul, ξ^{μ} et x^{γ} étant les caractères adjoints de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ respectivement.

La section 4 dénommée annexe est consacrée aux définitions et résultats de J. H. Lu sur le Laplacien d'une bialgèbre de Lie ([15]) qui sont utiles pour rendre le présent travail auto-contenu.

Dans toute la suite nous supposerons les structures d'algèbre de Lie de dimension finie. Ainsi, si $(\mathcal{G},\mu)$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual, le crochet de dualité entre $\Lambda\mathcal{G}$ et $\Lambda\mathcal{G}^*$ étendant celui entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ est défini par

$$<\xi_1\wedge\xi_2\wedge...\wedge\xi_m, x_1\wedge x_2\wedge...\wedge x_n>=\delta_m^n det(<\xi_i,x_j>),$$

$\xi_i\in\mathcal{G}^*, i=1,...,m, x_j\in\mathcal{G}, j=1,...,n.$
Pour tout $X\in\Lambda\mathcal{G}$, notons par $\varepsilon_X\in End(\Lambda\mathcal{G})$ l'application définie par

$$Y\in\Lambda\mathcal{G}\to X\wedge Y\in\Lambda\mathcal{G},$$

et par $i_X\in End(\Lambda\mathcal{G}^*)$ sa transposée définie par

$$<i_XA,Y>=<A,X\wedge Y>,\forall Y\in\Lambda\mathcal{G},\forall A\in\Lambda\mathcal{G}^*.$$

2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons certaines notions standards utiles pour la suite du travail.

2.1 Crochet de Schouten algébrique

Soit $(\mathcal{G},\mu)$ une algèbre de Lie sur le corps $\mathbf{K}$, supposé égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, où $\mu : \Lambda^2\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est le crochet d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$.

Définition 2.1. *Le crochet de Schouten algébrique [14] est la structure d'algèbre de Lie graduée $[,]^\mu$, sur l'algèbre extérieure, $\Lambda\mathcal{G} = \bigoplus_{p\geq -1}\Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, de $\mathcal{G}$ qui :*
(i) s'annule si l'un des arguments est dans $\mathbf{K}$*,*
(ii) étend le crochet de Lie μ, i.e

$$[x,y]^\mu = \mu(x,y), \forall x,y \in \mathcal{G},$$

(iii) satisfait la règle suivante sur le degré :

$$[X,Y]^\mu \in \Lambda^{p+q+1}\mathcal{G},$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$ et $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$,
(iv) satisfait la règle de Leibniz graduée

$$[X,Y\wedge Z]^\mu = [X,Y]^\mu \wedge Z + (-1)^{p(q+1)}Y\wedge[X,Z]^\mu,$$

si $X \in \Lambda^{p+1}\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda^{q+1}\mathcal{G}$ et $Z \in \Lambda\mathcal{G}$.

Il est évident que $[,]^\mu$ satisfait l'anti-commutativité graduée et l'identité de Jacobi graduée.

Remarque 2.1. *On peut définir un tel crochet sur $\Lambda\mathcal{G}$ pour tout élément $\mu \in Hom(\Lambda^2\mathcal{G},\mathcal{G})$; l'anti-commutativité graduée et la règle de Leibniz graduée restent en vigueur, mais en général le crochet $[,]^\mu$ ne vérifie pas l'identité de Jacobi graduée et il la vérifie si et seulement si $(\mathcal{G},\mu)$ est une algèbre de Lie [14]. Dans toute la suite le terme crochet signifiera un élément de $Hom(\Lambda^2\mathcal{G},\mathcal{G})$; il sera un crochet de Lie s'il vérifie l'identité de Jacobi.*

Soit $(\mathcal{G},\mu)$ une algèbre de Lie et soit M un $\mathcal{G}$-module, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ agit sur M. Pour $X = x_1\wedge ...\wedge x_k \in \Lambda^k\mathcal{G}$, $Y \in \Lambda\mathcal{G}$ et $m \in M$, définissons sur $\Lambda\mathcal{G}\otimes M$, un crochet d'algèbre de Lie graduée noté $[,]^{\mu,M}$ en posant [15] :

$$X\wedge(Y\otimes m) = (X\wedge Y)\otimes m$$

$$[X,m]^{\mu,M} = [x_1\wedge ...\wedge x_k, m]^{\mu,M} = (-1)^k\sum_1^k(-1)^i x_1\wedge ...\wedge \hat{x}_i\wedge x_k\otimes x_i\cdot m$$

$$[X,Y\otimes m]^{\mu,M} = [X,Y]^\mu\otimes m + (-1)^{(|X|-1)|Y|}Y\wedge[X,m]^{\mu,M}.$$

Le crochet ainsi défini satisfait l'anti-commutativité graduée, la règle de Leibniz graduée et l'identité de Jacobi graduée [15]. Il généralise le crochet de Schouten algébrique et $[,]^{\mu,M} = [,]^\mu$ lorsque $M = \mathbf{K}$.

2.2 Définition d'une quasi-bialgèbre de Lie et notations

Pour une algèbre de Lie donnée $(\mathcal{G},\mu)$, nous désignerons par δ_μ l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg défini par l'action adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\Lambda\mathcal{G}$, i.e $\delta_\mu = d_{\mu,\Lambda\mathcal{G}}$.

Définition 2.2. *Une quasi-bialgèbre de Lie est un quadruplet $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ où $(\mathcal{G},\mu)$ est une algèbre de Lie munie d'un co-crochet $\gamma \in Hom(\mathcal{G},\Lambda^2\mathcal{G})$ qui est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu)$, à valeurs dans $\Lambda^2\mathcal{G}$ pour l'action adjointe définie par μ, i.e $\delta_\mu\gamma = 0$ et d'un élément $\phi \in \Lambda^3\mathcal{G}$ tels que :*

1. $\frac{1}{2}Alt(\gamma\otimes 1)\gamma(x) = (\delta_\mu\phi)(x), \forall x \in \mathcal{G}$;

2. $Alt(\gamma\otimes 1\otimes 1)(\phi) = 0$;

où Alt est l'opérateur alternateur défini sur l'algèbre tensorielle de $\mathcal{G}$ par

$$Alt(X_1\otimes ....\otimes x_n) = \sum_\sigma sign(\sigma)x_{\sigma(1)}\otimes ...\otimes x_{\sigma(n)},$$

$x_i \in \mathcal{G}, i = 1,...,n$, σ étant une permutation de $\{1,...,n\}$ et $sign(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

Remarque 2.2. *Dans [1], [2] et [3], une quasi-bialgèbre de Lie est appelée une quasi-bigèbre de Lie.*

Remarque 2.3. *1- Dans le cas où $\phi = 0$, le triplet $(\mathcal{G},\mu,\gamma)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, n'est rien d'autre qu'une bialgèbre de Lie [5].*
2- La condition 3 signifie que γ ne vérifie pas l'identité co-Jacobi et donc son transposé n'est pas un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$. Ainsi, contrairement à la notion de bialgèbre de Lie, la notion de quasi-bialgèbre de Lie n'est pas auto-duale, l'objet dual est appelé une bialgèbre quasi-Lie [6] ou quasi-bialgèbre co-jacobienne [2], [8]. Dans ce travail nous considérerons pour des fins d'usage, le transposé de γ comme étant le crochet sur $\mathcal{G}^*$ et nous le noterons aussi par γ pour simplicité d'écriture, i.e

$$<\gamma(x),\xi\wedge\eta> = <x,\gamma(\xi,\eta)>, \forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi,\eta \in \mathcal{G}^*.$$

Définition 2.3. *Une quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ est dite exacte ou cobord si il existe un élément $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{G}$ tel que le 1-cocycle $\gamma : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathcal{G}$ soit le cobord de $\mathbf{r}$, i.e*

$$\gamma(x) = (\delta_\mu\mathbf{r})(x) = [x,\mathbf{r}]^\mu = -[\mathbf{r},x]^\mu, \forall x \in \mathcal{G},$$

et

$$\phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r},\mathbf{r}]^\mu.$$

La donnée d'une structure de quasi-bialgèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ détermine une unique structure d'algèbre de Lie $[,]_\mathcal{D}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathcal{G}\oplus\mathcal{G}^*$ qui laisse invariant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$,

$$<\xi+x,y+\eta> = <\xi,y> + <x,\eta>, \qquad \forall\xi+x \in \mathcal{D}^*, \forall y+\eta \in \mathcal{D},$$

en posant

$$[x,y]_\mathcal{D} = \mu(x,y),$$
$$[x,\xi]_\mathcal{D} = -ad^{\gamma*}_\xi x + ad^{\mu*}_x\xi,$$
$$[\xi,\eta]_\mathcal{D} = \phi(\xi,\eta) + \gamma(\xi,\eta),$$

où $<ad^{\mu*}_x\xi, y> = -<\xi,\mu(x,y)>$, $<ad^{\gamma*}_\xi x,\eta> = -<x,\gamma(\xi,\eta)>$ et $\phi(\xi,\eta) = \iota_{\xi\wedge\eta}\phi$, pour tous $x,y \in \mathcal{G}, \xi,\eta \in \mathcal{G}^*$.

En général, on montre dans [8] que les structures de quasi-bialgèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les structures d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ laissant invariant le produit scalaire canonique, dont $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie. Dans ces conditions le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{G})$, avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{D}$, est appelé un **couple de Manin** [6]. L'étude des quasi-bialgèbres de Lie est rendue facile grâce au twisting [6], [8] appelé modification dans [2], qui consiste à construire de nouvelles structures de quasi-bialgèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ à partir d'une déjà connue ; ce qui permet de les étudier en termes de classes d'équivalence [8], en montrant que les classes d'équivalence modulo twisting sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.

Définition 2.4. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ muni du crochet de Lie $[,]_{\mathcal{D}}$ défini ci-dessus est appelé le double de la quasi-bialgèbre de Lie donnée, et noté $\mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$.*

Nous avons le résultat suivant [2] :

Proposition 2.1. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Alors nous avons les relations suivantes :*

1. $ad^{\mu*}_{\mu(x,y)} = [ad^{\mu*}_x, ad^{\mu*}_y], \forall x, y \in \mathcal{G}$;
2. $ad^{\gamma*}_\xi \mu(x,y) = \mu(ad^{\gamma*}_\xi x, y) + \mu(x, ad^{\gamma*}_\xi y) + ad^{\gamma*}_{ad^{\mu*}_y \xi} x - ad^{\gamma*}_{ad^{\mu*}_x \xi} y$
   $\forall x, y \in \mathcal{G}, \forall \xi \in \mathcal{G}^*$;
3. $ad^{\gamma*}_{\gamma(\xi,\eta)} x = [ad^{\gamma*}_\xi, ad^{\gamma*}_\eta](x) + ad^{\mu}_x \phi(\xi,\eta) - \phi(ad^{\mu*}_x \xi, \eta) - \phi(\xi, ad^{\mu*}_x \eta)$,
   $\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$;
4. $ad^{\mu*}_x \gamma(\xi,\eta) = \gamma(ad^{\mu*}_x \xi, \eta) + \gamma(\xi, ad^{\mu*}_x \eta) + ad^{\mu*}_{ad^{\gamma*}_\eta x} \xi - ad^{\mu*}_{ad^{\gamma*}_\xi x} \eta$,
   $\forall x \in \mathcal{G}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}^*$;
5. $\oint \gamma(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = -\oint ad^{\mu*}_{\phi(\xi,\eta)} \zeta, \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$;
6. $\oint \phi(\gamma(\xi,\eta),\zeta) = \oint ad^{\gamma*}_\xi \phi(\eta,\zeta), \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$.
   où $[,]$ désigne le crochet commutateur des endormorphismes et $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}^*$.

Dans [4], on montre que le double de toute quasi-bialgèbre de Lie est muni, en plus de la structure d'algèbre de Lie définie par $[,]_{\mathcal{D}}$, d'une structure canonique de quasi-bialgèbre de Lie exacte ; plus précisement.

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$ le double d'une quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$. Soit (e_i) une base de $\mathcal{G}$ et (ξ^i) la base duale de $\mathcal{G}^*$. Posons*

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge \xi^i.$$

Alors $(\mathcal{D}, \mathbf{r})$ est une quasi-bialgèbre de Lie exacte et est appelée la quasi-bialgèbre de Lie double de $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$.

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Soient d_μ, ∂_μ et ∂_γ les dérivations associées à la quasi-bialgèbre de Lie donnée.
Dans [3], on a le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Alors les opérateurs d_μ, ∂_μ et ∂_γ satisfont les propriétés suivantes :*

1. $\partial_\gamma^2 + d_\mu \iota_\phi + \iota_\phi d_\mu - \iota_{\partial_\mu \phi} = 0$.

2. $\partial_\gamma \iota_\phi + \iota_\phi \partial_\gamma = 0$.

3. $\partial_\gamma \iota_x + \iota_x \partial_\gamma = -\iota_{\gamma(x)}$, $\forall x \in \mathcal{G}$.

On remarque bien que si $\phi = 0$, alors $\partial_\gamma^2 = 0$ et par transposition $d_\gamma^2 = 0$.

3 L'opérateur laplacien

Dans cette section, à toute structure de quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ et à toute structure de $\mathcal{D}$-module M, nous allons associer une dérivation de degré 0 sur $(\Lambda\mathcal{G}\otimes M,\wedge)$ et $(\Lambda\mathcal{G}\otimes M,[,]^{\mu,M})$.

3.1 Le laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie associé à la structure triviale de $\mathcal{D}$-module

Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et $\mathcal{D}$ son algèbre de lie double. Soient ∂_μ et d_γ les opérateurs définis à partir de la structure triviale de $\mathcal{D}$-module, i.e $M = K$.

Définition 3.1. *L'opérateur*

$$L = \partial_\mu d_\gamma + d_\gamma \partial_\mu : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^k\mathcal{G}$$

est appelé le **laplacien** *de la quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$.*

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie.*

1. *Les opérateurs L et ∂_μ commutent, c'est-à-dire $[L,\partial_\mu] = 0$;*

2. *KerL est stable pour l'opérateur ∂_μ, i.e $X \in Kerl \Rightarrow \partial_\mu(X) \in Kerl$;*

3. *$ImL \subseteq Im\partial_\mu + Imd_\gamma$;*

4. *$Ker\partial_\mu \cap Kerd_\gamma \subseteq KerL$;*

5. *l'opérateur d_γ agit sur l'espace d'homologie $H_\star(KerL,\partial_\mu)$.*

Démonstration : Elle est immédiate.
Le Laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 3.1. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie.*

1. *Le laplacien L est une dérivation de $(\Lambda\mathcal{G},\wedge)$ de degré 0, i.e*

$$L(X\wedge Y) = L(X)\wedge Y + X\wedge L(Y), \forall X,Y \in \Lambda\mathcal{G}.$$

2. *Le laplacien L est une dérivation de $(\Lambda\mathcal{G},[,]^\mu)$ de degré 0, i.e*

$$L([X,Y]^\mu) = [L(X),Y]^\mu + [X,L(Y)]^\mu, \forall X,Y \in \Lambda\mathcal{G}.$$

Démonstration : Elle se démontre de manière analogue que dans le cas des bialgèbre de Lie ([15], voir annexe, théorèm B.1).
De ces propriétés de dérivation du laplacien, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3.1. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et soit L son laplacien. Alors*

1. $[L,ad^{\mu}_{x}] = ad^{\mu}_{L(x)}, \qquad [L,\varepsilon_X] = \varepsilon_{L(X)}, \quad \forall x \in \mathcal{G}, \forall X \in \Lambda\mathcal{G};$
2. $[L,ad^{\gamma*}_{\xi}] = -ad^{\gamma*}_{L^*(\xi)}, \qquad [L,i_A] = -i_{L^*(A)}, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}^*, \forall A \in \Lambda\mathcal{G}^*.$

Dans [1], on montre qu'il existe une représentation $\mathfrak{R}$ du double $\mathcal{D}$ d'une quasi-bialgèbre de Lie sur son algèbre extérieure $\Lambda\mathcal{G}$, définie par

$$\mathfrak{R}_x = \varepsilon_{d_\gamma x} + ad^{\mu}_{x} - \frac{1}{2} < \xi^{\mu}, x > Id,$$

$$\mathfrak{R}_\xi = -i_{d_\mu \xi} + ad^{\gamma*}_{\xi} - \varepsilon_{i_\xi \phi} + \frac{1}{2} < x^{\gamma}, \xi > Id$$

pour $x \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$. Alors, on a

Proposition 3.2. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie.*

1. $[L,\mathfrak{R}_x] = \varepsilon_{L(d_\gamma x)} + ad^{\mu}_{L(x)} \qquad x \in \mathcal{G};$
2. $[L,\mathfrak{R}_\xi] = i_{(d_\mu \circ L^*)(\xi)} - ad^{\gamma*}_{L^*(\xi)} - \varepsilon_{(L\circ i_\xi)(\phi)}, \quad \xi \in \mathcal{G}^*.$

Démonstration : La démonstration de cette proposition découle du corollaire 3.1.
Soit $\xi^{\mu} \in \mathcal{G}^*$ le caractère adjoint de $\mathcal{G}$ et $x^{\gamma} \in \mathcal{G}$ définis respectivement par

$$< \xi^{\mu}, x >= tr(ad^{\mu}_{x}), \qquad \forall x \in \mathcal{G}$$

et

$$< x^{\gamma}, \xi >= tr(ad^{\gamma}_{\xi}), \qquad \forall \xi \in \mathcal{G}^*.$$

Rappelons que si $\xi^{\mu} = 0$, alors l'algèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu)$ est dite unimodulaire.
Par ailleurs, bien que $(\mathcal{G}^*,\gamma)$ ne soit pas une algèbre de Lie, nous appelerons aussi x^{γ} le caractère adjoint de $\mathcal{G}^*$.

On a le résultat suivant [1] :

Lemme 3.1. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Alors les éléments ξ^{μ} et x^{γ} satisfont les propriétés suivantes :*

1. *$ad^{\mu*}_{x}\xi^{\mu} = 0, \forall x \in \mathcal{G}$, ou de manière équivalente $d_\mu(\xi^{\mu}) = 0$.*
2. *$< x^{\gamma}, \gamma(\xi,\eta) >=< \xi^{\mu}, \phi(\xi,\eta) > +2(i_{d_\mu(\xi)} i_\eta \phi) - 2(i_{d_\mu(\eta)} i_\xi \phi), \forall \xi,\eta \in \mathcal{G}^*$, ou de manière équivalente $-ad^{\gamma*}_{\xi} x^{\gamma} = \phi(\xi^{\mu},\xi) + 2\iota_\xi(\partial_\mu \phi)$.*

Lemme 3.2. *Soient $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie , $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ une base de $\mathcal{G}$ et $\{\xi^i\}_{i=1}^{n}$ sa base duale. On a les relations suivantes :*

1.
$$\sum_{i=1}^{n} ad^{\mu*}_{e_i}\xi^i = \xi^{\mu}, \quad \sum_{i=1}^{n} ad^{\gamma*}_{\xi^i} e_i = x^{\gamma}.$$

2.
$$\varepsilon_{\xi^{\mu}} = \sum_{i} ad^{\mu*}_{e_i}\varepsilon_{\xi^i} - \sum_{i} \varepsilon_{\xi^i} ad^{\mu*}_{e_i}.$$

3.

$$\varepsilon_{x^\gamma} = \sum_i^n ad_{\xi^i}^{\gamma*}\varepsilon_{e_i} - \sum_i^n \varepsilon_{e_i} ad_{\xi^i}^{\gamma*}.$$

Théorème 3.2. *Le laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ s'écrit explicitement sous la forme :*

$$L = \frac{1}{2}(ad_{x^\gamma}^{\mu} - ad_{\xi^\mu}^{\gamma*}),$$

et

$$L^* = \frac{1}{2}(-ad_{x^\gamma}^{\mu*} + ad_{\xi^\mu}^{\gamma}).$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du Théorème B.2.
Comme dans le cas des bialgèbres de Lie [15], nous adopterons dans toute la suite les définitions suivantes :

Définition 3.2. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Le nombre $< x^\gamma, \xi^\mu >$ s'appelle le nombre modulaire de la quasi-bialgèbre de Lie donnée.*

Définition 3.3. *Une quasi-bialgèbre de Lie est dite unimodulaire si son nombre modulaire est égal à* 0.

Ainsi, une condition suffisante pour qu'une quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ soit unimodulaire est que $(\mathcal{G},\mu)$ soit unimodulaire en tant qu'algèbre de Lie ou que $x^\gamma = 0$.
Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Le nombre modulaire d'une quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ est égal à la trace de la restriction de son laplacien à $\mathcal{G}$, i.e*

$$tr(L|_{\mathcal{G}}) = < x^\gamma, \xi^\mu > .$$

Démonstration : En effet, soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de $\mathcal{G}$ et $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ sa base duale. De ce qui précède, on sait que $L = \frac{1}{2}(ad_{x^\gamma}^{\mu} - ad_{\xi^\mu}^{\gamma*})$; d'où par définition de la trace

$$\begin{aligned} tr(L|_{\mathcal{G}}) &= < \textstyle\sum_{i=1}^n L(e_i), \xi^i > \\ &= \frac{1}{2} < \textstyle\sum_{i=1}^n ad_{x^\gamma}^{\mu} e_i, \xi^i > - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^n ad_{\xi^\mu}^{\gamma*} e_i, \xi^i > \\ &= \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi^\mu > + \frac{1}{2} < x^\gamma, \xi^\mu > = < x^\gamma, \xi^\mu > . \end{aligned}$$

Les opérateurs d_μ et d_γ (voir annexe, formules (A.7) et (B.13)) s'écrivent explicitement en fonction des vecteurs d'une base quelconque de $\mathcal{G}$ et de sa base duale dans $\mathcal{G}^*$ comme suit :

Lemme 3.3. *Soient $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie , $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de $\mathcal{G}$ et $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ sa base duale. Alors les opérateurs d_μ et d_γ s'écrivent sous la forme :*

1.

$$d_\mu = \frac{1}{2}\sum_i^n \varepsilon_{\xi^i} ad_{e_i}^{\mu*}$$

2.

$$d_\gamma = \frac{1}{2}\sum_i^n \varepsilon_{e_i} ad_{\xi^i}^{\gamma*}.$$

3. Si $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ est une quasi-bialgèbre de Lie exacte, i.e $\gamma = \delta_\mu r$, $r = r_j \wedge r'_j \in \wedge^2\mathcal{G}$, alors

$$d_\gamma = \varepsilon_r\partial_\mu - \partial_\mu\varepsilon_r - \varepsilon_{r_0} \text{ où } r_0 = -\partial_\mu r = \sum_{j=1}^{n}\mu(r_j,r'_j).$$

Proposition 3.4. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie exacte définie par $r = r_j \wedge r'_j \in \Lambda^2\mathcal{G}$; alors on a :*

$$L = ad^\mu_{r_0} \quad et \quad L^* = -ad^{\mu*}_{r_0}, où \ r_0 = -\partial_\mu r = \sum_{j=1}^{n}\mu(r_j,r'_j).$$

Démonstration : Elle se démontre comme dans le cas des bialgèbres de Lie exactes ([15], voir annexe, Proposition B.2).
Comme conséquence des propositions 3.3 et 3.4, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3.2. *Toute quasi-bialgèbre de Lie exacte est unimodulaire.*

En particulier, d'après le lemme de Whitehead, toute structure de quasi-bialgèbre de Lie sur une algèbre de Lie semi-simple est unimodulaire, car elle est exacte.
Sous l'effet du twisting (modification), le laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie subit une transformation de la manière suivante :

Corollaire 3.3. *Soient $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ et $(\mathcal{G},\mu,\gamma',\phi')$ deux quasi-bialgèbres de Lie équivalentes par modification modulo(r), où $r = r_j \wedge r'_j \in \Lambda^2\mathcal{G}$; soient L le laplacien de $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ et L' le laplacien de $(\mathcal{G},\mu,\gamma',\phi')$. Alors*

$$L' = L + ad^\mu_{r_0}, où \ r_0 = -\partial_\mu r.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser $\gamma' = \gamma + d_\mu r$, et la conclusion se déduit de la proposition 3.4.

3.2 Interprétation du Laplacien

Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_\gamma} & \Lambda^k\mathcal{G} & \xrightarrow{d_\gamma} & \Lambda^{k+1}\mathcal{G} & \xrightarrow{d_\gamma} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_\gamma} & \Lambda^{k-1}\mathcal{G} & \xrightarrow{d_\gamma} & \Lambda^k\mathcal{G} & \xrightarrow{d_\gamma} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_\mu} & &
\end{array}$$

On remarque que chaque colonne du diagramme ci-dessus est un complexe car $\partial_\mu^2 = 0$, alors que les lignes ne le sont pas du fait que $d_\gamma^2 \neq 0$. Dans ces conditions, le diagramme n'est pas un bicomplexe, on l'appelera tout simplement un pré-bicomplexe.
Comme les opérateurs ∂_μ et d_γ sont linéaires gradués de degrés respectifs -1 et $+1$, le commutateur gradué de ces deux opérateurs s'écrit $[\partial_\mu,d_\gamma] = \partial_\mu d_\gamma - (-1)^{|\partial_\mu||d_\gamma|}d_\gamma\partial_\mu = \partial_\mu d_\gamma + \partial_\mu d_\gamma = L$. Ainsi, le Laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie mesure le défaut de commutativité graduée du pré-bicomplexe ou plus précisement des opérateurs ∂_μ et d_γ.

3.3 Le laplacien du double d'une quasi-bialgèbre de Lie

Soient $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie, $\mathcal{D}=\mathcal{G}\bowtie\mathcal{G}^*$ son double. Soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de $\mathcal{G}$ et $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ sa base duale. Posons $\mathbf{r}_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n[e_i,\xi^i]_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}$. Alors, on a :

Proposition 3.5. *Pour toute quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ on a :*

1. $\mathbf{r}_0=\frac{1}{2}(-x^\gamma+\xi^\mu)$

2. $L=-ad_{\mathbf{r}_0}|_{\wedge\mathcal{G}}$ *et* $L^*=ad_{\mathbf{r}_0}|_{\wedge\mathcal{G}^*}+\beta$ *où* $\beta:.\wedge^k\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}\otimes\wedge^{k-1}\mathcal{G}^*$ *avec*

$$\beta(\xi_1\wedge\xi_2\wedge...\wedge\xi_k)=\sum_i^k(-1)^{i-1}(\iota_{\xi_i}(\partial_\mu\phi))\otimes\xi_1\wedge\xi_2\wedge...\wedge\hat{\xi}_i...\wedge\xi_k,\quad \xi_i\in\mathcal{G}^*,\forall i.$$

Démonstration :

1. La preuve est identique à celle du résultat de [15] dans le cas des bialgèbres de Lie ; elle utilise l'invariance du produit scalaire canonique par rapport au crochet $[,]_{\mathcal{D}}$.
2. En utilisant la définition du crochet sur le double $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}$, il vient :
   $2ad_{\mathbf{r}_0}x=2[\mathbf{r}_0,x]_{\mathcal{D}}=-[x^\gamma+\xi^\mu,x]_{\mathcal{D}}=-\mu(x^\gamma,x)+ad^{\gamma*}_{\xi^\mu}x-ad^{\mu*}_x\xi^\mu$.
   Mais, d'après le lemme 3.2, $ad^{\mu*}_x\xi^\mu=0$. D'où
   $$ad_{\mathbf{r}_0}x=-\frac{1}{2}(ad^\mu_{x^\gamma}-ad^{\mu*}_{\xi^\mu})(x)=-L(x).$$
   L étant une dérivation de $\Lambda\mathcal{G}$, on trouve
   $$L=-ad_{\mathbf{r}_0}|_{\wedge\mathcal{G}}.$$
   De même, en utilisant le point 2 du même lemme, on a pour tout $\xi\in\mathcal{G}^*$:
   $$\begin{aligned}2ad_{\mathbf{r}_0}\xi &= 2[\mathbf{r}_0,\xi]_{\mathcal{D}}\\ &= -[x^\gamma,\xi]_{\mathcal{D}}+[\xi^\mu,\xi]_{\mathcal{D}}=2L^*(\xi)-2\beta(\xi).\end{aligned}$$
   D'où $L^*|_{\mathcal{G}^*}=ad_{\mathbf{r}_0}|_{\mathcal{G}^*}+\beta|_{\mathcal{G}^*}$

La conclusion s'obtient du fait que L^* est une dérivation de $\Lambda\mathcal{G}^*$, i.e $L^*=ad_{\mathbf{r}_0}|_{\wedge\mathcal{G}^*}+\beta$

Proposition 3.6. *Soient $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et $L_{\mathcal{D}}$ le laplacien de la quasi-bialgèbre de Lie double $(\mathcal{D},\mathbf{r})$. Alors, de la décomposition $\Lambda\mathcal{D}=\Lambda\mathcal{G}\otimes\Lambda\mathcal{G}^*$, on a :*

$$L_{\mathcal{D}}=-L\otimes1+1\otimes(L^*-\beta)$$

Démonstration : D'après le théorème 2.1, la structure de quasi-bialgèbre de Lie exacte du double de $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ est définie par

$$\mathbf{r}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i\wedge\xi^i$$

Ainsi, d'après la proposition 3.4, $L_{\mathcal{D}} = ad_{\mathbf{r}_0}$ où $\mathbf{r}_o = -\partial_\mu \mathbf{r}$. Comme $\Lambda\mathcal{D} = \Lambda\mathcal{G} \otimes \Lambda\mathcal{G}^*$ et $L_{\mathcal{D}}$ est une dérivation de $\Lambda\mathcal{D}$, $\forall X \in \Lambda\mathcal{G}, \forall A \in \Lambda\mathcal{G}^*$ il vient :

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{D}}(X \otimes A) &= L_{\mathcal{D}}(X) \otimes A + X \otimes L_{\mathcal{D}}(A) \\ &= ad_{\mathbf{r}_0}(X) \otimes A + X \otimes ad_{\mathbf{r}_0}(A). \end{aligned}$$

Mais, de la proposition 3.5, on a :

$$L = -ad_{\mathbf{r}_0}|_{\Lambda\mathcal{G}} \quad \text{et} \quad L^* = ad_{\mathbf{r}_0}|_{\Lambda\mathcal{G}^*} + \beta \;;$$

ce qui entraîne

$$L_{\mathcal{D}}(X \otimes A) = -L(X) \otimes A + X \otimes (L^* - \beta)(A).$$

D'où

$$L_{\mathcal{D}} = -L \otimes 1 + 1 \otimes (L^* - \beta).$$

3.4 Le laplacien d'une quasi-bialgèbre de Lie associé à une structure de module de son double

Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et M un $\mathcal{D}$-module ; soient $\partial_{\mu,M}$ et $d_{\gamma,M}$ les opérateurs sur $\Lambda\mathcal{G} \otimes M$ définis par la structure de $\mathcal{D}$-module.

Définition 3.4. *L'opérateur*

$$L_M = \partial_{\mu,M} d_{\gamma,M} + d_{\gamma,M} \partial_{\mu,M} : \Lambda^k \mathcal{G} \otimes M \to \Lambda^k \mathcal{G} \otimes M$$

est appelé le **laplacien** *de la quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ associé au $\mathcal{D}$-module M.*

Nous avons le résultat suivant

Théorème 3.3. *Soit $(\mathcal{G}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et M un $\mathcal{D}$-module. Pour tous $X, Y \in \wedge\mathcal{G}$ et $m \in M$, on a*

1. *L_M est une dérivation de degré 0 de $(\Lambda\mathcal{G} \otimes M, \wedge)$, i.e*

$$L_M(X \wedge Y \otimes m) = L(X) \wedge Y \otimes m + X \wedge L_M(Y \otimes m).$$

2. *L_M est une dérivation de degré 0 de $(\Lambda\mathcal{G} \otimes M, [,]^{\mu,M})$, i.e*

$$L_M([X, Y \otimes m]^{\mu,M}) = [L(X), Y \otimes m]^{\mu,M} + [X, L_M(Y \otimes m)]^{\mu,M}.$$

En particulier,

$$L_M(X \otimes m) = L(X) \otimes m + X \otimes L_M(m)$$

Démonstration : Elle se déduit, par un calcul direct, des relations (B.18)-(B.21) (voir annexe).

Le résultat suivant donne l'expression explicite de L_M ; elle a été démontrée par J. Hua Lu ([15], voir annexe, théorème B.3) pour les bialgèbres de Lie. La forme ne change pas lorsqu'on passe des bialgèbres de Lie aux quasi-bialgèbres de Lie.

Proposition 3.7. *Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bialgèbre de Lie et M un $\mathcal{D}$-module. Soit $C_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{D})$ l'élément de Casimir dans l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{D}$ correspondant au produit scalaire canonique $\langle,\rangle$ sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire,*

$$C_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(e_i\xi^i + \xi^i e_i)$$

en termes d'une base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de $\mathcal{G}$ et de sa base duale $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ de $\mathcal{G}^*$. Alors,

$$L_M(m) = -C_0 \cdot m + \frac{1}{2}(x^\gamma - \xi^\mu)\cdot m$$

et

$$L_M(X\otimes m) = \frac{1}{2}(ad^\mu_{x^\gamma} - ad^{\gamma*}_{\xi^\mu})(X)\otimes m + \frac{1}{2}X\otimes(x^\gamma - \xi^\mu)\cdot m - X\otimes C_0\cdot m.$$

3.5 Le laplacien paramétré

Soit $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ une quasi-bigèbre de Lie. Pour $x\in\mathcal{G}$ et $\xi\in\mathcal{G}^*$, considérons les opérateurs suivants :

$$d_{\mu,\xi} = d_\mu + \varepsilon_\xi : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*$$

$$\partial_{\mu,\xi} = \partial_\mu + \iota_\xi : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}$$

$$d_{\gamma,x} = d_\gamma + \varepsilon_x : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}$$

$$\partial_{\gamma,x} = \partial_\gamma + \iota_x : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G}^*$$

Lemme 3.4. *Étant donné une quasi-bialgèbre de Lie $\mathcal{G}$, pour $x\in\mathcal{G}$ et $\xi\in\mathcal{G}^*$, on a :*

1. $\partial_\mu\varepsilon_x + \varepsilon_x\partial_\mu = -ad^\mu_x$;
2. $\iota_\xi d_\gamma + \iota_\xi d_\gamma = ad^{\gamma*}_\xi$;
3. $\iota_\xi\varepsilon_x + \varepsilon_x\iota_\xi = \langle x,\xi\rangle Id$;
4. $\partial_\mu\iota_\xi + \iota_\xi\partial_\mu = \iota_{d_\mu\xi}$;

Démonstration : Ces différentes relations s'obtiennent par un calcul direct en utilisant les propriétés des différents opérateurs.

Théorème 3.4. *Pour toute quasi-bialgèbre de Lie $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$, pour $x\in\mathcal{G}$ et $\xi\in\mathcal{G}^*$, on a :*

1. $d_{\mu,\xi}(A\wedge B) = (d_{\mu,\frac{1}{2}\xi}A)\wedge B + (-1)^{|A|}A\wedge(d_{\mu,\frac{1}{2}\xi}B), \quad \forall A,B\in\Lambda\mathcal{G}^*.$
2. $d^2_{\mu,\xi} = \varepsilon_{d_\mu\xi}.$
3. $\partial^2_{\mu,\xi} = \iota_{d_\mu\xi}.$
4. $\partial^2_{\gamma,x} = \iota_{\partial_\mu\phi} - d_\mu\iota_\phi - \iota_\phi d_\mu - \iota_{\gamma(x)}.$
5. $d^2_{\gamma,x} = \varepsilon_{\partial_\mu\phi} - \partial_\mu\varepsilon_\phi - \varepsilon_\phi\partial_\mu - \varepsilon_{\gamma(x)}.$

Démonstration : Le théorème 3.4 se démontre par un calcul direct en utilisant le lemme 3.4 et la proposition 2.2.
Comme conséquence directe du théorème précédent, lorsque $\xi = \xi^\mu$ et $x = x^\gamma$, on a :

Corollaire 3.4. *Pour toute quasi-bialgèbre de Lie* $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$*, on a :*

1. $\partial^2_{\mu,\xi^\mu} = 0.$
2. $d^2_{\mu,\xi^\gamma} = 0.$
3. $\partial^2_{\gamma,x^\gamma} = -(\iota_{\partial_\mu\phi} + d_\mu\iota_\phi + \iota_\phi d_\mu + \iota_{(\iota_{\xi^\mu}\phi)}).$
4. $d^2_{\gamma,x^\gamma} = -(\varepsilon_{\partial_\mu\phi} + \partial_\mu\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi d_\mu + \varepsilon_{(\iota_{\xi^\mu}\phi)}).$

Définition 3.5. *L'opérateur*

$$L_{(x,\xi)} = \partial_{\mu,\xi}d_{\gamma,x} + d_{\gamma,x}\partial_{\mu,\xi} : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^k\mathcal{G}$$

est appelé le **laplacien paramétré** *de la quasi-bialgèbre de Lie* $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ *de paramètre* (x,ξ)*.*

Le résultat suivant donne l'expression explicite de $L_{(x,\xi)}$.

Proposition 3.8. *Pour toute quasi-bialgèbre de Lie* $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ *et pour tous* $x \in \mathcal{G}$ *et* $\xi \in \mathcal{G}^*$*, on a*

$$L_{(x,\xi)} = L - ad^\mu_x + ad^{\gamma*}_\xi + < x,\xi > Id.$$

Démonstration : Elle se déduit de la définition de $L_{(x,\xi)}$ et du lemme 3.4.
Comme conséquence directe de la proposition précédente, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.5. *Soit* $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ *une quasi-bialgèbre de Lie. Alors*

$$L_{(\frac{1}{2}x^\gamma,\frac{1}{2}\xi^\mu)} = \frac{1}{4} < x^\gamma,\xi^\mu > Id$$

Démonstration : Il suffit de poser dans la proposition précédente $x = \frac{1}{2}x^\gamma$ et $\xi = \frac{1}{2}\xi^\mu$; la conclusion s'obtient du fait que $L = \frac{1}{2}(ad^\mu_{x^\gamma} - ad^{\gamma*}_{\xi^\mu})$.

Remarque 3.1. *Si* $x = 0$ *et* $\xi = 0$*, alors* $L_{(x,\xi)} = L$ *; le laplacien* L *d'une quasi-bialgèbre de Lie est donc un laplacien paramétré particulier de paramètre* $(0,0)$*, i.e* $L = L_{(0,0)}$*.*

Remarque 3.2. *Comme on le voit, une quasi-bialgèbre de Lie* $(\mathcal{G},\mu,\gamma,\phi)$ *est unimodulaire si et seulement si son laplacien paramétré de paramètre* $(\frac{1}{2}x^\gamma,\frac{1}{2}\xi^\mu)$*, est identiquement nul, i.e* $L_{(\frac{1}{2}x^\gamma,\frac{1}{2}\xi^\mu)} = 0$*.*

4 Annexe

Dans cette section, nous rappelons les définitions et résultats de J. H. Lu [15] sur le Laplacien d'une bialgèbre de Lie.

A The Chevalley-Eilenberg operators b_M and d_M

Let $\mathcal{G}$ be a Lie algebra. The Chevalley-Eilenberg coboundary operator

$$d : \Lambda^k\mathcal{G}^* \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*$$

defined by

$$(d\xi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j} \xi([x_i, x_j] \wedge x_1 \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{k+1}), \tag{A.1}$$

satisfies $d^2 = 0$. The cohomology of $(\Lambda \mathcal{G}, d)$ is called the Lie algebra cohomology of $\mathcal{G}$ with trivial coefficients. The Chevalley-Eilenberg boundary operator

$$b : \Lambda^{k+1}\mathcal{G} \to \Lambda^k \mathcal{G}$$

is defined by

$$b(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] \wedge x_1 \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{k+1}. \tag{A.2}$$

Thus $b = d^*$. It satisfies $b^2 = 0$. The homology of $(\Lambda \mathcal{G}, b)$ is called the homology of $\mathcal{G}$ with trivial coefficients. It is easy to show (see [14]) that for $A, B \in \Lambda \mathcal{G}^*$ and $X, Y \in \Lambda \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} d(A \wedge B) &= dA \wedge B + (-1)^{|A|} A \wedge dB & \text{(A.3)}\\ b(X \wedge Y) &= bX \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge bY + (-1)^{|X|}[X, Y] & \text{(A.4)}\\ b([X, Y]) &= [bX, Y] + (-1)^{|X|-1}[X, bY]. & \text{(A.5)} \end{aligned}$$

Suppose that $\{e_j\}$ is a basis for $\mathcal{G}$ and $\{\xi^i\}$ the dual basis of $\mathcal{G}^*$. Let $\xi_0 \in \mathcal{G}^*$ be the adjoint character of $\mathcal{G}$, i.e.,

$$(\xi_0, x) = tr(ad_x \in End(\mathcal{G})), x \in \mathcal{G}. \tag{A.6}$$

Then we have

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\sum_j \varepsilon_{\xi^j} ad^*_{e_j} = \frac{1}{2}\sum_j ad^*_{e_j} \varepsilon_{\xi^j} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\xi_0} & \text{(A.7)}\\ b &= -\frac{1}{2}\sum_j ad_{e_j} \iota_{\xi^j} = -\frac{1}{2}\sum_j \iota_{\xi^j} ad_{e_j} - \frac{1}{2}\iota_{\xi_0}. & \text{(A.8)} \end{aligned}$$

Let M be a module, i.e., a representation of a Lie algebra $\mathcal{G}$. The Chevalley-Eilenberg boundary operator for $\mathcal{G}$ with values in M is, by definition, the operator

$$b_M : \Lambda^k \mathcal{G} \otimes M \to \Lambda^{k-1}\mathcal{G} \otimes M$$

given by

$$\begin{aligned} b_M(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \otimes m) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] \wedge x_1 \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_k \otimes m \\ & \sum_{l=1}^{k} (-1)^l x_1 \cdots \wedge \hat{x}_l \wedge \cdots \wedge x_k \otimes x_l \cdot m, & \text{(A.9)} \end{aligned}$$

or, simply,

$$b_M(X \otimes m) = bX \otimes m + (-1)^{|X|}[X, m]. \tag{A.10}$$

It satisfies $b_M^2 = 0$. The homology of $(\Lambda \mathcal{G} \otimes M, b_M)$ is called the Lie algebra homology of $\mathcal{G}$ with coefficients in M, and it is denoted by $H_*(\mathcal{G}, M)$.

The Chevalley-Eilenberg coboundary operator

$$d_M : \Lambda^k \mathcal{G}^* \otimes M \to \Lambda^{k+1} \mathcal{G}^* \otimes M$$

is defined to be the dual of b_{M^*}, where M^* is M made into a $\mathcal{G}$-module by

$$\langle x \cdot m^*, m \rangle = \langle m^*, -x \cdot m \rangle, x \in \mathcal{G}, m \in M, m^* \in \mathcal{G}^*.$$

More explicitly,

$$d_M(\xi \otimes m) = d\xi \otimes m + (-1)^{|\xi|} \xi \wedge \xi^j \otimes (e_j \cdot m), \tag{A.11}$$

where, again, $\{e_j\}$ is a basis for $\mathcal{G}$ and $\{\xi^j\}$ is the dual basis for $\mathcal{G}^*$. It satisfies $d_M^2 = 0$. The cohomology of $(\Lambda \mathcal{G}^* \otimes M, d_M)$ is called the Lie algebra cohomology of $\mathcal{G}$ with coefficients in M, and it is denoted by $H_*(\mathcal{G}, M)$.

B Laplacian of Lie bialgebras

B.1 The Chevalley-Eilenberg operators d, b, ∂ and δ

Let $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ be a Lie bialgebra. Then the Lie algebra structure on $\mathcal{G}$ gives rise to the Chevalley-Eilenberg operators d and b (with trivial coefficients) :

$$d : \Lambda^k \mathcal{G}^* \to \Lambda^{k+1} \mathcal{G}^*$$

$$b : \Lambda^{k+1} \mathcal{G} \to \Lambda^k \mathcal{G}.$$

Similarly, the Lie algebra structure on $\mathcal{G}^*$ gives rise to the corresponding boundary and coboundary operators :

$$\delta : \Lambda^k \mathcal{G} \to \Lambda^{k+1} \mathcal{G}$$

$$\partial : \Lambda^{k+1} \mathcal{G}^* \to \Lambda^k \mathcal{G}^*.$$

Notice that for $k = 1$, the map $\delta : \mathcal{G} \to \Lambda^2 \mathcal{G}$ is the one in the definition of the Lie bialgebra $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.

The operators d and b satisfy (A.3), (A.4) and (A.5). The operators δ and ∂ satisfy three similar formulas.

The compatibility condition of two Lie bialgebra structures now says that the operator d (resp. δ) respects the Schouten bracket on $\Lambda \mathcal{G}^*$ (resp. on $\Lambda \mathcal{G}$) in the following way :

Proposition B.1. *Let $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ be a Lie bialgebra. Then, for $A, B \in \Lambda \mathcal{G}^*$ and $X, Y \in \Lambda \mathcal{G}$,*

$$d([A,B]) = [dA, B] + (-1)^{|A|-1} [A, dB] \tag{B.1}$$
$$\delta([X,Y]) = [\delta X, Y] + (-1)^{|X|-1} [X, \delta Y]. \tag{B.2}$$

Proof. When $|X| = |Y| = 1$ and $|A| = |B| = 1$, they reduce to the definition of the compatibility condition of the two Lie algebra structures. The general case can be proved by induction on the degrees of X, Y, A and B. Q.E.D.

B.2 The Laplacian operator $L = b\delta + \delta b$

Definition B.1. *The operator*

$$L : \Lambda^k \mathcal{G} \to \Lambda^k \mathcal{G} : L = b\delta + \delta b \tag{B.3}$$

is called the Laplacian for the Lie bialgebra $(\mathcal{G},\delta)$. *Its dual map is the Laplacian for the Lie bialgebra* $(\mathcal{G}^*, d)$ *:*

$$L^* : \Lambda^k \mathcal{G}^* \to \Lambda^k \mathcal{G}^* : L^* = d\partial + \partial d. \tag{B.4}$$

We now observe that the compatibility condition

$$\delta([x,y]) = [x,\delta y] - [y,\delta x], x, y \in \mathcal{G}. \tag{B.5}$$

of the Lie algebra structures on $\mathcal{G}$ and on $\mathcal{G}^*$ can be rewritten in terms of the Laplacian L as

$$L(x \wedge y) = L(x) \wedge y + x \wedge L(y), x, y \in \mathcal{G}. \tag{B.6}$$

In general, we have

Theorem B.1. *For any* $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$*,*

$$\begin{aligned} L(X \wedge Y) &= LX \wedge Y + X \wedge LY && \text{(B.7)} \\ L([X,Y]) &= [LX,Y] + [X,LY] && \text{(B.8)} \end{aligned}$$

Thus, L is a "derivation of degree 0*" for the supper Poisson algebra* $\Lambda\mathcal{G}$*.*

Proof. Using identities, (A.4), (B.2) and

$$\delta(X \wedge Y) = \delta X \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge \delta Y, \tag{B.9}$$

we have

$$\begin{aligned} L(X \wedge Y) &= b\delta(X \wedge Y) + \delta b(X \wedge Y) \\ &= b(\delta X \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge \delta Y) \\ &\quad +\delta(bX \wedge Y + (-1)^{|X|} X \wedge bY + (-1)^{|X|}[X,Y]) \\ &= b\delta X \wedge Y + (-1)^{|X|-1} \delta \wedge bY + (-1)^{|X|-1}[\delta X, Y] \\ &\quad +(-1)^{|X|} bX \wedge \delta Y + X \wedge b\delta Y - (-1)^{|X|}[X, \delta Y] \\ &\quad +\delta bX \wedge Y + (-1)^{|X|-1} bX \wedge \delta Y \\ &\quad +(-1)^{|X|}\delta X \wedge bY + X\delta bY - \delta[X,Y] \\ &= LX \wedge Y + X \wedge LY \end{aligned}$$

Using identities (A.5) and (B.2), we get

$$\begin{aligned} L[X,Y] &= b\delta[X,Y] + \delta b[X,Y] \\ &= b(-[\delta X, Y] + (-1)^{|X|+1}[X, \delta Y]) + \delta(-[bX, Y] + (-1)^{|X|+1}[X, BY]) \\ &= [b\delta X, Y] + (-1)^{|X|-1}[\delta X, bY] + (-1)^{|X|}[bX, \delta Y] + [X, b\delta Y] \\ &\quad +[\delta bX, Y] + (-1)^{|X|-1}[bX, \delta Y] + (-1)^{|X|}[\delta X, bY] + [X, \delta bY] \\ &= [LX, Y] + [X, LY]. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Theorem B.1 allows us to give a more explicit formula for the laplacian operator L. Let ξ_0 be the adjoint character of $\mathcal{G}$, and let x_0 be the adjoint character of $\mathcal{G}^*$. In other words,

$$\mathcal{G}^* \ni \xi_0 : (\xi_0, x) = tr(ad_x), x \in \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G} \ni x_0 : (x_0, \xi) = tr(ad_\xi), \xi \in \mathcal{G}^*.$$

Theorem B.2. *The Laplacian operator L for the Lie bialgebra $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ is given by*

$$L = \frac{1}{2}(ad_{x_0} - ad^*_{\xi_0}), \tag{B.10}$$

and

$$L^* = \frac{1}{2}(-ad^*_{x_0} + ad_{\xi_0}) \tag{B.11}$$

Lemma B.1. *For $x, y \in \mathcal{G}$ and $\xi \in \mathcal{G}^*$, we have*

$$ad^*_\xi[x,y] = [ad^*_\xi x, y] + [x, ad^*_\xi y] + ad^*_{ad^*_y \xi} x - ad^*_{ad^*_x \xi} y. \tag{B.12}$$

Proof. Using identity

$$ad^*_\xi[x,y] - ad^*_{[x,y]}\xi = [\xi, [x,y]]$$

in the double $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$, we get

$$\begin{aligned}
ad^*_\xi[x,y] &= ad^*_x ad^*_y \xi - ad^*_y ad^*_x \xi + [[\xi, x], y] + [x, [\xi, y]] \\
&= ad^*_x ad^*_y \xi - ad^*_y ad^*_x \xi \\
&\quad + [ad^*_\xi x, y] - [ad^*_x \xi, y] + [x, ad^*_\xi y] - [x, ad^*_y \xi] \\
&= ad^*_x ad^*_y \xi - ad^*_y ad^*_x \xi \\
&\quad + [ad_x i^* x, y] - ad^*_{ad^*_x \xi} y + ad^*_y ad^*_x \xi + [x, ad^*_\xi y] - ad^*_x ad^*_y \xi + ad^*_{ad^*_y \xi} x \\
&= [ad^*_\xi x, y] + [x, ad^*_\xi y] + ad^*_{ad^*_y \xi} x - ad^*_{ad^*_x \xi} y.
\end{aligned}$$

Proof of Theorem B.2. Since both operators L and $\frac{1}{2}(ad_{x_0} - ad^*_{\xi_0})$ act on $\Lambda\mathcal{G}$ as derivations of degree 0, we only need to show that they agree on $\mathcal{G}$. Let $\{e_i\}$ be a basis for $\mathcal{G}$ and let $\{\xi^i\}$ be the dual basis of $\mathcal{G}^*$. Then we can express δ as (see (A.7)) :

$$\delta(x) = -\frac{1}{2} x_0 \wedge x + \frac{1}{2} \sum_i ad^*_{\xi^i}(e_i \wedge x), x \in \mathcal{G}.$$

Thus, we have

$$L(x) = b\delta(x) = \frac{1}{2}[x_0, x] - \frac{1}{2}\sum_i ([ad^*_{\xi^i} e_i, x] + [e_i, ad^*_{\xi^i} x]).$$

By the lemma, and noticing that $ad^*_{e_i}\xi^i = \xi_0 \in \mathcal{G}^*$, we have

$$L(x) = \frac{1}{2}[x_0, x] - \frac{1}{2} ad^*_{\xi_0} x - \frac{1}{2}\sum_i (ad^*_{\xi^i}[e_i, x] - ad_{ad^*_x \xi^i} e_i).$$

Now, for any $\xi \in \mathcal{G}^*$,

$$\begin{aligned}\langle \sum_i (ad^*_{\xi^i}[e_i, x] - ad_{ad^*_x \xi^i} e_i), \xi\rangle &= \sum_i \langle [e_i, x], [\xi, \xi^i]\rangle - \langle e_i, [\xi, ad^*_x \xi^i]\rangle \\ &= \sum_i \langle e_i, (ad^*_x ad_\xi - ad_\xi ad^*_x)\xi^i\rangle \\ &= tr(ad^*_x ad_\xi - ad_\xi ad^*_x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Hence

$$L(x) = \frac{1}{2}([x_0, x] - ad^*_{\xi_0} x).$$

Remark B.1. *Since $ad^*_x \xi_0 = 0$ for any $x \in \mathcal{G}$, it follows from identity (B.12) that $ad^*_{\xi_0}$ acts as a derivation of degree* 0 *on $\Lambda\mathcal{G}$ with respect to the Schouten bracket. This also follows fron theorems B.1 and B.2.*

The rest of this subsection is devoted to the case when $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ is coboundary with r-matrix $r \in \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$. In this case,

$$\delta X = -[r, X], \forall X \in \Lambda\mathcal{G}.$$

Thus by (A.4),

$$\delta X = b(r) \wedge X + r \wedge bX - b(r \wedge X).$$

Set

$$r_0 = -b(r) = \sum_j [r_j, r'_j],$$

where $r = \sum_j r_j \wedge r'_j \in \Lambda^2\mathcal{G}$. Recall that

$$\varepsilon_{r_0} : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G} : X \mapsto r_0 \wedge X,$$

$$\varepsilon_r : \Lambda^k\mathcal{G} \to \Lambda^{k+2}\mathcal{G} : X \mapsto r \wedge X.$$

We have

$$\delta = \varepsilon_r b - b\varepsilon_r - \varepsilon_{r_0}. \tag{B.13}$$

Correspondingly,

$$\partial = \delta^* = d\iota_r - \iota_r d - \iota_{r_0}, \tag{B.14}$$

where, recall that, $\iota_{r_0} = \varepsilon^*_r$ and $\iota_{r_0} = \varepsilon^*_{r_0}$. Therefore, we have

Proposition B.2. *For a coboundary Lie bialgebra $(\mathcal{G}, r)$,*

$$\begin{aligned} L &= b\delta + \delta b \\ &= -b\varepsilon_{r_0} - \varepsilon_{r_0} b \\ &= ad_{r_0} \end{aligned} \tag{B.15}$$

and

$$L^* = -ad^*_{r_0}.$$

Proposition B.3. *1)* $\gamma_0 = \frac{1}{2}(-x_0 + \xi_0)$ *;*

2) $[\gamma_0, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G}$ *and* $[\gamma_0, \mathcal{G}^*] \subset \mathcal{G}^*$ *in* $\mathcal{D}$*, and the restriction of* ad_{γ_0} *to* $\mathcal{G}$ *is equal to* $\frac{1}{2}(-ad_{x_0} + ad^*_{\xi_0})$*.*

Proof. Let $\langle , \rangle$ be the canonical scalar product on $\mathcal{D}$. For any $x \in \mathcal{G}$, using tha ad-invariance of $\langle , \rangle$, we have

$$\begin{aligned}
\langle 2\gamma_0, x\rangle &= \sum_i \langle [e_i, \xi^i], x\rangle \\
&= \sum_i \langle \xi^i, [x, e_i]\rangle \\
&= tr(ad_x \in End\mathcal{G}) \\
&= (\xi_0, x)
\end{aligned}$$

Similarly, for any $\xi \in \mathcal{G}^*$,

$$\langle 2\gamma_0, \xi\rangle = -tr(ad_\xi \in End\mathcal{G}^*) = -(x_0, \xi).$$

This proves 1).

Using again the ad-invariance of $\langle , \rangle$, we get

$$\langle [\gamma_0, x], y\rangle = \langle \gamma_0, [x, y]\rangle = \frac{1}{2} tr(ad_{[x,y]}) = 0, \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

It follows that $[\gamma_0, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G}$. Similarly, $[\gamma_0, \mathcal{G}^*] \subset \mathcal{G}^*$. The fact that

$$[\gamma_0, x] = \frac{1}{2}(-ad_{x_0} x + ad^*_{\xi_0} x)$$

for $x \in \mathcal{G}$ follows from the definition of the Lie bracket on $\mathcal{D}$. This proves 2) Q.E.D.

Denote by $L_{\mathcal{D}}$ the Laplacian of the pair $(\mathcal{D}, r)$. We know that

$$L_{\mathcal{D}} = ad_{\gamma_0} \in End(\Lambda\mathcal{D}) \tag{B.16}$$

where $\gamma_0 = \frac{1}{2}\sum_i [e_i, \xi^i] = \frac{1}{2}(-x_0 + \xi_0) \in \mathcal{D}$. On the other hand, we can decompose $\Lambda\mathcal{D}$ into

$$\Lambda\mathcal{D} = \Lambda\mathcal{G} \otimes \Lambda\mathcal{G}^*.$$

Proposition B.4. *With respect to the above decomposition of* $\Lambda\mathcal{D}$*, we have*

$$L_{\mathcal{D}} = -L \otimes 1 + 1 \otimes L^* \tag{B.17}$$

Because of (B.16), 2) in proposition B.3 and B.1 and B.2, we have

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{D}}(X \otimes A) &= L_{\mathcal{D}}(X) \otimes A + X \otimes L_{\mathcal{D}}(A) \\
&= ad_{\gamma_0}(X) \otimes A + X \otimes ad_{\gamma_0}(A) \\
&= -L(X) \otimes A + X \otimes L^*(A).
\end{aligned}$$

Q.E.D

B.3 The Laplacian operator $L_M = b_M\delta_M + \delta_M b_M$

In this subsection, we assume that $(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ is a Lie bialgebra and M is a module for the double Lie algebra $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \mathcal{G}^*$. Thus M is a module of both $\mathcal{G}$ and $\mathcal{G}^*$, but the two module structures on M are compatible in the sense that their sum gives a $\mathcal{D}$-module structure.

Using the $\mathcal{G}$-module structure, we can define the Chevalley-Eilenberg boundary (resp. coboundary) operator b_M (resp. d_M). Similarly, the $\mathcal{G}^*$-module structure on M gives the boundary and coboundary operators ∂_M and δ_M :

$$\begin{aligned}
b_M &: \Lambda^{k+1}\mathcal{G}\otimes M \to \Lambda^k\mathcal{G}\otimes M\\
\delta_M &: \Lambda^{k}\mathcal{G}\otimes M \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}\otimes M\\
d_M &: \Lambda^{k}\mathcal{G}^*\otimes M \to \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*\otimes M\\
\partial_M &: \Lambda^{k+1}\mathcal{G}^*\otimes M \to \Lambda^{k}\mathcal{G}^*\otimes M
\end{aligned}$$

we have the following properties :

$$\begin{aligned}
b_M(X\wedge Y\otimes m) &= bX\wedge(Y\otimes m)+(-1)^{|X|}X\wedge b_M(Y\otimes m)\\
&\quad +(-1)^{|X|}[X,Y\otimes m], && \text{(B.18)}\\
b_M([X,Y\otimes m]) &= [bX,Y\otimes m]+(-1)^{|X|-1}[X,b_M(Y\otimes m)], && \text{(B.19)}\\
\delta_M(X\wedge Y\otimes m) &= \delta X\wedge(Y\otimes m)+(-1)^{|X|}X\wedge\delta_M(Y\otimes m), && \text{(B.20)}\\
\delta_M[X,Y\otimes m] &= [\delta X,(Y\otimes m)]+(-1)^{|X|-1}[X,\delta_M(Y\otimes m)], && \text{(B.21)}\\
d_M(A\wedge B\otimes m) &= dA\wedge(B\otimes m)+(-1)^{|A|}A\wedge d_M(B\otimes m), && \text{(B.22)}\\
d_M[A,B\otimes m] &= [dA,(B\otimes m)]+(-1)^{|A|-1}[A,d_M(B\otimes m)], && \text{(B.23)}\\
\partial_M(A\wedge B\otimes m) &= \partial A\wedge(B\otimes m)+(-1)^{|A|}A\wedge\partial_M(B\otimes m)\\
&\quad +(-1)^{|A|}[A,B\otimes m], && \text{(B.24)}\\
\partial_M([A,B\otimes m]) &= [\partial A,B\otimes m]+(-1)^{|A|-1}[A,\partial_M(B\otimes m)]. && \text{(B.25)}
\end{aligned}$$

Now introduce

$$L_M = b_M\delta_M+\delta_M b_M : \Lambda^k\mathcal{G}\otimes M \to \Lambda^k\mathcal{G}\otimes M, k\geq 0. \tag{B.26}$$

We call L_M the Laplacian of the Lie bialgebra $(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ associated to the $\mathcal{D}$-module M. Let M^* be the contragredient of M as a $\mathcal{D}$-module. Then

$$(L_{M^*})^* = d_M\partial_M + \partial_M d_M : \Lambda^k\mathcal{G}^*\otimes M \to \Lambda^k\mathcal{G}^*\otimes M \tag{B.27}$$

Theorem B.3. *For any $X, Y \in \Lambda\mathcal{G}$ and $m \in M$, we have*

$$\begin{aligned}
L_M(X\wedge Y\otimes m) &= L(X)\wedge Y\otimes m + X\wedge L_M(Y\otimes m) && \text{(B.28)}\\
L_M([X,Y\otimes m]) &= [L(X),Y\otimes m]+[X,L_M(Y\otimes m)]. && \text{(B.29)}
\end{aligned}$$

In particular,

$$L_M(X\otimes m) = L(X)\otimes m + X\otimes L_M(m). \tag{B.30}$$

Let $c_0 \in U\mathcal{D}$ be the Casimir element in the universal envelopping algebra $U\mathcal{D}$ of $\mathcal{D}$ corresponding to the ad-invariant scalar product $\langle,\rangle$ on $\mathcal{D}$, i.e.,

$$c_0 = \frac{1}{2}\sum_i (e_i\xi^i + \xi^i e_i) \tag{B.31}$$

in terms of basis $\{e_i\}$ of $\mathcal{G}$ and its dual basis $\{\xi^i\}$ of $\mathcal{G}^*$. Then

$$L_M(m) = -c_0 \cdot m + \frac{1}{2}(x_0 - \xi_0)\cdot m. \tag{B.32}$$

Thus

$$L_M(X\otimes m) = \frac{1}{2}(ad_{x_0} - ad^*_{\xi_0})(X)\otimes m + X\otimes\frac{1}{2}(x_0-\xi_0)\cdot m - X\otimes c_0\cdot m. \tag{B.33}$$

Proof of Theorem B.3. We omit the proof of (B.28) and (B.29), which is similar to that of (B.7) and (B.8) in theorem B.1. We only need to prove formula (B.32) for $L_M(m)$. By the definitions of b_M and δ_M, we have

$$\begin{aligned} L_M(m) &= b_M\delta_M(m) \\ &= b_M(\sum_i e_i\otimes\xi^i\cdot m) \\ &= -\sum_i(e_i\cdot(\xi^i\cdot m)) \\ &= -(c_0+\gamma_0)\cdot m \\ &= -c_0\cdot m + \frac{1}{2}(x_0-\xi_0)\cdot m. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definition B.2. *We call the number (x_0,ξ_0) the* **modular** *number of the Lie bialgebra $(\mathcal{G},\mathcal{G})$. We say that a Lie bialgebra is* **unimodular** *if its modular number is equal to* 0.

Proposition B.5. *A Lie bialgebra $(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ is unimodular if either $\mathcal{G}$ or $\mathcal{G}^*$ is unimodular (as Lie algebras).*

Proof. The statement is obvious since in this case either $\xi_0 = 0$ or $x_0 = 0$. Q.E.D.

Proposition B.6. *The modular number of a Lie bialgebra $(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ is equal to the trace of its Laplacian $L = b\delta + \delta b$ restrited to $\mathcal{G}$.*

Proof. This is a simple corrolary of Theorem B.2.

Remerciements : Le premier auteur remercie vivement le Centre Abdus Salam ICTP (Trieste, Italie), l'Office Allemand d'Echanges Universitaires (DAAD), l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) de Porto-Novo (Bénin) et l'Institut Supérieur de Formation à Distance (ISFAD, Guinée) pour l'hospitalité et le soutien matériel et financier qui ont permis la réalisation d'une bonne partie de ce travail; le second remercie les autorités de l'IMSP et de la DAAD à travers la convention DAAD-IMSP pour le soutien pédagogique et financier à ses activités de recherche. Les auteurs remercient enfin le Professeur Yvette Kosmann-Schwarzbach pour ses remarques et suggestions sur le contenu du travail.

References

[1] I. Bakayoko, M. Bangoura, *Quasi-bigèbres de Lie et cohomologie d'algèbre de Lie*, Travaux Mathématiques, Volume 21 (2012) 1 - 28, Universit de Luxembourg.

[2] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres jacobiennes et généralisations des groupes de Lie-Poisson*, Thèse, Université de Lille 1 (France), 1995.

[3] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles*, Comm. in Algebra, 31 no 1, 29-44 (2003).

[4] M. Bangoura, Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28 (1993) 13-29.

[5] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet. Math. Dokl. 27 (1983), 68-71.

[6] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. Journal*, 1 (6) (1990) 1419-1457.

[7] E. Getzler, *Manin pairs and topological conformal field theory*, Ann. of Physics 237 (1995) 161-201.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Contemporary Mathematics 132 (1992) 459-489.

[9] Y. Kosmann-Schwarzbach, and F. Magri, *Poisson-Nijenhuis structures*, Ann. Inst. H. Poicaré, Physique Théorique, 53 (1990) 35-81.

[10] B. Kostant, *Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel-Weil Theorem*, Ann. Of Mathematics, Second Series, Vol. 74, N 2 (Sep. 1961), pp 72-144.

[11] B. Kostant, *Lie Algebra Cohomology and the Generalized Schubert Cells*, Ann. of Mathematics, Second Series, Vol. 77, N 1 (Jan. 1963), pp 329-387.

[12] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics. 176 (1) (1987), 49-113.

[13] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1960) 65-127.

[14] J. L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série, Soc. Math. France, Paris (1985) 257-271.

[15] J. H. Lu, *Lie bialgebras and Lie algebra cohomology*, Preprint 1996, non publié.