African Diaspora Journal of Mathematics
Volume 10, Number 2, pp. 135–144 (2010)

ISSN 1539-854X
www.math-res-pub.org/adjm

Sur les algèbres de Lie d'une distribution et d'un feuilletage généralisé

P. Randriambololondrantomalala*
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo,
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

H.S.G. Ravelonirina†
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo,
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

M. Anona‡
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo,
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

Résumé

On étudie le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie attachées à une distribution non régulière involutive d'une variété différentiable. On applique les résultats obtenus à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact et aux algèbres de Lie relatives à un feuilletage généralisé, conduisant à une généralisation d'un théorème de Kanie et de certains résultats de Lichnérowicz.

AMS Subject Classification : Primary 17B66, Secondary 17B56, 53C12.

Keywords : Algèbre de Lie, Distribution non-régulière, Cohomologie de Chevalley-Eilenberg, Feuilletage généralisé, Champs de vecteurs à support compact.

1 Introduction

En 1960, Peetre cf. [7] a prouvé que tout opérateur différentiel linéaire sur l'anneau des fonctions réelles d'une variété différentiable s'écrit localement en une somme finie de dérivations sur cet anneau. En utilisant ces résultats, Takens cf. [8] a démontré que toute dérivation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété différentiable est

*E-mail address : princypcpc@yahoo.fr, randriaprincy@univ-antananarivo.mg
†E-mail address : rhsammy@yahoo.fr, hsgravelonirina@univ-antananarivo.mg
‡E-mail address : mfanona@yahoo.fr

intérieure. Cette étude a été étendue par Kanie cf. [4] et Lichnérowicz cf. [6] dans le cas des algèbres de Lie attachées à un feuilletage régulier. Soient M une variété différentiable, $F(M)$ l'anneau des fonctions réelles de M, $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. Dans ce papier, on se propose d'étudier la dérivation d'une distribution involutive Ω de classe C^∞ sur M. L'algèbre de Lie Ω vérifie, pour tout $x \in M$ il existe $X \in \Omega$ tel que $X(x) \neq 0$. On montre que toute dérivation de Ω est locale. Pour tout $x \in M$ il existe un ouvert U_x contenant x et un $F(U_x)$-sous-module de rang 1 de Ω sur U_x, tels que la restriction d'une dérivation de Ω sur U_x est la dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs ψ_x sur U_x. Alors, il existe un et un seul $\psi \in \chi(M)$ tel que sa restriction sur U_x est ψ_x pour tout $x \in M$. Ainsi, on peut montrer que toute dérivation de Ω est la dérivée de Lie par rapport à un et un seul champ de vecteurs appartenant à son normalisateur $\mathfrak{N}$ dans $\chi(M)$. Le centralisateur de Ω est nul, l'idéal dérivé de Ω coïncide à Ω. Par conséquent, Ω est un idéal caractéristique de $\mathfrak{N}$. De plus, on montre que toute dérivation du normalisateur $\mathfrak{N}$ est intérieure. Ainsi, l'application qui à X de $\mathfrak{N}$ fait correspondre la dérivée de Lie par rapport à X, est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{N}$ dans l'algèbre de Lie de toute dérivation de Ω. Alors, le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de Ω (resp. de $\mathfrak{N}$) est isomorphe à $\mathfrak{N}/\Omega$ (resp. à $\{0\}$). On utilise ces résultats pour calculer le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact et des algèbres de Lie attachées à un feuilletage généralisé, car elles sont des distributions involutives sur M. Si la variété M est munie d'une structure de feuilletage régulier, Ω est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au feuilletage, alors certains résultats correspondants de [4] et de [6] découlent de nos résultats. Dans un autre article, on considérera d'autres applications sur les algèbres de Lie des champs de vecteurs attachées à une connexion et définies à la manière de [5].

2 Etude des dérivations des algèbres de Lie d'une distribution involutive de M

Dans toute la suite, M est une variété différentiable de classe C^∞ de dimension n, tous les objets utilisés sont supposés C^∞ sur M. Dans cette section, $F(M)$ est l'anneau des fonctions réelles de M, $\chi(M)$ désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M avec son crochet habituel. Ω est une distribution involutive de M, autrement dit un $F(M)-$sous-module de $\chi(M)$ stable par le crochet de champs de vecteurs. Dans la suite, sauf mention expresse ; pour tout $x \in M$, il existe un champ $X \in \Omega$ tel que $X(x) \neq 0$. On note par L_X la dérivée de Lie par rapport à $X \in \chi(M)$, et $\mathrm{Supp}(X)$ le support de X sur M. On adopte la convention d'Einstein sur la sommation d'indices, sauf mention expresse.

Définition 2.1. Une $\mathbb{R}$-dérivation D de Ω est une application $\mathbb{R}-$linéaire de Ω dans Ω telle que $\forall X, Y \in \Omega,\ D[X,Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)]$.

Dans cette section, une $\mathbb{R}$-dérivation de Ω est tout simplement appelée dérivation de Ω.

Proposition 2.2. *Soient U un ouvert de M contenant x, et $X \in \chi(M)$ tel que $X(x) \neq 0$, alors il existe $Y \in \Omega$ avec* $\mathrm{Supp}(Y) \subset U$ *tel que* $[X,Y](x) \neq 0$.

Démonstration. Soit $X \in \chi(M)$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. Par le théorème classique de Fröbenius appliqué à $\{X\}$ dans un ouvert contenu dans U, on réduit l'équation aux dérivées partielles correspondante à une forme plus facile à résoudre. Ce qui donne l'existence du champ Y de Ω à support contenu dans U en utilisant les astuces des fonctions plateaux. □

Définition 2.3. Une dérivation D de Ω est dite locale si pour tout ouvert non vide U de M et $X \in \Omega$ tels que $X_{|U} \equiv 0$, on a $D(X)_{|U} \equiv 0$.

Proposition 2.4. *Toute dérivation de Ω est locale.*

Démonstration. Par la Proposition 2.2, on peut adapter la démonstration dans [8]. □

Proposition 2.5. *Soient une carte (U,φ) de système de coordonnées $(x^i)_i$, et $\psi, \psi', \psi'', \underset{i\neq n}{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}}$ appartenant à $\chi(U)$:*

1. *Soit $x \in U$ tel qu'il existe $i_0 \neq n$, avec $a^{i_0}(x) \neq 0$. Si $\forall f \in F(U)$:*

$$L_\psi\left(f\left(\underset{i\neq n}{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}}+\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right)=L_{\psi'}\left(\underset{i\neq n}{fa^i\frac{\partial}{\partial x^i}}\right)+L_{\psi''}\left(f\frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{2.1}$$

   Alors il existe un voisinage V de x dans U, où $\psi \underset{V}{=} \psi' \underset{V}{=} \psi''$.

2. *On désigne par Pr_n la n-ième projection de $\mathbb{R}^n$. Soient $x_0 \in U$ tel que $a^i(x_0) = 0\ \forall i \neq n$ et $g_{x_0} : x \in U \mapsto g_{x_0}(x) = x^n - \mathrm{Pr}_n(\varphi(x_0))$. Si $\forall f \in F(U)$:*

$$\begin{aligned} L_\psi\left(f\left(\underset{i\neq n}{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}}+(g_{x_0}+1)\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) &= L_{\psi'}\left(f\left(\underset{i\neq n}{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}}+\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right)+\\ &\quad +L_{\psi''}\left(fg_{x_0}\frac{\partial}{\partial x^n}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

   Alors $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \psi''(x_0)$.

Démonstration. Pour avoir le résultat de *1.*, on utilise la relation (2.1) en remplaçant f par des polynômes convenables sur un voisinage V de x, tel que pour tout $y \in V$, $a^{i_0}(y) \neq 0$. Le résultat de *2.* est obtenu en travaillant sur un voisinage W_{x_0} de x_0, où pour tout $y \in W_{x_0}$, $g_{x_0}(y) \neq -1$; et en remplaçant f de la relation (2.2) par des polynômes et exponentielle convenables. □

Proposition 2.6. *Soient D une dérivation de Ω et U un domaine d'une carte tels qu'il existe un $F(U)$-sous-module Γ_U de rang 1 de Ω_U et $\psi \in \chi(U)$ avec $D_{U|\Gamma_U} = L_\psi$. Si pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x tel que pour tout $F(V)$-sous-module Δ_V de rang 1 de Ω_V, il existe $\zeta \in \chi(V)$ avec $D_{V|\Delta_V} = L_\zeta$; alors $D_U = L_\psi$ et réciproquement.*

Démonstration. Soient D une dérivation de Ω et U un domaine d'une carte contenant z. D'après la Proposition 2.4, D_U est une dérivation de Ω_U. On peut considérer un système de coordonnées $(x^1,\dots,x^{n-1},y)$ de U tel que Γ_U est le $F(U)$-module engendré par $\frac{\partial}{\partial y}$. Soit $Y = \underset{i\neq n}{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}} + a^n\frac{\partial}{\partial y} \in \Omega_U$, alors $Z = \underset{i\neq n}{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}} \in \Omega_U$. Procédons en 3 étapes :

1) Si $Z = \underset{i\neq n}{a^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$, où il existe $i_0 \neq n$ tel que $a^{i_0}(z) \neq 0$:

En utilisant le théorème classique de Fröbenius sur les deux champs $Z + \frac{\partial}{\partial y}$ et Z, on trouve un ouvert $V \subset U$ contenant z et deux $F(V)$-sous-modules correspondants de rang 1 de Ω_V. La restriction de D_V sur ces deux modules correspond respectivement à la dérivée de Lie par rapport à ζ et ζ' de $\chi(V)$. En appliquant *1.* de la Proposition 2.5, il existe un voisinage W_z de z tel que $\zeta \underset{W_z}{=} \zeta' \underset{W_z}{=} \psi$.

2) Si $Z = \underset{i\neq n}{a^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec $a^i(z) = 0\ \forall i \neq n$:

Soit la fonction g_z dans la Proposition 2.5, d'une façon analogue à 1), on utilise le théorème classique de Fröbenius sur les deux champs $Z + (g_z + 1)\frac{\partial}{\partial y},\ Z + \frac{\partial}{\partial y}$. Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant z tel que la restriction de D_V sur les deux modules correspondants est respectivement égale à la dérivée de Lie par rapport à ζ et ζ' de $\chi(V)$. On applique *2.* de la Proposition 2.5, et on trouve $\zeta(z) = \zeta'(z) = \psi(z)$.

3) En utilisant la $\mathbb{R}$-linéarité de D_U et en combinant les deux cas précédents pour tout $z \in M$, on a $D_U(Y) = L_\psi(Y)$ pour tout $Y \in \Omega_U$. Ainsi, on obtient $D_U = L_\psi$.

La réciproque est immédiate. □

Théorème 2.7. *Toute dérivation de l'algèbre de Lie Ω est une dérivée de Lie par rapport à un et un seul champ de vecteurs sur M.*

Démonstration. Soit $x \in M$, il existe $X \in \Omega$ tel que $X(x) \neq 0$. D'après le théorème classique de Fröbenius, il existe une carte (U_x, φ_x) contenant x et un système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^{n-1}, y)$ correspondant, tels que $X \underset{U_x}{=} \frac{\partial}{\partial y}$.

Soit D une dérivation de Ω qui est locale par la Proposition 2.4, donc D_{U_x} est une dérivation de Ω_{U_x}. Soit $f \in F(U_x)$, comme $\frac{\partial}{\partial y} \in \Omega_{U_x}$, alors on peut écrire d'une manière unique :

$$D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right) = D^0(f)\frac{\partial}{\partial y} + \underset{0<a<n}{D^a(f)}\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{2.3}$$

Ω étant une distribution involutive de M, alors $\left[\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] \in \Omega_{U_x}$. Par la Définition 2.1, on obtient :

$$D_{U_x}\left[\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left[D_{U_x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial y}, D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]$$

On a

$$\left[D_{U_x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), f\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left(D^0(1)\frac{\partial f}{\partial y} + D^a(1)\frac{\partial f}{\partial x^a} - f\frac{\partial D^0(1)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - f\frac{\partial D^a(1)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

et

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}, D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial D^0(f)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial D^a(f)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_{U_x}\left[\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] = & \left(D^0(1)\frac{\partial f}{\partial y} + D^a(1)\frac{\partial f}{\partial x^a} - f\frac{\partial D^0(1)}{\partial y} + \frac{\partial D^0(f)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial D^a(f)}{\partial y} - f\frac{\partial D^a(1)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x^a} \end{aligned}$$

Or

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$$

Alors

$$D^0(1)\frac{\partial f}{\partial y} + D^a(1)\frac{\partial f}{\partial x^a} - f\frac{\partial D^0(1)}{\partial y} = D^0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial D^0(f)}{\partial y} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial D^a(f)}{\partial y} - f\frac{\partial D^a(1)}{\partial y} = D^a\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.5}$$

, où $a = 1, \ldots, n-1$.
$\forall j = 1, \ldots, n$; soit x_1^j un point arbitraire de $\mathrm{Pr}_j\left(\varphi_x\left(U_x\right)\right)$ avec $x^n = y$, on a :

$$D_{U_x}\left[(x^j - x_1^j)\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left[D_{U_x}\left((x^j - x_1^j)\frac{\partial}{\partial y}\right), f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[(x^j - x_1^j)\frac{\partial}{\partial y}, D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]$$

, et d'une manière analogue aux (2.4) et (2.5), on a :

$$\begin{aligned} D^0\left((x^j - x_1^j)\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= D^0(x^j - x_1^j)\frac{\partial f}{\partial y} + D^i(x^j - x_1^j)\frac{\partial f}{\partial x^i} - \delta_i^j D^i(f) - f\frac{\partial D^0(x^j - x_1^j)}{\partial y} + \\ &\quad + (x^j - x_1^j)\frac{\partial D^0(f)}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$D^a\left((x^j - x_1^j)\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x^j - x_1^j)\frac{\partial D^a(f)}{\partial y} - f\frac{\partial D^a(x^j - x_1^j)}{\partial y} + \delta_n^j D^a(f) \tag{2.7}$$

pour $a = 1, \ldots, n-1$.
En outre, par la relation (2.3) et la Proposition 2.4, chaque D^a est $\mathbb{R}$-linéaire et locale. Alors chaque D^a est un opérateur différentiel d'après un théorème dans [7]. Ainsi on peut écrire :

$$D^0 = \psi = \sum_{|A|\geq 0} \psi^A \frac{\partial^{|A|}}{\partial x^A};\ \text{pour } a \in \{1, \ldots, n-1\}, D^a = \sum_{|A|\geq 0} \eta_a^A \frac{\partial^{|A|}}{\partial x^A}$$

, où $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $|A| = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $\frac{\partial^{|A|}}{\partial x^A} = \frac{\partial^{|A|}}{(\partial x^1)^{A_1} \ldots (\partial x^{n-1})^{A_{n-1}} (\partial y)^{A_n}}$ et les ψ^A, η_a^A appartiennent à $F\left(U_x\right)$.
En remplaçant f dans les relations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) par des polynômes de degré quelconque s'annulant en un point arbitraire de U_x, on prouve :

$$D^0(1) = -\frac{\partial \psi^{(0,\ldots,0,1)}}{\partial y} = \psi^{(0,\ldots,0)}, D^a(1) = -\frac{\partial \psi^{(a,0,\ldots,0)}}{\partial y}\ \text{pour } a = 1, \ldots, n-1$$

et D^0 (resp. D^a $a = 1, \ldots, n-1$) est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 (resp. d'ordre 0).
Dans toute la suite, $\psi^{(0,\ldots,0,1)}$ (resp. $\psi^{(a,0,\ldots,0)}$) est noté par $\psi^{0,1}$ (resp. $\psi^{a,0}$).
On écrit

$$\psi = \psi_0 + \psi_{1_x},\ \text{où } \psi_0 = D^0(1) \text{ et } \psi_{1_x} = \psi^{0,1}\frac{\partial}{\partial y} + \psi^{a,0}\frac{\partial}{\partial x^a} \in \chi(U_x)$$

Ainsi pour $f \in F(U_x)$

$$\left[\psi_{1_x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left(\psi^{0,1}\frac{\partial f}{\partial y} + \psi^{a,0}\frac{\partial f}{\partial x^a} - f\frac{\partial \psi^{0,1}}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - f\frac{\partial \psi^{a,0}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[\psi_{1_x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left(f\frac{\partial \psi^{a,0}}{\partial y} + D^a(f)\right)\frac{\partial}{\partial x^a} &= \left(-f\frac{\partial \psi^{0,1}}{\partial y} + \psi^{0,1}\frac{\partial f}{\partial y} + \psi^{a,0}\frac{\partial f}{\partial x^a}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + D^a(f)\frac{\partial}{\partial x^a}\end{aligned}$$

et

$$\left[\psi_{1_x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left(f\frac{\partial \psi^{a,0}}{\partial y} + D^a(f)\right)\frac{\partial}{\partial x^a} = (\psi_0 + \psi_{1_x})(f)\frac{\partial}{\partial y} + D^a(f)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

Donc

$$D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left[\psi_{1_x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left(f\frac{\partial \psi^{a,0}}{\partial y} + D^a(f)\right)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

Mais chaque D^a $a = 1, \ldots, n-1$ est d'ordre 0 et $D^a(1) = -\frac{\partial \psi^{a,0}}{\partial y}$ $\forall a \neq 0, n$; alors

$$f\frac{\partial \chi^{a,0}}{\partial y} + D^a(f) = 0 \; \forall a \neq 0, n$$

Donc

$$D_{U_x}\left(f\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left[\psi_{1_x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] \; \forall f \in F(U_x)$$

Pour tous $z \in U_x$ et $Y \in \Omega$ tels que $Y(z) \neq 0$, on peut répéter le même raisonnement utilisé pour X à Y et on a :
Il existe U_z contenant z, un domaine d'une carte dans U_x de système $(x'^i)_i$ tel que $Y = \frac{\partial}{\partial x'^n}$ et $\exists \zeta \in \chi(U_z)$ tel que $D_{U_z}\left(f\frac{\partial}{\partial x'^n}\right) = L_\zeta\left(f\frac{\partial}{\partial x'^n}\right)$ $\forall f \in F(U_z)$. D'après la Proposition 2.6, on a $D_{U_x} = L_{\psi_{1_x}}$ pour tout $x \in M$. Donc $(U_x, \varphi_x)_{x \in M}$ forme un atlas de M, et pour tout $x \in M$, il existe $\psi_{1_x} \in \chi(U_x)$ avec $D_{U_x} = L_{\psi_{1_x}}$. Pour tous $x, y \in M$ tels que $U_x \cap U_y \neq \varnothing$, $\psi_{1_x} \underset{U_x \cap U_y}{=} \psi_{1_y}$ par la Proposition 2.6. Ainsi

$$\exists \psi \in \chi(M) \text{ tel que } D = L_\psi \text{ avec } \forall x \in M, \; \psi_{|U_x} = \psi_{1_x}$$

Soit $y \in M$, il existe $X \in \Omega$ tel que $X(y) \neq 0$. En utilisant le théorème classique de Fröbenius sur $\{X\}$ et en faisant le crochet de ψ avec fX , pour tout $f \in F(M)$, on obtient l'unicité de ψ en y quelconque de M. □

Proposition 2.8. *Le centralisateur $\mathfrak{C}$ de Ω dans $\chi(M)$ est réduit à zéro.*

Démonstration. Par définition, $\mathfrak{C} = \{X \in \chi(M) \text{ tel que } [X, \Omega] = \{0\}\}$.
Soit $X \in \mathfrak{C} \neq \varnothing$ car $0 \in \mathfrak{C}$, raisonnons par l'absurde.
On suppose que $X \neq 0$, donc il existe $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. D'après la Proposition 2.2, il existe un ouvert U contenant x et $Y \in \Omega$ tels que $[X, Y](x) \neq 0$. Ce qui contredit $X \in \mathfrak{C}$, donc $X \equiv 0$; d'où $\mathfrak{C} = \{0\}$. □

Proposition 2.9. *L'idéal dérivé de Ω coïncide à Ω.*

Démonstration. L'idéal dérivé de Ω noté par $[\Omega,\Omega]$ est l'algèbre de Lie engendrée par tous les crochets de deux éléments de Ω.
$[\Omega,\Omega] \neq \varnothing$ car $0 \in [\Omega,\Omega]$. Comme Ω est une algèbre de Lie, alors $[\Omega,\Omega] \subset \Omega$.
Pour montrer que $\Omega \subset [\Omega,\Omega]$, raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $X \in \Omega - \{0\}$ tel que $X \notin [\Omega,\Omega]$, alors il existe $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$ et $X(x) \notin [\Omega,\Omega](x)$. Par le théorème classique de Fröbenius dans un ouvert convenable U contenant x, il existe $f \in F(U)$ telle que $Xf \underset{U}{=} 1$. Donc, on a $[X,fX] \underset{U}{=} X$ et $[X,fX](x) = X(x)$. Alors $[X,fX](x) \in [\Omega,\Omega](x)$ car Ω est une distribution involutive de M. Ce qui contredit $X(x) \notin [\Omega,\Omega](x)$, ainsi $\Omega \subset [\Omega,\Omega]$; d'où $[\Omega,\Omega] = \Omega$. $\square$

Remarque 2.10. Cette dernière proposition est toujours vraie pour toute distribution involutive de M, c'est à dire pour tout $F(M)$-sous-module de $\chi(M)$ stable par le crochet habituel.

Définition 2.11. Le normalisateur $\mathfrak{N}$ de Ω est $\{X \in \chi(M)$ tel que $[X,\Omega] \subset \Omega\}$.

Théorème 2.12. *Toute dérivation de $\mathfrak{N}$ est intérieure.*

Démonstration. Ω est un idéal caractéristique du normalisateur $\mathfrak{N}$ si elle est stable par toute dérivation de $\mathfrak{N}$.
Par la Proposition 2.9 et un résultat classique cf. [1], on prouve que Ω est un idéal caractéristique de $\mathfrak{N}$. En utilisant le Théorème 2.7, la Proposition 2.9, la Proposition 2.8 et en adaptant une preuve de [6] pp.68-69 ; on montre que toute dérivation de $\mathfrak{N}$ est intérieure. $\square$

Définition 2.13. Soient $(A,[,]_A)$ et $(B,[,]_B)$ deux $\mathbb{R}-$algèbres de Lie. Un homomorphisme d'algèbres de Lie de A dans B est une application $\mathbb{R}$-linéaire h telle que pour tous X,Y de A, $h([X,Y]_A) = [h(X),h(Y)]_B$. C'est un isomorphisme si h est bijective.

Corollaire 2.14. *On note par* $\mathrm{Der}(A)$ *l'ensemble de toute dérivation d'une algèbre de Lie A. Les algèbres de Lie* $\mathrm{Der}(\Omega)$, $\mathfrak{N}$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{N})$ *sont isomorphes et le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de Ω (resp. de $\mathfrak{N}$) est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}/\Omega$ (resp. à $\{0\}$).*

Démonstration. On note par ad_Ω l'ensemble des dérivations intérieures de Ω. Par définition, $\mathrm{H}^1(\Omega) = \mathrm{Der}(\Omega)/\mathrm{ad}_\Omega$ cf. [10].
Soit l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\theta : \mathfrak{N} \underset{X\longmapsto\theta_X=L_X}{\longrightarrow} \mathrm{Der}(\Omega)$, où le crochet dans $\mathrm{Der}(\Omega)$ est défini par $\forall D,D'$; $[D,D'] = D\circ D' - D'\circ D$ avec $\circ$ la loi de composition des applications. L'application θ est bijective en utilisant la Proposition 2.8, le Théorème 2.7 ; et un homomorphisme par l'identité de Jacobi. D'une manière analogue, on a les deux résultats : $\Omega \cong \mathrm{Der}(\Omega)$ et, $\mathfrak{N} \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{N})$ en utilisant le Théorème 2.12. Ainsi $\mathrm{Der}(\Omega) \cong \mathfrak{N} \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{N})$.
Par isomorphisme, on obtient $\mathrm{H}^1(\Omega) \cong \mathfrak{N}/\Omega$ et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{N}) \cong \{0\}$. $\square$

Remarque 2.15. Supposons que l'algèbre de Lie Ω n'est pas identiquement nulle et l'ensemble $\mathfrak{O} = \{x \in M$ tel que $\Omega(x) \neq 0\}$ est différent de M. La Proposition 2.4 reste valable en utilisant un résultat analogue sur la sous-variété ouverte $\mathfrak{O}$. En s'inspirant d'une preuve faite dans [6] pp.458-463, si $\mathfrak{O}$ est partout dense dans M, alors :
D'après le Théorème 2.7, pour tout $D \in \mathrm{Der}(\Omega)$ il existe $X \in \chi(\mathfrak{O})$ tel que $D_{|\mathfrak{O}} = L_X$. Si le

prolongement $\overline{X}$ de chaque X correspondant à $D \in \mathrm{Der}(\Omega)$, appartient à $\mathfrak{N}$; alors $D = L_{\overline{X}}$. Le centralisateur de Ω est nul, ainsi le Corollaire 2.14 reste valable.

Exemple 2.16. Sur $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathfrak{B}$ des champs de vecteurs de la forme $f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$ avec $f, g, h \in F\left(\mathbb{R}^3\right)$, s'annulant en $(0,0,0)$, est une distribution non-régulière, involutive. Le normalisateur de $\mathfrak{B}$ est $\mathfrak{B}$ lui-même, le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{H}^1(\mathfrak{B}) \cong \{0\}$.

3 Application à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact et aux algèbres de Lie attachées à un feuilletage généralisé

Soit $\mathfrak{C}_c$ l'ensemble des champs de vecteurs à support compact sur M, il est facile de vérifier que $\mathfrak{C}_c$ est une distribution involutive de M.

Théorème 3.1. *L'idéal dérivé de l'algèbre de Lie $\mathfrak{C}_c$ coïncide à $\mathfrak{C}_c$, son centralisateur est nul et son premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg est isomorphe à $\chi(M)/\mathfrak{C}_c$.*

Démonstration. On peut montrer que pour tous $X \in \chi(M)$ et $Y \in \mathfrak{C}_c$:

$$[X,Y] \in \mathfrak{C}_c \tag{3.1}$$

Ainsi, le normalisateur de $\mathfrak{C}_c$ dans $\chi(M)$ est $\chi(M)$. Par la Proposition 2.9, $[\mathfrak{C}_c, \mathfrak{C}_c] = \mathfrak{C}_c$, c'est un idéal caractéristique de $\chi(M)$.
Par ailleurs, pour tout $x \in M$, il existe $X \in \mathfrak{C}_c$ tel que $X(x) \neq 0$, donc son centralisateur est nul par la Proposition 2.8. D'après le Corollaire 2.14 :

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{C}_c) \cong \chi(M)/\mathfrak{C}_c$$

□

Définition 3.2. Un feuilletage généralisé $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}^\alpha\}_{\alpha \in I}$ sur M est une partition en sous-variétés connexes de $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{F}^\alpha$ qui sont exactement les orbites des compositions des flots engendrés par les champs de vecteurs localement tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ cf. [2].

Dans toute la suite, M est une variété différentiable munie d'une structure de feuilletage généralisé $\mathfrak{F}$.

Définition 3.3. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au feuilletage $\mathfrak{F}$ est désignée par $\chi(\mathfrak{F})$. Le normalisateur de $\chi(\mathfrak{F})$ dans $\chi(M)$ est noté par $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$. On désigne par $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui préservent le feuilletage $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ est contenu dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ cf. [2].

Exemple 3.4. Les feuilletages engendrés par les champs hamiltoniens de l'algèbre de Lie locale de Kirillov cf. [3] ou ceux engendrés par la structure de Jacobi ou de Poisson, sont des feuilletages généralisés. Ils définissent un $\chi(\mathfrak{F})$ finiment engendré cf. [2].
La structure hamiltonienne dans [9] définit un feuilletage généralisé aux feuilles présymplectiques dont l'algèbre de Lie $\chi(\mathfrak{F})$ y est détaillée.

Théorème 3.5. *L'algèbre de Lie* $\chi_c(\mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_c$ *est un idéal caractéristique de* $\chi(\mathfrak{F})$ *tel que* $[\chi_c(\mathfrak{F}), \chi_c(\mathfrak{F})] = \chi_c(\mathfrak{F})$. *Si* $\forall x \in M$, $\exists X \in \chi_c(\mathfrak{F})$ *tel que* $X(x) \neq 0$, *alors le centralisateur de* $\chi_c(\mathfrak{F})$ *est nul et* $\mathrm{H}^1(\chi_c(\mathfrak{F})) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\chi_c(\mathfrak{F})$.

Démonstration. Comme $\chi(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{C}_c$ sont des distributions involutives sur M ; alors $\chi_c(\mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_c$ l'est aussi. Par la Proposition 2.9, $[\chi_c(\mathfrak{F}), \chi_c(\mathfrak{F})] = \chi_c(\mathfrak{F})$; c'est un idéal caractéristique de $\chi(\mathfrak{F})$. Par ailleurs $\chi_c(\mathfrak{F}) \subset \chi(\mathfrak{F})$, alors $[\mathfrak{N}(\mathfrak{F}), \chi_c(\mathfrak{F})] \subset \chi(\mathfrak{F})$. D'après la relation (3.1), les champs de $[\mathfrak{N}(\mathfrak{F}), \chi_c(\mathfrak{F})]$ sont à support compact, alors $[\mathfrak{N}(\mathfrak{F}), \chi_c(\mathfrak{F})]$ est contenu dans $\chi(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_c = \chi_c(\mathfrak{F})$. On en tire que $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ est le normalisateur de $\chi_c(\mathfrak{F})$ dans $\chi(M)$.
Le centralisateur de $\chi_c(\mathfrak{F})$ est nul d'après la Proposition 2.8 ; par le Corollaire 2.14, on a :

$$\mathrm{H}^1(\chi_c(\mathfrak{F})) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\chi_c(\mathfrak{F})$$

□

Remarque 3.6. Ce dernier théorème est en partie une généralisation dans le cas non régulier d'un théorème dans [6] p.64.

Théorème 3.7. *L'idéal dérivé de* $\chi(\mathfrak{F})$ *est égal à* $\chi(\mathfrak{F})$. *Si le feuilletage est non singulier, c'est à dire que chaque feuille a une dimension superieure ou égale à un, alors le centralisateur de* $\chi(\mathfrak{F})$ *est nul et*

$$\mathrm{H}^1(\chi(\mathfrak{F})) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\chi(\mathfrak{F}),\ \mathrm{H}^1(\mathfrak{N}(\mathfrak{F})) \cong \{0\},\ \mathrm{H}^1(\mathfrak{L}(\mathfrak{F})) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\mathfrak{L}(\mathfrak{F}).$$

Démonstration. D'après [2], $\chi(\mathfrak{F})$ est une distribution involutive de M. Par la Proposition 2.9, $[\chi(\mathfrak{F}), \chi(\mathfrak{F})] = \chi(\mathfrak{F})$, c'est un idéal caractéristique de $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$.
Si le feuilletage est non singulier, alors $\forall x \in M$, $\exists X \in \chi(\mathfrak{F})$ tel que $X(x) \neq 0$. En utilisant la Proposition 2.8 et le Corollaire 2.14, on a les trois résultats suivants. Par ailleurs, l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ contient $\chi(\mathfrak{F})$ et $[\mathfrak{L}(\mathfrak{F}), \chi(\mathfrak{F})] \subset \chi(\mathfrak{F})$ cf. [2]. Ainsi, on adapte une preuve de [6] pp.68-69 et on trouve que toute dérivation de $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ est une dérivée de Lie par rapport à un champ de $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$. En faisant un raisonnement analogue à celui du Corollaire 2.14, on trouve le dernier résultat. □

Remarque 3.8. Si le feuilletage $\mathfrak{F}$ est singulier, et $\chi(\mathfrak{F})$ vérifie toutes les hypothèses de la *Remarque* 2.15, alors on retrouve les mêmes résultats du Théorème 3.7.

Remarque 3.9. Si le feuilletage $\mathfrak{F}$ est régulier alors on retrouve un théorème de Kanie cf. [4] p.487 et certains résultats de Lichnérowicz cf. [6] p.55, p.64, p.69, à partir du Théorème 3.7.

Remarque 3.10. Si on a l'égalité $\mathfrak{N}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, alors

$$\mathrm{H}^1(\chi(\mathfrak{F})) \cong \mathfrak{L}(\mathfrak{F})/\chi(\mathfrak{F}),\ \mathrm{H}^1(\mathfrak{L}(\mathfrak{F})) \cong \{0\}.$$

Références

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, Paris 1960.

[2] J. Grabowski, Lie algebras of vector fields and generalized foliations. *Publicacions Matemàtiques* **37** (1993), 359-367.

[3] F. Guedira and A. Lichnérowicz, Generalized foliations and local Lie algebras of Kirillov. *J. Math. Pures et Appl.* **63** (1984), 407-484.

[4] Y. Kanie, Cohomologies of Lie algebras of vector fields with coefficients in adjoint representations, foliated case. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **14** (1978), 487-501.

[5] J. Klein, *On Lie algebras of vector fields defined by vector forms*, Colloquia Math. Societatis Janos Bolyai, Debrecen 1987.

[6] A. Lichnérowicz, Algèbres de Lie attachées à un feuilletage. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **1** (1979), 45-76.

[7] J. Peetre, Rectifications à l'article "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels". *Math. Scand.* **8** (1960), 116-120.

[8] F. Takens, Derivations of vector fields. *Compositio Mathematica* **26** (1973), 95-99.

[9] I. Vaisman, Hamiltonian structures on foliations. *J. Math. Phys.* **43** (2002), 4966-4977.

[10] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge 1994.